Архімедова сила уяви: як античний геній зважував світ і обчислював нескінченність.

Чим більше я гладшаю, тим дешевше приймати ванну!

© Архімед

***

Як казав Архімед по п'ятницях — дайте мені склянку віскаря, і я тут усе переверну!!!

1.1 Математична спадщина Архімеда Сіракузського.

Міжнародний математичний союз заснував визначну нагороду – медаль Філдса, яка раз на чотири роки вручається одному або кільком (до шести) математикам, які отримали вагомі здобутки у своїй науковій галузі. Ця нагорода становить найвищу почесть, якої може досягти математик, оскільки для цієї науки Нобелівської премії не передбачено. На медалі вибитий рядок римського поета Марка Манілія, який обрамляє рельєфний портрет Архімеда: *Transire suum pectus mundoque potiri*, що у перекладі звучить як «Перевершити людську природу і підкорити Всесвіт» (рис. 1).

Рис. 1. Профіль Архімеда на медалі Філдса.

Роботи Архімеда (287—212 рр. до н.е.) стосувалися майже всіх галузей математики того часу: йому належать дослідження з геометрії, арифметики, алгебри. Він знайшов усі напівправильні многогранники, які тепер носять його ім'я, значно розвинув вчення про конічні перерізи, дав геометричний спосіб розв'язання кубічних рівнянь виду $x^2(a \pm x) = b$, корені яких він знаходив за допомогою перетину параболи та гіперболи. Архімед також провів повне дослідження цих кривих, тобто знайшов, за яких умов вони матимуть дійсні додатні різні корені та за яких корені будуть співпадати (аналогічно як у моделі на рис. 2 нижче).

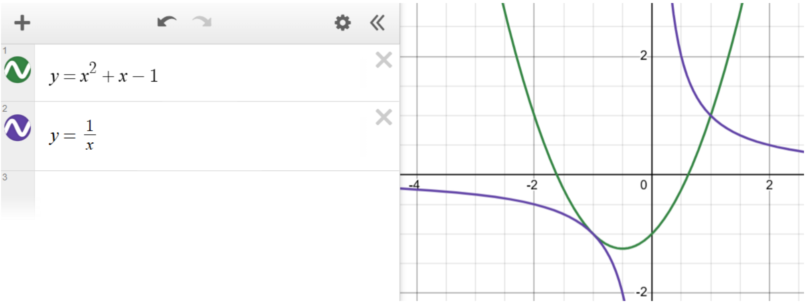


Рис. 2. Геометричний спосіб розв'язання кубічних рівнянь.

Однак головні математичні досягнення Архімеда стосуються проблем, які нині відносять до галузі математичного аналізу. Греки до Архімеда зуміли визначити площі багатокутників і круга, об'єм призми, циліндра, піраміди та конуса. Але тільки Архімед знайшов набагато більш загальний метод обчислення площ або об'ємів: для цього він удосконалив і віртуозно застосовував метод вичерпування Евдокса Книдського. У своїй роботі «Послання до Ератосфена про метод» (іноді називається «Метод механічних теорем») він використовував нескінченно малі для обчислення об'ємів. Згодом ідеї Архімеда лягли в основу інтегрального числення.

У трактаті «Квадратура параболи» Архімед довів, що площа сегмента параболи, який відтинається від неї прямою, становить $\frac{4}{3}$ від площі трикутника, вписаного в цей сегмент (див. рис. 30-35 у "Сила математичного аналізу"). Для доведення Архімед підрахував суму нескінченного ряду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{4}{3} \tag{1}$$

Кожний доданок ряду — це площа трикутників, вписаних у неохоплену попередніми членами ряду частину сегмента параболи.

Історичне відео: Архімед. Давньогрецький математик (7 хвилин українською): youtube.com/watch?v=NMOY4W_3TMs

Як відомо, в математиці, природничих науках і техніці дуже важливо вміти знаходити найбільші та найменші значення змінних величин — їхні екстремуми.

Рис. 3. «Цицерон знаходить могилу Архімеда». Бенджамін Вест, 1804 рік.

Наприклад, як серед циліндрів, вписаних у кулю, знайти циліндр, що має найбільший об'єм?

Усі такі задачі нині можуть бути розв'язані за допомогою диференціального числення. Архімед першим побачив зв'язок цих задач із проблемами визначення дотичних і показав, як розв'язувати задачі на екстремуми.

Також він зумів встановити, що об'єми конуса та кулі, вписаних у циліндр, і самого циліндра співвідносяться як $1:2:3$. Найкращим своїм досягненням він, за Цицероном, вважав визначення поверхні та об'єму кулі — задачу, яку до нього ніхто не міг розв'язати. Архімед навіть просив вибити на своїй могилі кулю, вписану в циліндр (на рис. 3 наведено картину «Цицерон знаходить могилу Архімеда» пензля Б. Веста).

Окрім переліченого, вчений обчислив площу поверхні для сегмента кулі та витка відкритої ним «спіралі Архімеда», визначив об'єми сегментів кулі, еліпсоїда, параболоїда і двопорожнистого гіперболоїда обертання.

Наступна концептуальна задача, розв'язана вченим, стосується геометрії кривих. Нехай дана деяка крива лінія. Як визначити дотичну до неї в будь-якій точці? Або, якщо перекласти цю проблему на мову фізики, нехай нам відомий шлях деякого тіла в кожен момент часу. Як визначити його швидкість у будь-якій точці? Перший загальний метод розв'язання цієї задачі був знайдений Архімедом і згодом був покладений в основу диференціального числення.

Величезне значення для розвитку математики мало обчислене Архімедом відношення довжини кола до діаметра. У роботі «Про вимірювання кола» Архімед дав своє знамените наближення для числа π: «архімедове число» $\frac{22}{7}$. Більше того, він зумів оцінити точність цього наближення: $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Для доведення він побудував для кола вписаний і описаний 96-кутники та обчислив довжини їхніх сторін. Він також довів, що площа круга дорівнює πr^2, тобто $\frac{r}{2}$, помноженому на довжину кола $(2\pi r)$, яка обмежує цей круг.

Серед інших досягнень – однойменна теорема, лема та аксіома:

- Теорема Архімеда:

  «Усі 3 висоти трикутника перетинаються в одній точці», яка тепер називається ортоцентром. Це поняття вперше в грецькій математиці використано в «Книзі лем», хоча явного доведення існування ортоцентра Архімед не навів. Тим не менш, до середини XIX століття ортоцентр часто називали архімедовою точкою (рис. 4).

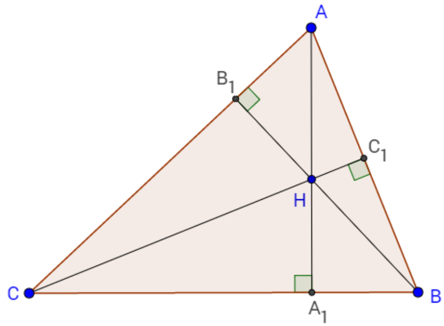


Рис. 4. Ортоцентр.

- Лема Архімеда:

  Якщо коло α торкається хорди MN кола β в точці B, а кола β торкається в точці A, тоді AB є бісектрисою кута MAN (рис. 5).

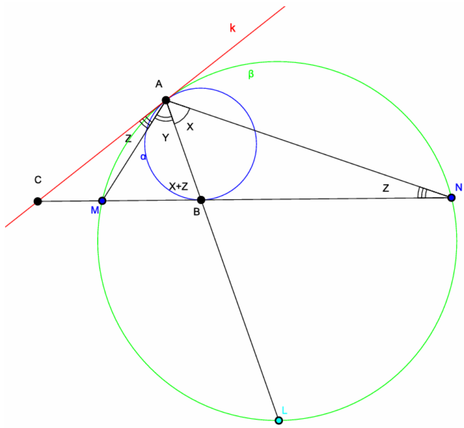


Рис. 5. Лема Архімеда.

- Аксіома Архімеда:

  У роботі «Про кулю та циліндр» Архімед постулює, що будь-яка величина при її додаванні до себе достатню кількість разів перевищить будь-яку задану величину. Тобто, якщо є дві величини, a і b, і a менша за b, то, взявши a доданком достатню кількість разів, можна перевершити b (рис. 6):

$$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n} > b \qquad (2)$$

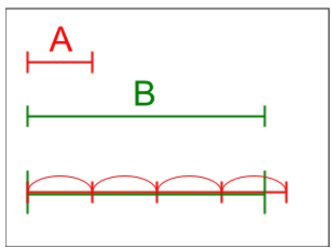


Рис. 6. Аксіома Архімеда.

Цікаве відео: Формула, яку ви знали, але не розуміли (16 хвилин): https://www.youtube.com/watch?v=ezHDaQYClp8

Архімед був людиною з широкими зв'язками як у політичних, так і в наукових колах. Джерела, що дійшли до нас, підтверджують, що вчений вів жваве листування з Ератосфеном Кіренським, який згадується в книгах з історії науки як людина, що першою виміряла радіус Землі (причому вимірювання він виконав із надзвичайною точністю). І з ним, і з іншими вченими свого часу Архімед часто обмінювався листами. Його збережені трактати починаються з особистого листа, що становить водночас передмову до самої наукової праці. Відомо також про тісні зв'язки Архімеда з Гієроном II, царем Сіракуз і, крім того, його родичем. Це Гієрон II спонукав Архімеда до побудови багатьох механізмів, переважна більшість з яких були військовими машинами. Якраз завдяки його дружбі з царем відомі деякі деталі біографії вченого. Наприклад, ми знаємо зі слів Архімеда про те, що його батько Фідій був астрономом, і це, ймовірно, вплинуло на його освіту.

Історичний момент, на який припало життя сіракузського мудреця, був непростим: йдеться про епоху Пунічних воєн. Сіракузи займали стратегічне становище між римлянами і карфагенянами, що стало актуальним, коли між цими двома могутніми державами спалахнула війна. Епоха, в якій випало жити вченому, справила вплив на коло його наукових і технічних пошуків. Безсумнівно, розповідь про оборону Сіракуз не може обійтися без опису внеску в неї Архімеда. На рис. 7 наведено полотно пензля Т. Р. Спенса «Архімед керує обороною Сіракуз».

Рис. 7. «Архімед керує обороною Сіракуз». Томас Ральф Спенс, 1895 рік.

Саме завдяки цьому внеску його часто уявляють як великого інженера, який настільки успішно побудував захист міста, що завдяки його винаходам Сіракузи два роки витримували римську облогу!

1.2 Дайте мені точку опори, і я переверну Землю!

У VIII книзі «Математичного зібрання» Папп Александрійський розповідає про Архімеда та його геніальні роздуми про важіль. За словами автора, великий сиракузький вчений одного разу проголосив знамените речення: «Дайте мені точку опори, і я переверну Землю!». На рис. 8 нижче можна бачити гравюру, що демонструє крилатий вислів.

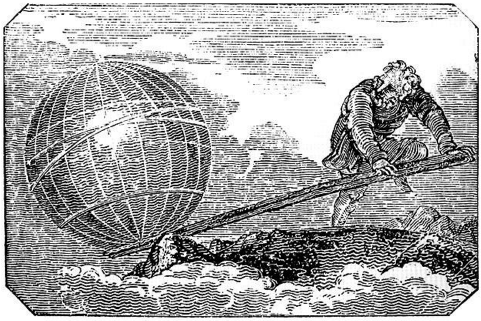


Рис. 8. «Архімед перевертає Землю», гравюра 1824 року.

Цей афоризм підкреслює могутність механіки, але давайте розберемося, наскільки реалістичним є таке твердження. Уявімо, що для нашого гіпотетичного експерименту ми використовуємо важіль першого роду (з опорою посередині). Землю моделюємо як матеріальну точку, розташовану всього в 1 м від точки опори.

Важливе зауваження: насправді Земля не має ваги в звичному розумінні, оскільки вільно рухається в космічному просторі, не спираючись на інші тіла. Однак для ілюстрації принципу припустимо, що ми встановили наш «суперважіль» на якійсь «суперпланеті», яка слугує опорою. Таким чином, вага Землі врівноважується зусиллям на іншому кінці важеля.

Питання: на якій відстані від опори повинен стояти Архімед, щоб, прикладаючи зусилля, скажімо, в 60 кг, зрушити Землю?

Маса Землі $M \approx 6 \times 10^{24}$ кг. Зусилля Архімеда $F_A = 60$ кг (в одиницях сили, еквівалентно $60 \times g$, де g — прискорення вільного падіння, але в пропорції коефіцієнт g скоротиться).

За законом важеля моменти сил рівні:

$$F_Z \cdot l_Z = F_A \cdot l_A, \tag{3}$$

де:

- $F_Z = M \cdot g$ — вага Землі,
- $l_Z = 1$ м — плече для Землі,
- $F_A = 60 \cdot g$ — зусилля Архімеда,
- l_A — плече для Архімеда (шукана відстань).

Підставляємо і спрощуємо (g скорочується):

$$(M \cdot g) \cdot 1 = (60 \cdot g) \cdot l_A \implies l_A = \frac{M}{60} = \frac{6 \times 10^{24}}{60} = 10^{23} \text{ м.} \tag{4}$$

Ця відстань — 10^{23} метрів! Щоб усвідомити масштаб, переведемо в світлові роки. Світловий рік (позначається як ly від англ. *light-year*) – це астрономічна одиниця довжини, що використовується для вимірювання відстаней у космосі. Вона визначається як відстань, яку проходить світло (або будь-яке електромагнітне випромінювання) у вакуумі за один юліанський рік зі швидкістю світла у вакуумі. Це не одиниця часу, а саме відстані, а юліанський рік передбачає часовий інтервал для розрахунку.

Швидкість світла у вакуумі: $c = 299\,792\,458$ м/с.

Юліанський рік — 365,25 сонячних діб (це середнє значення з урахуванням високосних років) або в секундах:

$$T = 365{,}25 \times 24 \times 3600 = 31\,557\,600 \text{ с.} \tag{5}$$

Підсумок:

$$1 \text{ ly} = c \times T = 299\,792\,458 \text{ м/с} \times 31\,557\,600 \text{ с} = 9\,460\,730\,472\,580\,000 \text{ м.} \tag{6}$$

Округлюючи до 11 знака, 1 ly $= 9{,}46073047258 \times 10^{15}$ м. Тоді довжина важеля:

$$l_A \text{ (ly)} = \frac{10^{23}}{9{,}46073047258 \times 10^{15}} \approx 1{,}057 \times 10^{7} \text{ ly} \approx 1{,}06 \times 10^{7} \text{ ly.} \tag{7}$$

Це понад 10,5 млн світлових років! Для порівняння, відстань до найближчої великої галактики Андромеди — 2,5 мільйона світлових років (на рис. 9 нижче вона на фото в ультрафіолетових променях).

Рис. 9. Галактика Андромеди в ультрафіолетових променях.

Для оцінки радіуса і діаметра Всесвіту візьмемо його вік — близько 13 700 мільйонів років ($1{,}37 \times 10^{10}$ років). У спрощеній моделі (без розширення) радіус Всесвіту приблизно дорівнює цьому значенню в світлових роках, а діаметр

$$D = 2 \times 1{,}37 \times 10^{10} = 2{,}74 \times 10^{10}\ \mathrm{ly} = 27\,400\ \text{млн ly}. \tag{8}$$

Кількість важелів, які вкладуться в діаметр Всесвіту

$$N = \frac{2{,}74 \times 10^{10}}{1{,}06 \times 10^{7}} \approx 2{,}59 \times 10^{3} = 2590. \tag{9}$$

З урахуванням космологічного розширення реальний діаметр спостережуваного Всесвіту сягає 93 мільярди світлових років ($9{,}3 \times 10^{10}$ ly), що потребує приблизно 8800 важелів (як видно з табл.1).

Табл. 1. Важіль Архімеда у порівнянні.

Масштаб	**Значення**	**Порівняння**
Довжина важеля	$1{,}06 \times 10^{7}$ ly	1 важіль
Діаметр Чумацького Шляху	$\approx 3 \times 10^{5}$ ly	0,03 важеля
Відстань до Андромеди	$2{,}5 \times 10^{6}$ ly	0,24 важеля
Діаметр Всесвіту	$2{,}74 \times 10^{10}$ ly	2590 важелів
Діаметр (з розширенням)	$9{,}3 \times 10^{10}$ ly	8800 важелів

Переворот Землі Архімед, безумовно, розумів метафорично: важіль дозволяє керувати гігантськими силами за допомогою малих зусиль, і його крилатий вислів — дещо поетична ілюстрація цього принципу механіки (рис. 10).

Рис. 10. Дайте мені точку опори, і я переверну Землю!

1.3 Скільки потрібно піщинок, щоб заповнити Всесвіт?

Книга «Обчислення піщинок» (грецькою — «Псамміт») є науково-популярною роботою Архімеда, на рис. 11 наведено її сучасну версію.

У трактаті вчений ставить питання, скількома піщинками можна було б заповнити Сиракузи — чи нескінченна їхня кількість? І відповідає, що скінченна. Потім він обчислює, скільки піщинок вмістила б Сицилія, скільки знадобилося б для наповнення всіх гір Землі... І так аж до числа піщинок, необхідних для заповнення Всесвіту.

> *Тому ясно, що кількість піщинок, рівна за розміром сфері нерухомих зірок, наявність якої припускає Аристарх, менша, ніж 1000 міріад «восьмих» чисел.*

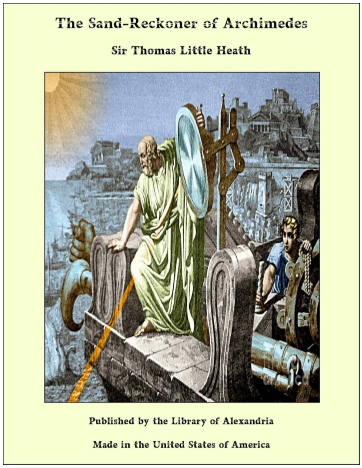


Рис. 11. Сучасна книга «Sand-Reckoner of Archimedes».

Запропонована Архімедом у «Обчисленні піщинок» числова система відома як система октад, і свого часу вона мала великий потенціал, хоча й залишилася невідомою для більшості математиків. До епохи Архімеда використовувалися терміни одиниця, десяток, сотня, тисяча і міріада (10 000). Він же запропонував піти далі міріади. Взявши ці 5 чисел і їхні добутки, він розбив їх на вісім розрядів, як показано в табл. 2.

Табл. 2. Система числення Архімеда.

Архімед	**Математичний запис**	**Назва**
Одиниця	$1 = 10^0$	Один
Десяток	$10 = 10^1$	Десять
Сотня	$100 = 10^2$	Сто
Тисяча	$1000 = 10^3$	Тисяча
Міріада	$10\,000 = 10^4$	Десять тисяч
Десяток міріад	$10 \cdot 10\,000 = 10^5$	Сто тисяч
Сотня міріад	$100 \cdot 10\,000 = 10^6$	Мільйон
Тисяча міріад	$1000 \cdot 10\,000 = 10^7$	Десять мільйонів
Міріада міріад	$10\,000 \cdot 10\,000 = 10^8$	Сто мільйонів

Таким чином, він отримав систему, основою якої є 10^8 — число, що іменується октадою. Кожного разу при перевищенні відповідного розряду число переходить у наступний, з назвами, наведеними в табл. 3 нижче.

Табл. 3. Розряди чисел у системі Архімеда.

Діапазон	**Назва і перше число розряду**
Від 1 до $10^8 - 1$	«Перші числа», перше число цього розряду — 1
Від 10^8 до $10^{16} - 1$	«Другі числа», перше число розряду — 10^8
Від 10^{16} до $10^{24} - 1$	«Треті числа», перше число розряду — 10^{16}
і так далі...	

Архімед назвав числа до 10^8 «першими числами», а 10^8 назвав «одиницею других чисел». Множення цієї одиниці на числа до міріади міріад породжують «другі числа» аж до

$$10^8 \cdot 10^8 = 10^{16}.$$

Число 10^{16} стало «одиницею третіх чисел», яка таким же чином породжувала треті числа. Продовжуючи аналогічні міркування, Архімед дійшов до міріадо-міріадних чисел, тобто до

$$(10^8)^{(10^8)} = 10^{8 \cdot 10^8}.$$

Після цього Архімед назвав усі наведені числа «числами першого періоду», а останнє $10^{8 \cdot 10^8}$ — «одиницею другого періоду». Після цього він побудував числа другого періоду, множачи цю одиницю на числа першого періоду. Продовжуючи таким чином побудову, Архімед прийшов до чисел міріадо-міріадного періоду. Найбільшим числом, названим Архімедом, стало

Назва	**Число**
Міріада	10^4
Гугол	10^{100}
Асанкхейя	10^{140}
Гуголплекс	$10^{10^{100}}$
Друге число Скьюза	$10^{10^{10^{1000}}}$
Мега	2[5] (у нотації Мозера)
Мегістон	10 [5] (у нотації Мозера)
Мозер	2[2[5]] (у нотації Мозера)
Число Грема	G63 (в нотації Грема)
Стасплекс	G100 (в нотації Грема)

Рис. 12. Великі числа.

$$\left((10^8)^{(10^8)}\right)^{(10^8)} = 10^{8 \cdot 10^{16}}$$

або ж одиниця з 80 трильйонами нулів!

На рис. 12 вище наведено для порівняння великі числа, включно з міріадою, яку вдало використав Архімед (інші - придумані пізніше).

Для підрахунку піщинок на основі цієї системи, Архімед зробив припущення, що Всесвіт сферичний (укладений у «сферу віддалених зірок»), і відношення діаметра Всесвіту до діаметра орбіти Землі навколо Сонця дорівнює відношенню діаметра орбіти Землі навколо Сонця до діаметра Землі. Для обчислення верхньої межі розміру Всесвіту Архімед спеціально завищував свої оцінки. Він припустив, що довжина земного екватору не більше 300 міріад стадіїв (близько 500 000 км), хоча він і вказує, що деякі вчені отримали результат у 30 міріад стадіїв. Також Архімед припустив, що Місяць не більший за Землю, а Сонце не більше, ніж у тридцять разів більше Місяця, причому він вказує, що Евдокс Кнідський і Фідій (при деяких прочитаннях — батько Архімеда) наводили оцінку в 9 і 12 разів відповідно (насправді діаметр Сонця в 109 разів більший за діаметр Землі і в 400 разів більший за діаметр Місяця). На рис. 13 нижче показана модель планетарію Архімеда, створеного для відображення його моделі устрою Всесвіту.

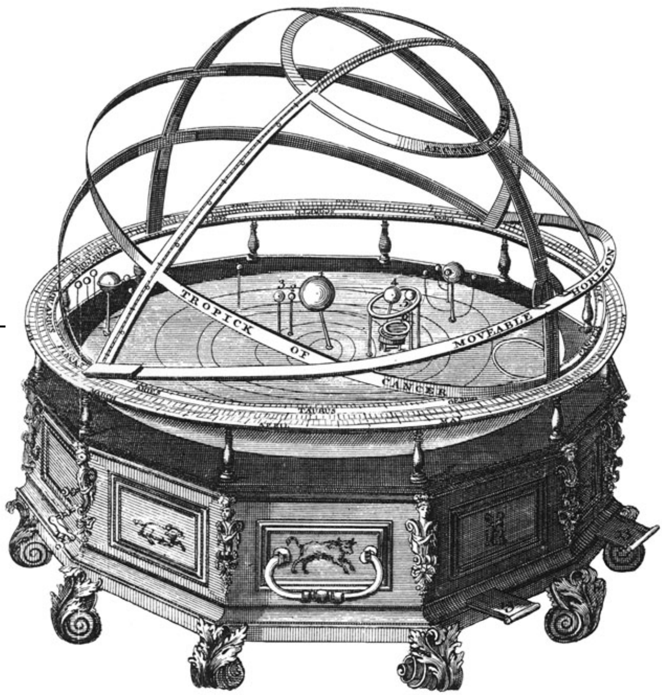


Рис. 13. Планетарій Архімеда.

Для вимірювання кутового діаметра Сонця (тобто кута, який займає Сонце на колі небесної сфери) Архімед проводив експеримент, що виконувався на світанку, коли світло достатньо слабке, щоб можна було дивитися прямо на Сонце. Для цього він прикріплював до кінця лінійки невеликий циліндр і віддаляв його так, щоб він якраз затуляв собою Сонце. При розрахунках Архімед враховував розмір зіниці і робив спеціальні вимірювання для того, щоб знайти його.

У результаті вимірювань було отримано, що кутовий діаметр Сонця більший за $\frac{1}{200}$ частину прямого кута. З цього вимірювання Архімед показує, що діаметр Сонця більший за сторону вписаного в небесну сферу тисячокутника. При цьому він вперше в історії розглядає паралакс, зауважуючи різницю між спостереженнями сходу Сонця з центру Землі і з її поверхні.

На основі отриманих даних Архімед підрахував, що діаметр Всесвіту не більше 10^{14} стадіїв (близько двох світлових років). Також він припустив, що в об'ємі макового зернятка поміщається не більше міріади піщинок, а діаметр макового зернятка не менше сорокової частини дюйма. Зрештою Архімед показав, що Всесвіт може містити в собі не більше 10^{63} піщинок. Для порівняння — сучасна оцінка числа елементарних частинок у відомій нам частині Всесвіту становить від 10^{79} до 10^{81}, що за порядком величини якраз відповідає числу елементарних частинок у 10^{63} піщинках масою 1 мікрограм!

Говорячи про великі числа від античності до сучасності, потрібно згадати принаймні ті, що вказані на рис. 12 вище. Цікаво, що факторіал гугола більший за гуголплекс: $10^{100}! = 10^{9{,}9565705518\times10^{101}}$. Якщо надрукувати гуголплекс у книгах, кожна з яких міститиме мільйон знаків (400 сторінок, 50 рядків на сторінці, 50 знаків у рядку), то знадобиться $10^{(10^{100}-6)}$ таких книг. Якщо кожна книга важитиме навіть 100 грамів, то їхня загальна маса становитиме $10^{(10^{100}-7)}$ кілограмів. Для порівняння, маса Землі становить $5{,}972\cdot10^{24}$ кілограмів, а маса Чумацького Шляху — $6\cdot10^{42}$ кілограмів.

1.4 Золота корона, закон Архімеда, клепсидра та айсберг.

Тиран Сиракуз Гієрон, отримавши від ювеліра золоту корону, запідозрив його у підмішуванні срібла.

Тому звернувся за допомогою до Архімеда, який, саме досліджуючи це завдання, вивів принцип виштовхувальної сили: на тіло, занурене в рідину, діє виштовхувальна сила F_A, що дорівнює вазі витісненої рідини: $F_A = \rho\cdot g\cdot V$, де V — об'єм зануреної частини, ρ — густина рідини, $g \approx 9{,}8$ м/с^2.

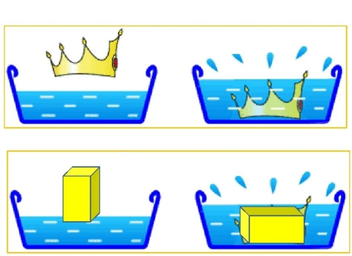


Рис. 14. Порівняння об'єму корони та золотого зливка.

Взявши для порівняння об'ємів срібний та золотий зливки по 1000 грамів (густина срібла $\rho_с = 10{,}5$ г/см^3, золота $\rho_з = 19{,}3$ г/см^3), отримаємо (рис. 14):

$$V_с = \frac{m_с}{d_с} = \frac{1000}{10{,}5} \approx 95{,}2 \text{ см}^3, \tag{10}$$

$$V_з = \frac{m_з}{d_з} = \frac{1000}{19{,}3} \approx 51{,}8 \text{ см}^3. \tag{11}$$

Припустимо, корона — 70% золота (700 г) і 30% срібла (300 г):

$$V_к = \frac{700}{19{,}3} + \frac{300}{10{,}5} \approx 36{,}3 + 28{,}6 = 64{,}9 \text{ см}^3. \tag{12}$$

Тоді $51{,}8 < 64{,}9 < 95{,}2$, що доводить домішку. Різниця із золотом $\Delta V \approx 13{,}1$ см^3.

У циліндричній ємності діаметром, скажімо, 20 см (площа $S = \pi \cdot 10^2 \approx 314$ см^2) підйом висоти $h = V/S$:

$$\text{для золота } h = \frac{51{,}8}{314} \approx 0{,}165 \text{ см}, \tag{13}$$

$$\text{для корони } h = \frac{64{,}9}{314} \approx 0{,}207 \text{ мм}, \tag{14}$$

$$\text{різниця } \Delta h = 0{,}042 \text{ см}. \tag{15}$$

0,42 мм – занадто мало для точного вимірювання в такій ємності. Альтернатива: клепсидра (водяний годинник), де різниця порядку 10 см^3 вимірюється легше і точніше.

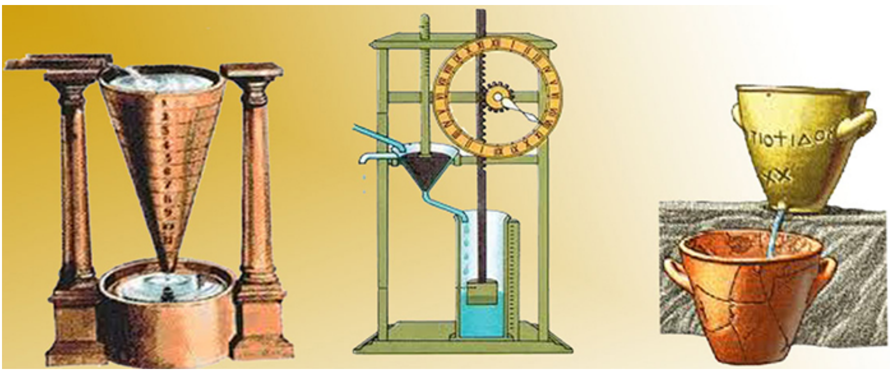


Рис. 15. Водяні годинники давнини.

Для чого винайшли клепсидри – водяні годинники? Сонячні годинники не могли вимірювати час у темряві, а потрібні були такі механізми, які відображали б хід часу і вдень, і вночі. І ще вони мали відміряти рівні відрізки часу в рівних кількостях. Водяні годинники могли це виконувати на відміну від сонячних.

Найдавніші єгипетські водяні годинники датуються близько 1500 р. до н. е. (на рис. 15 ліворуч). Згідно з розкопками, відомо також, що давні греки вже з 325 р. до н. е. застосовували схожі пристрої. Вони назвали такі годинники «клепсидрами». Це перекладається як «водяні крадії» (від дав.-гр. «красти, приховувати» + «вода»).

Найпростіші зразки грецьких клепсидр, ймовірно, авторства Ктесібія Олександрійського (на рис. 15 праворуч) – це посудини або ємності з отвором майже біля самого дна. Верхня посудина знаходиться під нахилом, і з неї капає вода в іншу ємність. У нижній чаші були позначки на внутрішній стороні, які позначали години.

Також є припущення, що Архімед для знаходження домішки срібла використовував важіль і терези. Зливок і корона по 1000 грам урівноважені в повітрі. Тоді у воді:

$$F'_з = mg - V_з \rho_в g = 1000g\left(1 - \frac{\rho_в}{\rho_з}\right), \tag{16}$$

$$F'_к = mg - V_к \rho_в g = 1000g\left(1 - \frac{\rho_в}{\rho_к}\right), \tag{17}$$

де $\rho_в \approx 1$ г/см³, $\rho_к = 0{,}7\rho_з + 0{,}3\rho_с \approx 14{,}59$ г/см³.

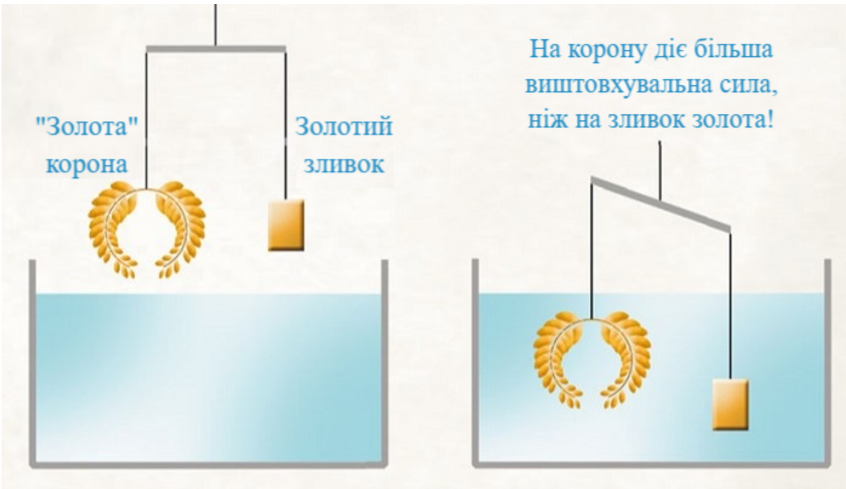


Рис. 16. Метод зважування.

Підставляючи значення: $\rho_з = 19{,}3$ г/см³ (золото), $\rho_с = 10{,}5$ г/см³ (срібло):

$$\rho_\text{к} = 0{,}7 \times 19{,}3 + 0{,}3 \times 10{,}5 = 13{,}51 + 3{,}15 = 16{,}66\ \text{г/см}^3$$

Тоді:

$$F'_\text{з} = 1000g\left(1 - \frac{1}{19{,}3}\right) \approx 1000g \times 0{,}948 = 948g, \tag{18}$$

$$F'_\text{к} = 1000g\left(1 - \frac{1}{16{,}66}\right) \approx 1000g \times 0{,}940 = 940g. \tag{19}$$

$F'_\text{к} < F'_\text{з}$, терези нахиляться до зливка, виявляючи домішку. Метод простий і точний.

Цікаво, що, знаючи закон Архімеда, можна обчислити підводну частину айсберга. Для плаваючого тіла:

$$\rho_\text{льоду} V g = \rho_\text{води} V_\text{під} g, \tag{20}$$

звідки частка підводної частини:

$$\frac{V_\text{під}}{V} = \frac{\rho_\text{льоду}}{\rho_\text{води}} = \frac{0{,}92}{1{,}025} \approx 0{,}90. \tag{21}$$

Таким чином, близько 90% об'єму айсберга приховано під водою — саме тому зіткнення з ним було таким фатальним для «Титаніка», чия команда бачила лише оманливо малу верхівку крижаного гіганта!

Рис. 17. Айсберг.

1.5 Невсіс і трисекція кута методом Архімеда.

Невсіс, що можна перекласти з давньогрецької як «нахил» – це техніка геометричних побудов. Вона полягає в тому, щоб побудувати відрізок певної довжини між двома кривими так, що він (або його продовження) пройде через задану точку. Йдеться про ручну побудову: на лінійці позначаються дві крайні точки відрізка, а потім лінійка зсувається, поки дані точки не ляжуть на відповідні криві. Можна сказати, що це такий геометричний «рахунок на пальцях».

Під впливом платонівського ідеалізму, який пронизував грецьку математику за часів Архімеда, усі математичні доведення ділилися відповідно до певної ієрархії, що відображала їхню красу та вишуканість. Якщо побудову можна було виконати за допомогою лінійки та циркуля, треба було користуватися тільки ними. Якщо ні, то задача «спускалася» на рівень нижче, скажімо, до конічних перерізів. Невсіс можна було застосовувати лише в тих випадках, коли інший розв'язок був неможливий.

Трисекція кута за допомогою невсісу.

1. Маємо кут $\alpha = \angle POM$ (рис. 18). Необхідно побудувати кут β, величина якого втричі менша за даний: $\alpha = 3\beta$.

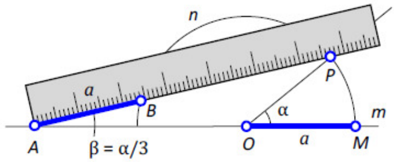


Рис. 18. Метод невсісу для трисекції кута.

2. Побудуємо коло довільного радіуса a з центром у точці O. Нехай сторони кута перетинаються з колом у точках P і M. Продовжимо сторону OM вихідного кута.

3. Узявши лінійку невсісу, відклавши на ній a, і використовуючи пряму OM як напрямну, точку P як полюс, а півколо як цільову лінію, будуємо відрізок AB. Отримаємо кут $\angle PAM$, рівний одній третині вихідного кута α.

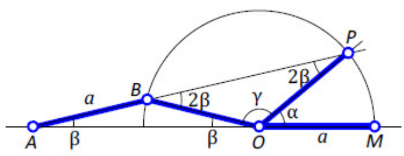


Рис. 19. Трисекція кута (доведення).

4. Розглянемо трикутник ABO (рис. 19). Оскільки $AB = BO = a$, то трикутник рівнобедрений, і кути при його основі рівні: $\angle BAO = \angle BOA = \beta$.

5. Кут $\angle PBO$ як зовнішній кут трикутника ABO дорівнює 2β.

6. Трикутник BPO також рівнобедрений, кути при його основі дорівнюють 2β, а кут при вершині $\gamma = 180° - 4\beta$. З іншого боку, $\gamma = 180° - \beta - \alpha$. Отже, $180° - 4\beta = 180° - \beta - \alpha$, а значить, $\alpha = 3\beta$.

1.6 Сила математичного аналізу: число π, метод вичерпування та нескінченність.

Першим провісником обчислення нескінченно малих величин можна назвати питання досягнення границі поділу та нескінченності, описані у відомих апоріях Зенона Елейського (490-430 до н.е.). Розглянута ним процедура дихотомії – послідовного поділу навпіл – була розширена Архімедом і застосована у трактатах «Про квадратуру параболи» та «Про вимірювання кола». В останньому стверджується:

Кожне коло дорівнює прямокутному трикутнику, один із катетів якого дорівнює радіусу кола, а інший – довжині кола.

Мається на увазі рівність їхніх площ

$$S_{\text{трикутника}} = \frac{\text{основа} \cdot \text{висота}}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2,$$

як на рис. 20 нижче:

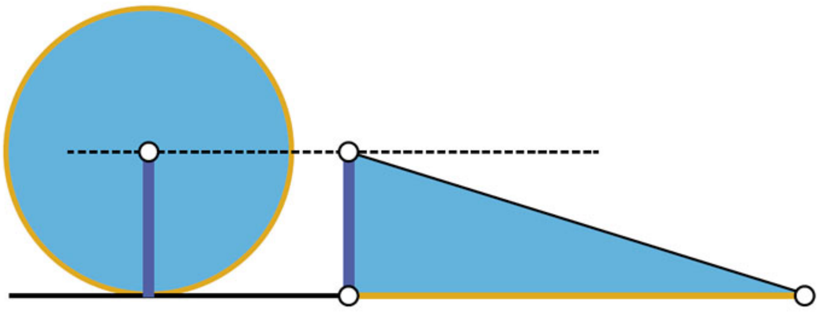


Рис. 20. Площа кола дорівнює трикутнику, висота якого — радіус, а основа — довжина кола.

Як Архімед дійшов до цього? Все завдяки силі матаналізу. Здавна люди помічали, що всі кола, по суті, являють собою одну й ту саму фігуру, тільки різних розмірів – більше або менше. Було зрозуміло, що пропорції в них однакові, тобто співвідношення між довжиною кола та її діаметром є величиною сталою. А значить, якщо розділити довжину кола на її діаметр, ми завжди отримаємо одне й те саме число, певну сталу π.

Але що це за число і як його знайти? Ускладнює завдання те, що кола круглі. Якби вони складалися з прямих ліній, ніяких проблем не було б. Знайти площі трикутників, квадратів і п'ятикутників легко. Але криволінійні фігури, такі як кола, набагато складніші.

Ключ до знаходження площі криволінійних фігур — уявити, що вони складаються з багатьох маленьких прямих шматочків. Це не зовсім правда, але це працює за умови, що ви доводите це до границі й уявляєте нескінченно багато шматочків, кожен з яких нескінченно малий.

Це ключова ідея, що лежить в основі всього математичного аналізу!

Ось один із способів використати цю ідею для знаходження площі кола. Почнемо з поділу площі на чотири рівні чверті й переставимо їх наступним чином (рис. 21).

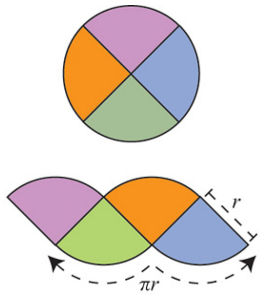


Рис. 21. Коло, поділене на 4 сектори й перебудоване в зубчасту фігуру.

Дивна зубчаста фігура внизу має ту саму площу, що й коло, хоча це може здатися малоінформативним, оскільки ми не знаємо й її площі. Але, принаймні, ми знаємо два важливих факти про неї. По-перше, дві дуги вздовж її основи мають загальну довжину πr, рівно половину довжини кола вихідного круга (тому що інша половина кола враховується двома дугами зверху). По-друге, прямі сторони секторів мають довжину r, оскільки кожна з них спочатку була радіусом кола.

Аналогічно повторимо процес поділу на вісім секторів (рис. 22).

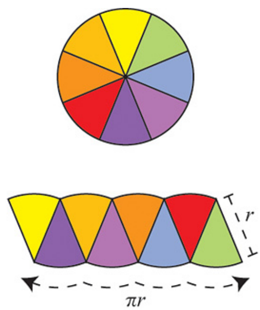


Рис. 22. Коло, поділене на 8 секторів і перебудоване в зубчасту фігуру.

Зубчаста фігура тепер виглядає звичніше. Дуги зверху й знизу не так сильно виражені, ліва й права сторони зубчастої фігури менше нахилені. Незважаючи на ці зміни, два факти, згадані для чотирьох секторів, як і раніше справедливі: дуги внизу все ще мають сумарну довжину πr, і кожна сторона все ще має довжину r. І, звичайно, зубчаста фігура все ще має ту саму площу, що й раніше — площу шуканого кола — оскільки це просто перестановка восьми секторів кола.

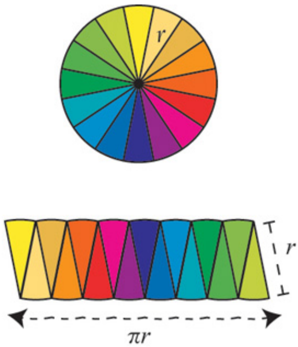


Рис. 23. Коло, поділене на 16 секторів і перебудоване у фігуру, близьку до прямокутника.

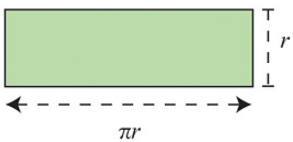


Рис. 24. Гранична фігура — прямокутник із шириною πr і висотою r.

В оригіналі Архімед почав з апроксимації кола багатокутником з кількістю сторін набагато більше чотирьох (рис. 25).

Потім він розрізав багатокутник на трикутники і «розгорнув його» вздовж периметра в зубчасту лінію з клинів. Ця розгортка не змінила загальну площу, тому «паркан» з трикутників має ту саму площу, що й вихідний багатокутник (рис. 26 нижче).

У міру того як ми беремо все більше й більше секторів, відбувається щось дивовижне: зубчаста фігура наближається до прямокутника. Дуги стають більш плоскими, а сторони стають майже вертикальними (рис. 23).

У границі нескінченно великої кількості секторів фігура стає прямокутником (рис. 24). Як і раніше, два факти все також справедливі: цей прямокутник має основу шириною πr і бічну сторону висотою r.

Завдання стало простішим: площа прямокутника дорівнює його ширині, помноженій на висоту, тому множення πr на r дає площу πr^2 для прямокутника. А оскільки перебудована фігура завжди має ту саму площу, що й коло, це і є відповідь для кола!

Тепер, якщо співвіднести площу прямокутника і площу трикутника з висотою, рівною бічній стороні r, стане очевидним, що довжина основи буде вдвічі більшою, тобто $2\pi r$!

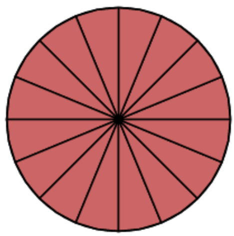


Рис. 25. Багатокутна апроксимація кола.

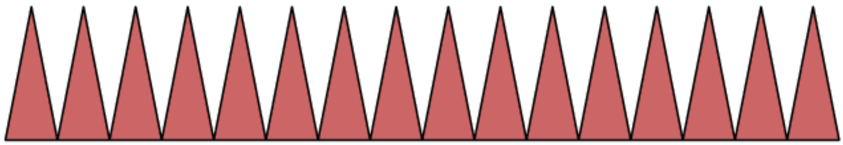


Рис. 26. Розгортка багатокутника.

Потім Архімед нагадав, що площа трикутника дорівнює половині його основи, помноженій на висоту: це означає, що якщо застосувати зсув до трикутника, площа залишиться незмінною, оскільки ні основа, ні висота не змінюються в ході цієї процедури (рис. 27).

І так Архімед зсував усі трикутники вздовж зубчастої лінії вліво, поки всі їхні вершини не збіглися на перпендикулярі до крайнього лівого ребра (рис. 28).

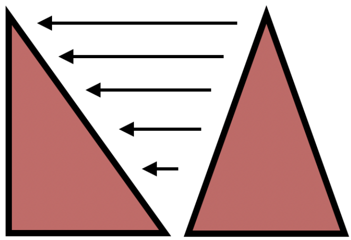


Рис. 27. Зсув трикутника залишає площу незмінною.

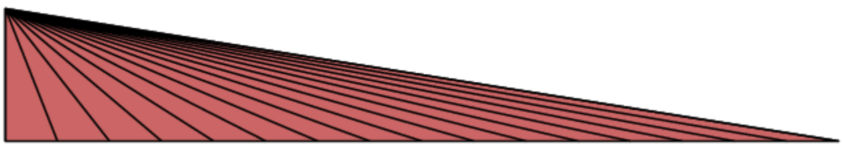


Рис. 28. Зсув зубчастої лінії утворює прямокутний трикутник.

Таким чином, для кожного правильного n-кутника Архімед зміг знайти точний прямокутний трикутник, який має ту саму площу і висота якого дорівнює радіусу багатокутника, а основа — периметру. Потім Архімед дуже ретельно довів, що коли кількість сторін багатокутника прямує до нескінченності, різниця його площі й площі кола прямує до нуля, і різниця його катета-основи та довжини кола також прямує до нуля. Отже, коло повинно мати ту саму площу, що й прямокутний трикутник з катетами, що дорівнюють довжині кола та радіусі!

Аналогічну стратегію дихотомії Архімед використовував для наближеного обчислення числа π. Він замінював коло багатокутником, а потім продовжував подвоювати число сторін, щоб наблизитися до ідеальної округлості. Але замість того, щоб задовольнитися наближенням невизначеної точності, він методично обмежував π, поміщаючи коло між вписаними та описаними багатокутниками для фігур, починаючи з 6 і закінчуючи 96 сторонами (рис. 29).

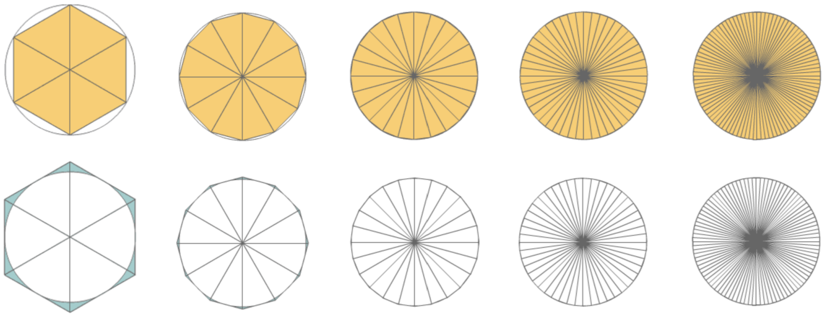


Рис. 29. Вписані та описані багатокутники з 6, 12, 24, 48 і 96 сторонами.

Потім він обчислював периметри й площі цих внутрішніх і зовнішніх багатокутників, починаючи з шестикутника й послідовно просуваючись до 12, 24, 48 і, зрештою, 96 сторін.

Результати для 96-кутників дозволили йому довести, що

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}, \tag{22}$$

а це відповідає дуже хорошому наближенню $\pi = \frac{22}{7}$.

У табл. 4 нижче наведені значення, що обмежують число π знизу й зверху, знайдені Архімедом за допомогою багатокутників з кількістю сторін, що послідовно зростає.

Табл. 4. Наближення числа π.

Сторони (n)	**Вписаний n-кутник**	**Описаний n-кутник**
6	3.0	3.464
12	3.1058	3.2154
24	3.1326	3.1597
48	3.1394	3.1461
96	3.1410	3.1427

Цей підхід відомий як «метод вичерпування» через те, як він обмежує невідоме число π між двома відомими числами, які «стискають» його з обох боків. Межі звужуються з кожним подвоєнням, тим самим вичерпуючи простір для маневру для π.

У границі нескінченно великої кількості сторін як верхня, так і нижня межі збігалися б до π. На жаль, ця границя не так проста, як попередня, де зубчаста фігура перетворилася на прямокутник. Таким чином, π залишається таким же невловимим, як і раніше. Ми можемо виявити все більше й більше його цифр — поточний рекорд становить понад 2,7 трильйона десяткових знаків — але ми ніколи не дізнаємося його повністю!

Згідно з іще одним цікавим міркуванням, яке можна знайти в трактаті «Про вимірювання кола», площа вписаного в квадрат кола відноситься до площі цього квадрата як $\frac{11}{14}$.

Площа кола:

$$S_{\text{кола}} = \pi r^2$$

Площа квадрата:

$$S_{\text{квадрата}} = (2r)^2 = 4r^2$$

Співвідношення, які їх пов'язують:

$$\frac{S_{\text{кола}}}{S_{\text{квадрата}}} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$$

Те, що з'ясував Архімед:

$$\frac{S_{\text{кола}}}{S_{\text{квадрата}}} = \frac{11}{14}$$

Звідси:

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{11}{14} \Rightarrow \pi \approx 3{,}14$$

Квадратура параболи.

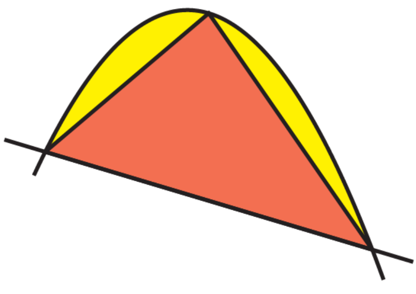


Рис. 30. Параболічна область і найбільший вписаний у неї трикутник.

В іншому трактаті – «Про квадратуру параболи» Архімед знайшов площу, обмежену сегментом параболи й прямою лінією (рис. 30):

«Площа поверхні, обмеженої параболою і прямою, що її перетинає, на 1/3 більша за площу трикутника з основою, рівною відрізку даної прямої, і висотою, рівною параболі».

Спочатку описавши, як знайти найбільший вписаний трикутник (використовуючи обчислення дотичних ліній до параболи), Архімед відзначає, що цей трикутник ділить область, що залишилася, на дві нові параболічні області. І він може заповнити їх найбільшими трикутниками теж!

Ці два трикутники потім ділять область параболи, що залишилася, на чотири нові параболічні області, кожна з яких має свій найбільший трикутник, і так далі (рис. 31).

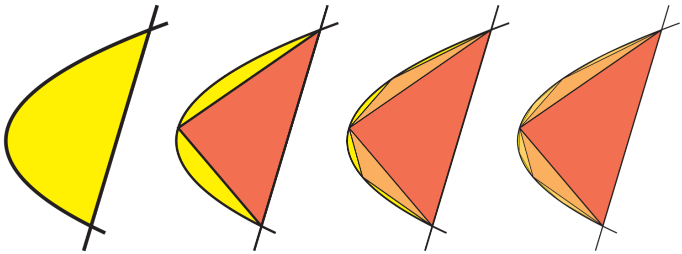


Рис. 31. Нескінченне наближення Архімеда для параболічного сегмента.

Архімед доводить, що в границі, якщо виконати це нескінченну кількість разів, трикутники повністю заповнюють параболічний сегмент, не залишаючи жодної площі. Таким чином, залишається тільки скласти площі цих нескінченно багатьох трикутників. І тут він виявляє цікаву закономірність: загальна площа трикутників на кожному етапі становить $\frac{1}{4}$ загальної площі трикутників на попередньому етапі.

Якщо A_k — площа на k-му етапі, Архімед стверджує, що $A_k = \frac{1}{4}A_{k-1}$. Таким чином

$$A_0, \quad A_1 = \frac{1}{4}A_0, \quad A_2 = \frac{1}{4^2}A_0, \quad A_3 = \frac{1}{4^3}A_0, \quad \ldots$$

І загальна площа є нескінченною сумою

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots = A_0\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right)$$

Тепер Архімеду залишається тільки знайти суму цього ряду. Для нас, сучасних людей, це не проблема: ми одразу впізнаємо в цьому геометричну прогресію

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Але чому вона називається геометричною? Можливо, частково тому, що Архімед був першою людиною, яка знайшла суму такого ряду, зробивши це повністю геометрично. Ігноруючи провідний множник A_0, ми можемо інтерпретувати всі дроби як пропорції площі квадрата. Перший член каже нам взяти чверть квадрата, наступний член каже взяти ще чверть від чверті, і так далі. Повторюючи цей процес нескінченно, Архімед у підсумку отримує фігуру, де виділені квадрати на діагоналі представляють завершену нескінченну суму (рис. 32, 33 і 34).

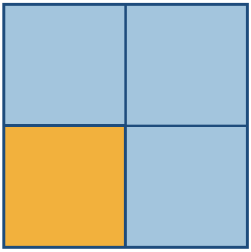


Рис. 32. $A_1 = \frac{1}{4}$.

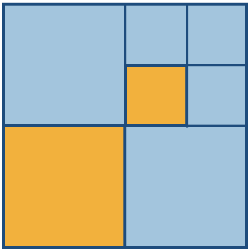


Рис. 33. $A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$.

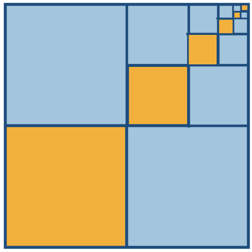


Рис. 34. $A_k = \frac{1}{4} A_{k-1}$.

Потім він відзначає, що це точно одна третина площі квадрата, який їх обмежує, оскільки дві додаткові ідентичні копії цієї послідовності повністю заповнюють його (просто зсуньте наші квадрати вліво або вниз). Таким чином, ця нескінченна сума точно дорівнює $\frac{1}{3}$, і тому загальна площа дорівнює A_0 плюс це, або $A_0 \cdot \frac{4}{3}$ (рис. 35).

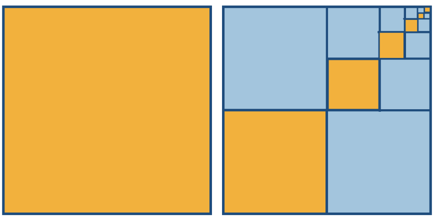


Рис. 35. Площа параболи – сума жовтих областей квадратів.

Відео з майже Архімедівським доведенням сум геометричної прогресії (7 хвилин): https://www.youtube.com/watch?v=JteQEN1XPyc

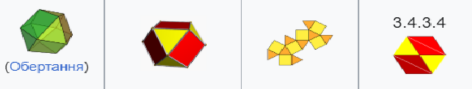
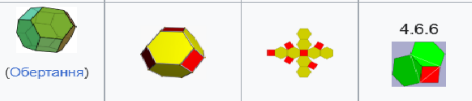
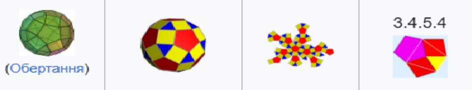
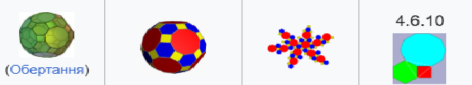
Назва (альтернативна назва)	Шлефлі Коксетер	Прозорий	Непрозорий	Розгортка	Вершинна фігура
Зрізаний тетраедр	{3,3}	 (Обертання)			3.6.6
Кубооктаедр (ромботетраедр)	r{4,3} або rr{3,3} або	 (Обертання)			3.4.3.4
Зрізаний куб	t{4,3}	 (Обертання)			3.8.8
Зрізаний октаедр (зрізаний тетратераедр)	t{3,4} або tr{3,3} або	 (Обертання)			4.6.6
Ромбокубооктаедр (малий ромбокубооктаедр)	rr{4,3}	 (Обертання)			3.4.4.4
Зрізаний кубооктаедр (великий ромбокубооктаедр)	tr{4,3}	 (Обертання)			4.6.8
Кирпатий куб (кирпатий кубоктаедр)	sr{4,3}	 (Обертання)			3.3.3.3.4
Ікосододекаедр	r{5,3}	 (Обертання)			3.5.3.5
Зрізаний додекаедр	t{5,3}	 (Обертання)			3.10.10
Зрізаний ікосаедр	t{3,5}	 (Обертання)			5.6.6
Ромбоікосододекаедр (малий ромбоікосододекаедр)	rr{5,3}	 (Обертання)			3.4.5.4
Ромбозрізаний ікосододекаедр	tr{5,3}	 (Обертання)			4.6.10
Кирпатий додекаедр (кирпатий ікосододекаедр)	sr{5,3}	 (Обертання)			3.3.3.3.5

Рис. 36. Архімедові тіла.

1.7 Тривимірні архімедові тіла та архімедові графи.

Архімедові тіла (рис. 36) – це 13 опуклих багатогранників, які здебільшого виходять з Платонових тіл «зрізанням кутів», тобто мають як грані два або більше типів правильних багатокутників, що примикають до ідентичних вершин. Тут «ідентичні вершини» означають, що для будь-яких двох вершин існує ізометрія всього тіла, яка переводить одну вершину в іншу.

Архімедові тіла названі на честь Архімеда, який обговорював їх у нині втраченій праці. Папп посилається на цю роботу і стверджує, що Архімед перелічив 13 багатогранників. За часів Відродження художники та математики цінували чисті форми і перевідкрили їх усі. Ці дослідження були майже повністю завершені близько 1620 року Іоганном Кеплером, який визначив поняття призм, антипризм і неопуклих тіл, відомих як тіла Кеплера-Пуансо. (Про них і про Платонові тіла-багатогранники ми говорили раніше в «П'яти постулатах геометрії Всесвіту Евкліда»: https://www.doi.org/10.5281/zenodo.17286062)

Подовжений квадратний гіробікупол (псевдоромбокубооктаедр).

Кеплер, можливо, знайшов також *подовжений квадратний гіробікупол* (псевдоромбокубооктаедр) – принаймні, він стверджував, що існує 14 архімедових тіл. Однак його опубліковані переліки включають лише 13 однорідних багатогранників.

Цікаво, що іон полiванадату $[V_{18}O_{42}]^{12-}$ має псевдоромбокубооктаедральну структуру, в якій кожна квадратна грань діє як основа піраміди VO_5 (рис. 37).

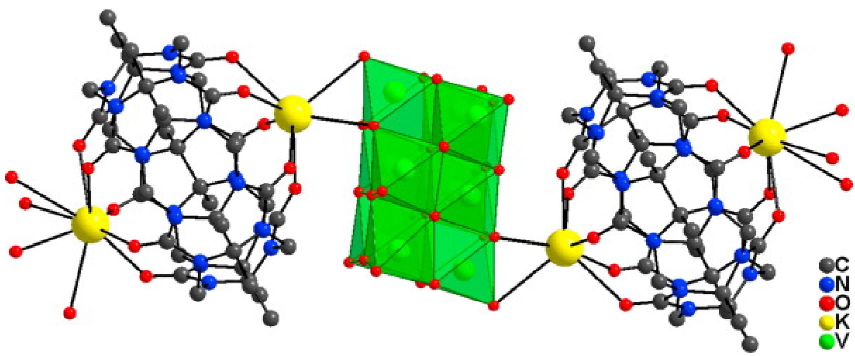


Рис. 37. Молекула поліванадату.

У теорії графів архімедів граф (рис. 38) – це граф, який утворює скелет одного з архімедових тіл. Отже, існує 13 архімедових графів, і всі вони є регулярними, поліедральними (а отже, також 3-вершинно зв'язними планарними) та гамільтоновими (мають шлях, який проходить через кожну вершину даного графа рівно один раз).

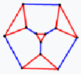
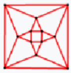
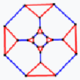
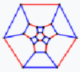
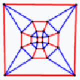
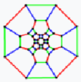
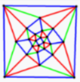
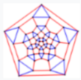
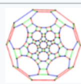
Назва	Граф	Степінь	Ребер	Вершин	Порядок
Граф зрізаного тетраедра		3	18	12	24
Граф кубооктаедра		4	24	12	48
Граф зрізаного куба		3	36	24	48
Граф зрізаного октаедра		3	36	24	48
Граф ромбокубооктаедра		4	48	24	48
Граф зрізаного кубооктаедра (Великий ромбокубооктаедр)		3	72	48	48
Граф кирпатого куба		5	60	24	24
Граф ікосододекаедра		4	60	30	120
Граф зрізаного додекаедра		3	90	60	120
Граф зрізаного ікосаедра		3	90	60	120
Граф ромбоікосододекаедра		4	120	60	120
Граф ромбозрізаного ікосододекаедра		3	180	120	120
Граф кирпатого додекаедра		5	150	60	60

Рис. 38. Архімедові графи.

Перше чітке твердження про існування псевдоромбокубооктаедра було зроблено в 1905 році Дунканом Соммервілем. Ґрунтуючись на існуванні псевдоромбокубооктаедра, Грюнбаум запропонував термінологічну відмінність, в якій архімедове тіло визначається як таке, що має одну й ту саму вершинну фігуру в кожній вершині (включаючи подовжений квадратний гіробікупол), тоді як однорідний багатогранник визначається як тіло, у якого будь-яка вершина симетрична будь-якій іншій (що виключає гіробікупол).

Подовжений квадратний гіробікупол або псевдоромбокубооктаедр (або подовжений чотирисхилий повернутий бікупол) – тіло, яке зазвичай не вважається архімедовим тілом, хоча його грані є правильними багатокутниками і багатокутники навколо кожної вершини ті самі, але, на відміну від 13 архімедових тіл, багатогранник не має глобальної симетрії, яка переводить будь-яку вершину в будь-яку іншу (хоча Грюнбаум пропонував додати багатогранник до традиційного списку архімедових тіл як 14-те тіло).

1.8 Куля, вписана в циліндр, і Делоська задача про подвоєння куба.

Співвідношення об'ємів циліндра та вписаної в нього кулі дорівнює $\frac{3}{2}$. Співвідношення площ поверхні циліндра та вписаної в нього кулі також дорівнює $\frac{3}{2}$:

Це твердження 34 трактату «Про кулю і циліндр», що містить результат, яким найбільше пишався Архімед (рис. 39):

$$\frac{V_{\text{циліндра}}}{V_{\text{кулі}}} = \frac{3}{2}, \quad \frac{S_{\text{циліндра}}}{S_{\text{кулі}}} = \frac{3}{2}$$

Він зміг знайти абсолютно точне співвідношення між об'ємами кулі та циліндра, в який вона вписана. Йдеться про випадок, коли діаметр кулі дорівнює як діаметру основи циліндра, так і його висоті. Об'єм циліндра виходить у півтора рази ($\frac{3}{2}$) більше об'єму кулі. Таке ж співвідношення і у площ їхніх поверхонь. Як ми вже говорили, Архімед навіть заповів висікти зображення кулі, вписаної в циліндр, на своєму надгробному пам'ятнику замість епітафії. У I столітті до н. е. Цицерону, за його словами, вдалося побачити цей надгробок. До нашого часу він, на жаль, не зберігся.

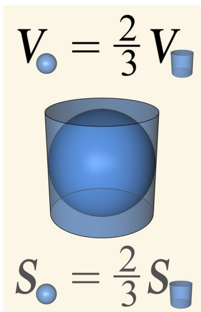


Рис. 39. Куля і циліндр.

На рис. 40 на одній стороні терезів знаходиться прямий круговий циліндр, а на іншій стороні — прямий круговий конус і півсфера.

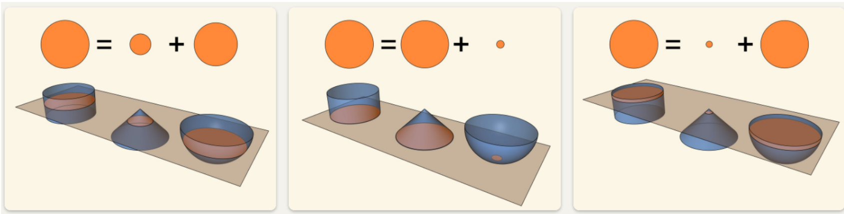


Рис. 40. Урівноваження циліндра, півсфери та конуса.

Справа в тому, що якщо ми проведемо площину, паралельну основам фігур, площа кола, яке утворюється в перерізі циліндра, дорівнює сумі площ кіл, які утворюються в перерізі даного конуса і сфери. Неважко (у наш час!) перевірити прямим обчисленням, що рівність площ буде справедлива для будь-якого положення січної площини.

Делоська задача

У V столітті до н. е. Афіни спустошила епідемія чуми, однією з жертв якої став знаменитий Перікл (495–429 рр. до н. е.), афінський політичний діяч, якому вдалося зібрати в Афінах багато талановитих людей з усіх кінців грецького світу. Тоді група афінян вирішила йти до оракула Аполлона в Дельфах, щоб дізнатися, як можна зупинити чуму. За переказами, отримана відповідь була такою: треба зробити новий кубічний вівтар замість старого так, щоб за об'ємом він був рівно вдвічі більше (рис. 41).

В цій легенді – в одному з двох її варіантів – ставиться знаменита задача подвоєння куба, відома як «Делоська задача»: як побудувати куб об'ємом удвічі більше заданого, використовуючи тільки лінійку і циркуль.

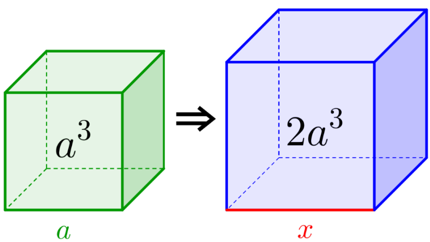


Рис. 41. Подвоєння куба.

З книги Архімеда «Про кулю і циліндр» зрозуміло: він цілком усвідомлював, що для подвоєння куба неможливо йти простим інтуїтивним шляхом – просто подвоїти його ребро. Адже якщо ребро куба $l_1 = a$, його об'єм становитиме $V_1 = a^3$; подвоївши ребро $l_2 = 2a$, ми отримаємо об'єм нового куба $V_2 = (2a)^3 = 8a^3$, а це означає, що $V_2 = 8V_1$. Об'єм куба не подвоївся, а збішився у вісім разів.

Сьогодні ми знаємо, що розв'язати «Делоську задачу» за допомогою виключно лінійки і циркуля неможливо, тому що її розв'язок є ірраціональним числом. Так, щоб подвоїти куб з ребром a, ребро нового куба має дорівнювати

$$l_{\text{нове}} = a\sqrt[3]{2}$$

1.9 Стомахіон, спіралі, арбелос і салінон.

У математиці спіраль — це крива, яка виходить з точки і віддаляється від неї в міру обертання навколо цієї точки. Спіраль є підтипом вихрових візерунків — широкої групи, яка також включає концентричні об'єкти.

Двовимірна, або плоска спіраль може бути легко описана з використанням полярних координат, де радіус r є монотонною неперервною функцією кута φ:

$$r = r(\varphi)$$

Коло можна розглядати як вироджений випадок (функція не є строго монотонною, а радше сталою).

У декартових координатах крива має параметричне представлення:

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi$$

Спіраль Архімеда (рис. 42 і 43) являє собою криву, утворену точкою, яка з постійною швидкістю віддаляється від вершини променя, що обертається з постійною кутовою швидкістю навколо своєї вершини ($r = a\varphi$).

Рис. 42. Виробничий ніж у формі спіралі Архімеда.

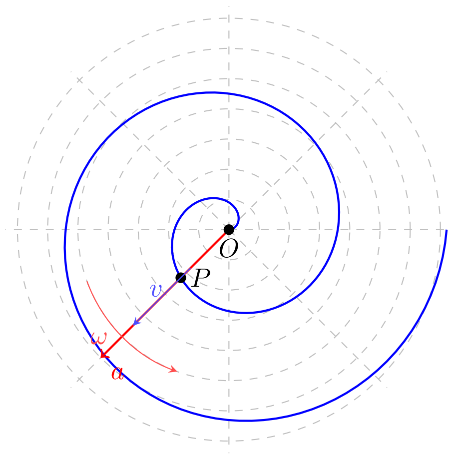


Рис. 43. Спіраль Архімеда.

Крім спіралі Архімеда, деякі з найважливіших типів двовимірних спіралей (рис. 44):

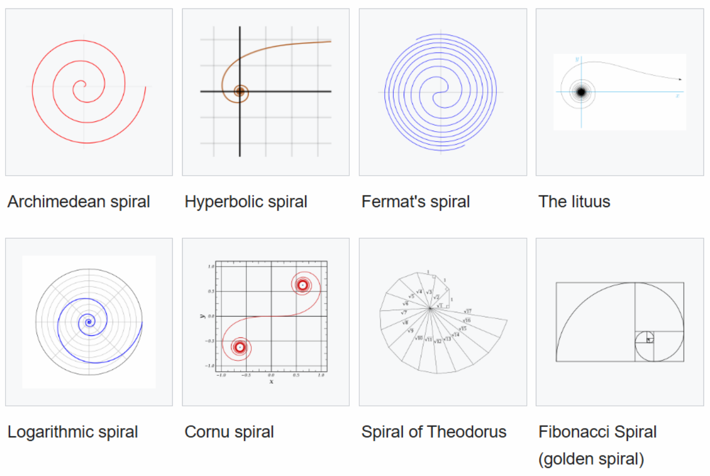


Рис. 44. Види спіралей.

- ***Гіперболічна спіраль:*** $r = \frac{a}{\varphi}$,
- ***Спіраль Ферма:*** $r = a\varphi^{1/2}$,
- ***Літуус:*** $r = a\varphi^{-1/2}$,
- ***Логарифмічна спіраль:*** $r = ae^{k\varphi}$,
- ***Спіраль Корню*** або ***клотоїда:*** параметричне представлення через інтеграли Френеля

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du, \quad y(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du,$$

- ***Спіраль Фібоначчі*** та ***золота спіраль:*** побудовані на основі послідовності Фібоначчі з кутовим кроком $\theta = \frac{2\pi}{\varphi^2} \approx 137{,}5$, де $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотий перетин. Золота спіраль є логарифмічною спіраллю з коефіцієнтом зростання, пов'язаним із золотим перетином: $r = a\varphi^{2\theta/\pi}$,
- ***Спіраль Теодора:*** апроксимація спіралі Архімеда, складена з прилеглих прямокутних трикутників. (Про неї раніше ми згадували в роботі https://www.doi.org/10.5281/zenodo.17100433 – «Піфагор — архітектор числового порядку»).

У трактаті «Про спіралі» Архімед вивчає спіраль, що згодом отримала його ім'я, і розглядає дуже цікаву її властивість:

> *«Поверхня, обмежена спіраллю при першому оберті, становить третину кола, якого вона торкається».*

Вищесказане Архімед доводить методом вичерпування, а також використовує доведення від супротивного, констатуючи, що площа утвореної фігури не може бути ні більшою, ні меншою за третину кола (рис. 45).

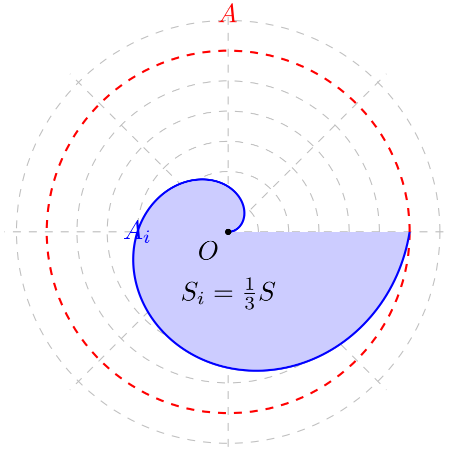


Рис. 45. Площа, обмежена спіраллю після одного повного обороту.

Деякі фахівці стверджують, що глибинною метою, яку Архімед переслідував у своєму трактаті «Про спіралі», було знайти розв'язання задач подвоєння куба, трисекції кута і квадратури кола, хоча при цьому доведеться знехтувати однією з початкових умов: задачу треба було розв'язувати виключно за допомогою циркуля і лінійки, а побудова спіралі потребує кінематичних операцій.

Стомахіон - гра-головоломка.

У давньогрецькій геометрії Стомахіон (Остомахіон), також відомий як *loculus Archimedius* (від латинського «скринька Архімеда») або синтомахіон – математичний трактат, приписуваний Архімеду.

Слово «Остомахіон» походить від грецького *osteon* «кістка» і *mache* «боротьба, битва, змагання».

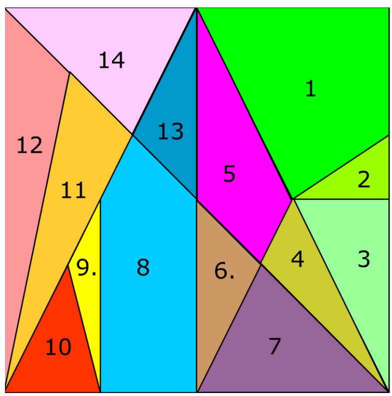


Рис. 46. Один із способів складання стомахіона.

Стомахіон (рис. 46) був головоломкою, схожою на танграм, в яку, можливо, грали кілька осіб фігурками, зробленими з кістки. Достеменно невідомо, що з'явилося раніше –

геометричне дослідження Архімедом цієї фігури чи гра.

Гра являє собою головоломку з 14 частин, що утворюють квадрат. Якщо ми накладемо фігури зі «Стомахіона» на квадрат стороною в 12 клітинок, площа кожної фігури буде такою ж, як на рис. 46.

Одна з форм гри, про яку свідчать класичні тексти, – це створення різних об'єктів, тварин, рослин шляхом перестановки частин: слон, дерево, собака, що гавкає, корабель, меч, вежа тощо (рис. 47). Інше припущення полягає в тому, що за допомогою неї тренували та розвивали навички пам'яті у молодих людей.

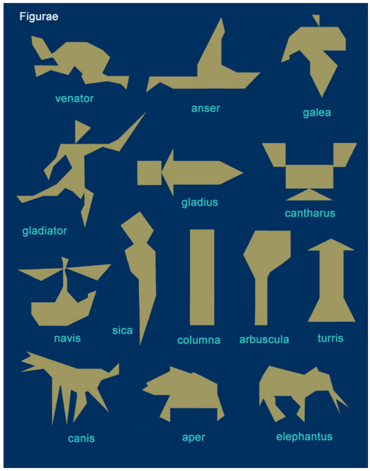


Рис. 47. Фігури стомахіона.

Джеймс Гоу у своїй «Короткій історії грецької математики» (1884) у виносках зазначає, що метою було скласти частини назад у коробку, і цю точку зору також висловлював У. У. Раус Болл у деяких проміжних виданнях «Математичних есе і розваг».

Лише в 2003 році вдалося провести строгий комбінаторний аналіз, який показав, що існує 17 152 способи скласти фігури зі «Стомахіона» в цілий квадрат (без повороту або дзеркального відображення).

Однак цей підрахунок був поставлений під сумнів, оскільки збережені зображення головоломки показують її в прямокутнику, а не в квадраті, і повороти або відображення частин могли бути недозволеними.

Арбелос (чоботарський ніж).

У «Книзі лем» представлена геометрична фігура *арбелос*, що грецькою означає «чоботарський ніж», оскільки за формою вона нагадує цей інструмент. Арбелос – фігура, обмежена трьома дотичними одна до одної половинами кіл. На рис. 48 арбелос відповідає затемненій частині.

У цієї фігури є деякі цікаві властивості, які можна було б включити в початковий курс геометрії.

Можливо, найцікавіша з них — це так звані «спарені кола Архімеда» (або «кола-близнюки»): з точки C добудовується перпендикуляр до прямої AB до перетину з колом найбільшого діаметра. Даний перпендикуляр ділить арбелос на дві фігури. Потім в кожну з цих отриманих фігур вписують кола C_1 і C_2 так, щоб вони торкалися з різних боків перпендикуляра, і кожне з них торкалося великого та малого кола.

Цікаво, що площі цих кіл будуть рівні незалежно від місцезнаходження точки C, через що їх і називають *колами-близнюками Архімеда*. Існують також інші кола, пов'язані з арбелосом, вони теж носять особисті назви — коло Аполлонія, коло Паппа і коло Банкофа.

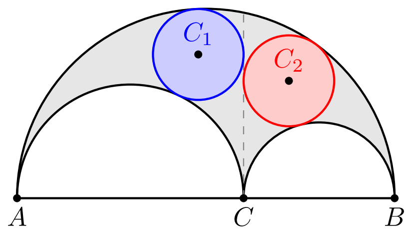


Рис. 48. Арбелос з «колами-близнюками» Архімеда (C_1 і C_2).

Салінон (сільничка).

Ще одна фігура, представлена в «Книзі лем», називається *салінон*, що, згідно з інтерпретацією історика математики Томаса Хіта, означає «сільничка».

На рис. 49 нижче A, D, O, E і B – п'ять точок, що лежать на одній прямій, таких, що $AO = OB$ і $AD = EB$. В одній півплощині побудовані півкола з діаметрами AB, AD і EB. В іншій півплощині побудоване півколо з діаметром DE. Фігура, обмежена цими півколами, і є салінон.

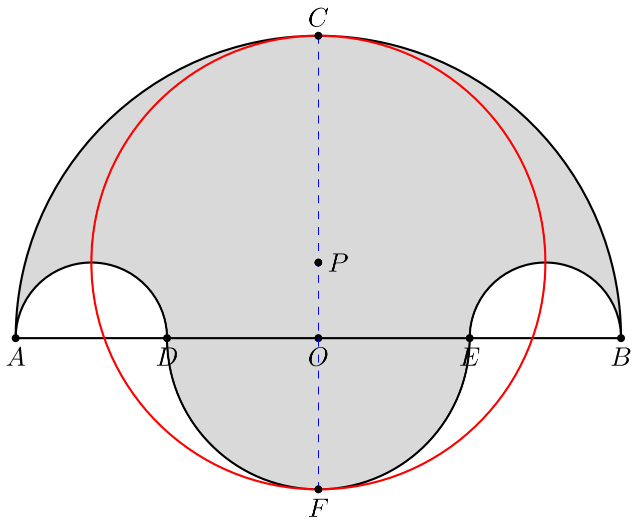


Рис. 49. Салінон і коло рівної йому площі (показане червоним).

1.10 Задача Архімеда про биків.

На розв'язання якої математичної задачі в історії пішло найбільше часу, понад 2000 років? Це задача Архімеда про биків — трактат 287–212 рр. до н. е., у якому античний учений поставив математичну задачу, повне розв'язання якої було знайдено лише в 1965 році!

«Задачу про биків» виявив Готхольд Ефраїм Лессінг у грецькому рукописі, що складається з вірша у 44 рядки, текст задачі було опубліковано у Брауншвейзі в 1773 році. Авторство Архімеда в знавців античності не викликає сумнівів, оскільки і за стилем, і за характером трактат відповідає математичним епіграмам тієї епохи. Задача про биків авторства Архімеда згадується в одному з античних схоліїв (коментарів) до діалогу Платона «Хармід, або Про розсудливість». У давньогрецькій міфології бики Геліоса (рис. 50), також звані волами Сонця, — це бики, що випасалися на острові Тринакія (вважається сучасною Сицилією).

Рис. 50. Супутники Одіссея викрадають биків Геліоса (фреска Пеллегріно Тібальді, 1554/56).

Архімед пропонує читачеві знайти кількість худоби бога Сонця Геліоса за таких умов:

- у Геліоса було чотири стада, кожне з яких відрізнялося за кольором;
- кількість білих биків дорівнювала $= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$ темних + рудим бикам;
- темних биків $= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$ строкатих + рудим бикам;
- строкатих биків $= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)$ білих + рудим бикам;
- білих корів $= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$ темного стада;
- темних корів $= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$ строкатого стада;
- строкатих корів $= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$ рудого стада;
- рудих корів $= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)$ білого стада.

Після цього Архімед пропонує знайти кількість биків і корів різного кольору, вказуючи, що той, у кого це вийде, не є невігласом.

Друга частина задачі включає додаткові умови:

- кількість білих і темних биків — квадратне число;

- кількість строкатих і рудих биків — трикутне число.

Той, хто зможе за цих умов визначити число голів худоби в стадах Геліоса, на думку Архімеда, є мудрецем.

Розв'язання першої частини задачі зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Якщо позначити кількість биків відповідного кольору символами Б, Т, С і Р, а корів — б, т, с і р, то перші рівняння можна відобразити таким чином:

- $\text{Б} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\text{Т} + \text{Р} \to 6\text{Б} = 5\text{Т} + 6\text{Р}$;
- $\text{Т} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\text{С} + \text{Р} \to 20\text{Т} = 9\text{С} + 20\text{Р}$;
- $\text{С} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)\text{Б} + \text{Р} \to 42\text{С} = 13\text{Б} + 42\text{Р}$.

Послідовно розв'язуючи всі сім рівнянь, отримаємо такі значення (на рис. 51 показано найменше можливе розв'язання задачі, кожна окрема іконка представляє собою близько 10^{206543} тварин):

Б — 10 366 482

Т — 7 460 514

С — 7 358 060

Р — 4 149 387

б — 7 206 360

т — 4 893 246

с — 3 515 820

р — 5 439 213

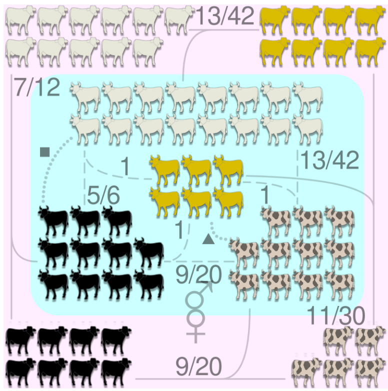


Рис. 51. Розв'язання задачі Архімеда про биків.

Таким чином, загальна кількість голів худоби у Геліоса становила 50 389 082. Друга частина задачі, тобто пошук розв'язання, яке задовольняло б умовам першої і другої частини, зводиться до рівняння Пелля (діофантове рівняння виду $x^2 - ny^2 = 1$, де n — натуральне число, що не є квадратом). Її розв'язання було опубліковано в 1880 році. Загальна кількість биків приблизно дорівнює $7{,}76 \times 10^{206\,544}$. Щоб записати всі 206 545 цифр, необхідно 660 сторінок по 2500 знаків на кожній!

І, наостанок, цікаве відео: Як обдурити, використовуючи наочні докази (18 хвилин): https://www.youtube.com/watch?v=unJxBIsM6iA