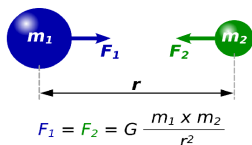


Британський батько математичного аналізу: біном Ньютона, гравітаційна взаємодія і дисперсія світла.



*Витвір
мистецтва*

Митець

Помічник

*Фізику Ісааку Ньютону
впало на голову яблуко,
і він сформулював закон
всесвітнього тяжіння.
Сантехніку Василю впав
на голову розвідний ключ,
і те, що він сформулював,
поки що вітчизняні філологи
розрахувати не можуть...*

У раю Архімед, Паскаль та Ньютон грають у хованки. Архімед водить і починає рахувати. Паскаль тікає за обрій, а Ньютон озирається, бере палицю, малює навколо себе квадрат зі стороною 1 метр і стає всередину квадрата. Архімед закінчує рахувати, розплющує очі і бачить Ньютона:

– Я бачу Ньютона!

– Е, ні! Ньютон на квадратний метр – це Паскаль! – відповів той.

1.1 Проникливий погляд у глибини знань: спираючись на роботи титанів.

“Якщо я бачив далі за інших, то лише тому, що стояв на плечах гігантів” – так сказав Ісаак Ньютон – найвидатніший математик, фізик та астроном, чиї відкриття визначили розвиток науки на століття вперед. Ісаак Ньютон народився 25 грудня 1642 року в селі Вулсторп, графство Лінкольншир, Англія. Він став одним із найвидатніших учених в історії людства, заклавши основи класичної механіки, оптики та математичного аналізу.



Рис. 1. Сер Ісаак Ньютон (1642–1727)

У своїй головній праці “Математичні начала натуральної філософії” (*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, 1687) він оприлюднив закони руху та закон всесвітнього тяжіння, що сформували наукову точку зору аж до появи загальної теорії відносності.

Ньютон використав свій математичний опис гравітації для строгого виведення емпіричних кеплерівських законів руху планет, а також для побудови наукової теорії припливів, прецесії рівнодення та інших явищ. Праця Ньютонa усунула будь-які сумніви в геліоцентричності Сонячної системи та продемонструвала, що рух об'єктів на Землі та небесних тіл можна пояснити одними й тими самими фізичними принципами. Висновок Ньютонa

про те, що Земля є сплюснутим сфероїдом, згодом був підтверджений геодезичними вимірюваннями, що переконали більшість європейських учених у перевазі ньютонівської механіки над ранішими системами.

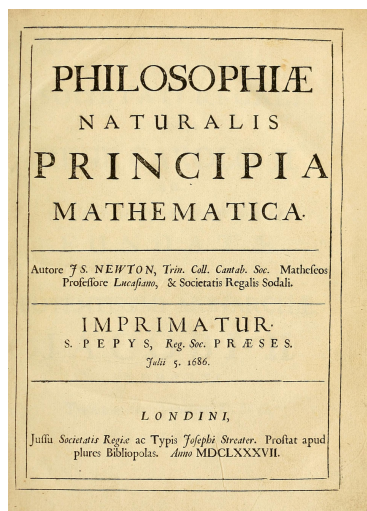


Рис. 2. Титульна сторінка «Начал» Ньютонa.

Ньютон побудував перший практичний телескоп-рефлектор і розробив теорію кольору, засновану на спостереженні, що призма розділяє біле світло на кольори видимого спектра, тим самим заклавши основи сучасної фізичної оптики. Його праці про світло були зібрані в книзі «Оптика», опублікованій у 1704 році.

У математиці Ньютон розробив диференціальне та інтегральне числення, потужний обчислювальний метод знаходження коренів, класифікував більшість кубічних алгебраїчних кривих, просунув теорію степеневих рядів, узагальнив біноміальну теорему на нецілі показники.

Останні три десятиліття свого життя в Лондоні, служачи наглядачем (1696–1699), а потім керуючим (1699–1727) Королівського монетного двору, Ньютон суттєво покращив монетну систему Англії.



Рис. 3. Телескоп Ньютона.

1.2 Метод флюксій і флюент: основні поняття та пряма, пряма й обернена задача.

Ньютон розробив свій метод числення в 1665–1666 роках, під час “дивовижних років” (*anni mirabiles*), коли він переховувався від чуми у Вулсторпі. Центральними поняттями його підходу стали флюксії та флюенти.

Флюента (*fluent*) – змінна величина, що змінюється в часі. Позначається літерами x , y , z .

Флюксія (*fluxion*) – швидкість зміни флюенти. Позначається $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

У сучасних позначеннях флюксія відповідає похідній за часом:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

Ньютон сформулював пряму й обернену задачі:

- За даною залежністю між флюентами знайти співвідношення між їхніми флюксіями.
- І навпаки, за даним співвідношенням між флюксіями знайти залежність між флюентами.

Для флюент x і y Ньютон вивів основні правила для обчислення флюксій:

1. Флюксія суми: $x \dot{+} y = \dot{x} + \dot{y}$
2. Флюксія добутку: $x \dot{y} = \dot{x}y + x\dot{y}$
3. Флюксія частки: $\left(\frac{\dot{u}}{\dot{v}}\right) = \frac{u\dot{v}-v\dot{u}}{v^2}$

Також він увів поняття флюксій другого та вищих порядків:

$$\ddot{x} = \text{флюксія другого порядку} \quad (2)$$

$$\ddot{\dot{x}} = \text{флюксія третього порядку} \quad (3)$$

У сучасних позначеннях:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \ddot{\dot{x}} = \frac{d^3x}{dt^3} \quad (4)$$

Обернена задача – знаходження флюенти за заданою флюксією – привела Ньютона до методу квадратур (інтегрування).

Якщо $\dot{y} = f(x)\dot{x}$, то флюента y знаходиться операцією квадратури:

$$y = \int f(x) dx \quad (5)$$

Знайти флюенту, якщо $\dot{y} = x^2\dot{x}$.

Квадратура дає:

$$y = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \quad (6)$$

На рис. 4 показано формулу Ньютона-Лейбніца, а нижче посилання на анімацію з її візуалізацією: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2f/Fundamental_theorem_of_calculus_%28animation%29.gif

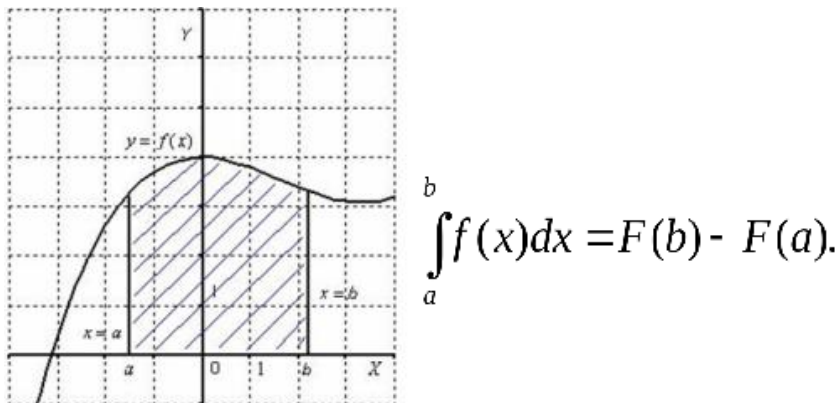


Рис. 4. Площа криволінійної трапеції.

Ньютон склав таблицю основних квадратур:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad (8)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (9)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \quad (11)$$

1.3 Революційний біном Ньютона й узагальнення біноміальної теореми.

Біноміальна формула для цілих додатних показників була відома математикам задовго до Ньютона. Ще в XI столітті перський поет і вчений Омар Хайям досліджував біноміальні коефіцієнти, а в Європі Блез Паскаль у 1654 році систематизував ці знання у вигляді свого знаменитого трикутника (рис. 5).

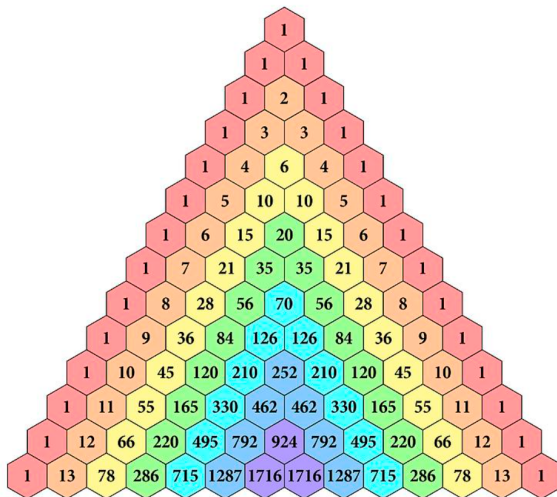


Рис. 5. Трикутник біноміальних коефіцієнтів.

Класична біноміальна теорема для натуральних показників стверджує, що $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$, де біноміальні коефіцієнти $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ утво-

рюють рядки цього трикутника. Для цілого n цей розклад є скінченною сумою з $n + 1$ доданків, а біноміальні коефіцієнти задовольняють співвідношенню $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. На рис. 6 – візуалізація біному для перших цілих показників.

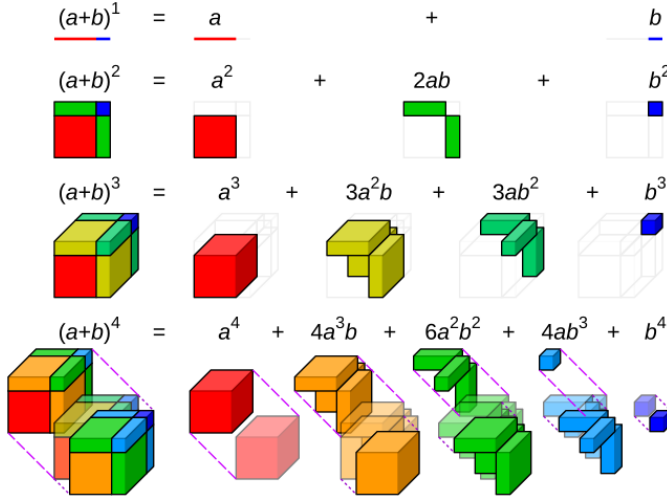


Рис. 6. Візуалізація біному Ньютона.

Ньютон у молоді роки добре знав цю теорему і активно використовував її у своїх дослідженнях, але його геній полягав не в переосмисленні відомого, а в сміливому кроці за межі – узагальненні формули на випадок нецілих і навіть від’ємних показників.

Для будь-якого дійсного числа α і $|x| < 1$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (12)$$

Або в загальному вигляді:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (13)$$

де узагальнений біноміальний коефіцієнт:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} \quad (14)$$

При $\alpha = -1$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \quad (15)$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \dots \quad (16)$$

При $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} - \dots \quad (17)$$

Біноміальна теорема дозволила Ньютону обчислювати корені, логарифми та трансцендентні функції. Наприклад, обчислення $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+1} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \dots \approx 1.414 \quad (18)$$

Обчислення π через площу чверті одиничного кола (рис. 7):

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} \text{ а також } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \quad (19)$$

Застосовуючи біноміальне розкладання $(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \dots$ та інтегруючи почленно, отримуємо:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (20)$$

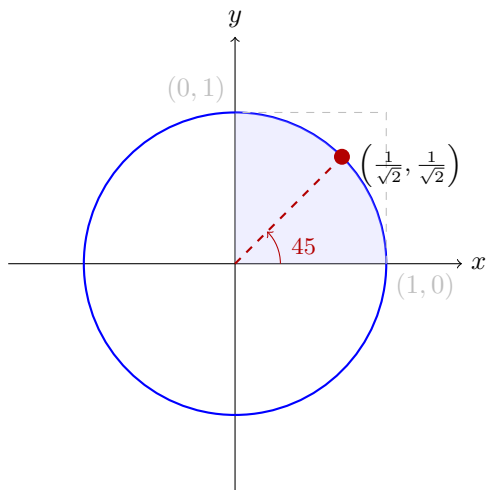


Рис. 7. Креслення для обчислення $\pi/4$.

1.4 Обчислення числа π з неймовірною точністю.

Майже таким, але дещо модифікованим способом Ісаак Ньютон у 1666 році (у віці 24 років) обчислив значення π з точністю до 16 десяткових знаків вручну, використовуючи комбінацію геометрії, інтегрального числення та біноміального розкладу в ряд. Це було революційним, бо попередні методи (наприклад, Архімеда з вписаними/описаними багатокутниками) давали лише кілька знаків. Ньютон описав свій метод у трактаті *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (1669).

Серія сходилася повільно в простих формулах, тому він використав хитру геометричну конструкцію для прискорення. Побудувавши півколо радіуса $1/2$ з центром у точці $(1/2, 0)$, Ньютон від точки $(1/4, 0)$ провів вертикальну лінію, яка перетнула коло в точці $B(1/4, \sqrt{3}/4)$, що утворило трикутник ABC типу 30–60–90.

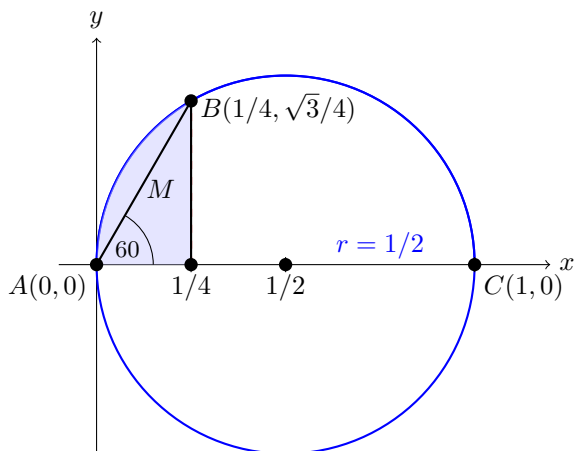


Рис. 8. Геометрична конструкція Ньютона для обчислення π .

Звідси випливає рівняння:

$$\frac{\pi}{24} = M + \frac{\sqrt{3}}{32} \quad (21)$$

де M – площа перехресної області під півколом від $x = 0$ до $x = 1/4$ (затінена область). Розв'язуючи щодо π :

$$\pi = 24M + \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (22)$$

Тут $\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,299038105676658$ – точне значення, яке легко обчислити.

Площа M – це інтеграл:

$$M = \int_0^{1/4} \sqrt{x(1-x)} dx = \int_0^{1/4} \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} dx \quad (23)$$

Ньютон розклав $\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2}$ у біноміальний ряд (за теоремою бінома Ньютона для нецілих показників):

$$(1-x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k x^k \quad (24)$$

де біноміальний коефіцієнт:

$$\binom{1/2}{k} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k!} \quad (25)$$

Для перших значень: $k = 0$: 1; $k = 1$: $1/2$; $k = 2$: $-1/8$; $k = 3$: $1/16$ тощо.

Тоді:

$$\sqrt{x(1-x)} = x^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k x^{k+1/2} \quad (26)$$

Інтегруємо почленно від 0 до $a = 1/4$:

$$M = \sum_{k=0}^N \binom{1/2}{k} (-1)^k \cdot \frac{a^{k+3/2}}{k+3/2} \quad (27)$$

Межа інтегрування $a = 0,25$ маленька, тому цей ряд сходиться значно швидше ніж інтеграл від 0 до 1 (рис. 9).

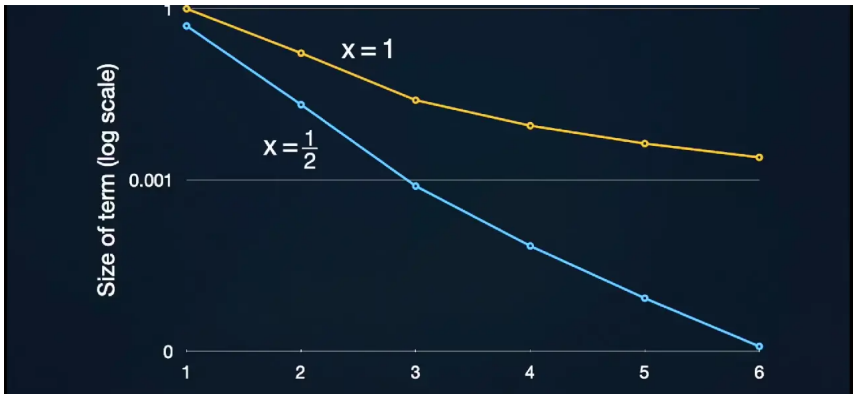


Рис. 9. Порівняння швидкості двох рядів (логарифмічна шкала.)

Ньютон взяв 22 перших членів ряду і обчислив їх дробами з великими чисельниками/знаменниками (наприклад, 20-й член ряду мав чисельник 119 409 675). Він виконував довге ділення для десяткових знаків.

$$M \approx 0,07677310616304730393 \quad (28)$$

$$24M \approx 1,842514548513035 \quad (29)$$

$$\pi \approx 1,842514548513035 + 1,299038105676658 \approx 3,141592653589793 \quad (30)$$

Розраховане наближення (16 точних знаків, помилка лише в 17-му):

$$\pi \approx 3,141592653589793238462643383279 \quad (31)$$

У табл. 1 показано як виглядало це обчислення з 22 членами ряду (Ньютон робив це олівцем вручну!).

Табл. 1. Обчислення інтеграла M методом Ньютона.

k	Біном. коеф. $\binom{1/2}{k}$	Член ряду	Часткова сума M
0	1,0	0,083333333	0,083333333
1	0,5	-0,006250000	0,077083333
2	-0,125	-0,000279018	0,076804315
3	0,0625	-0,000027127	0,076777189
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
21	$\approx 0,002985$	$\approx -3,77 \times 10^{-18}$	0,076773106

Повна сума:

$$M \approx 0,0767731061630473039309439885878 \quad (32)$$

Тоді:

$$\pi \approx 24 \times 0,0767731061630473 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 3,14159265358979326448824048224$$

(справжнє значення: 3,14159265358979323846264338328).

Таким чином, біноміальний ряд дозволив розкласти складну функцію $\sqrt{1-x}$ в нескінченну суму, яку можна інтегрувати почленно. Мала межа інтегрування (1/4) прискорила сходимість: члени ряду швидко ставали мізерними (після 10-го – менш ніж 10^{-9}). У розрахунках π Ньютон поєднав геометрію (для $\sqrt{3}$) з аналізом, що стало основою для сучасних методів обчислення π (наприклад, у комп'ютерних алгоритмах).

У підсумку, це продемонструвало силу узагальненого біноміального ряду для нецілих показників – одне з найважливіших математичних відкриттів Ньютона.

Суперцікаве відео (майже 18 хвилин): Відкриття, яке змінило обчислення π : <https://www.youtube.com/watch?v=rVWmGYdLFOw>

1.5 Чисельні методи та класифікація кривих третього порядку.

У книзі “Method of Fluxions” (рис. 10 і 11) Ньютон писав: таким чином, щоб знайти корінь y рівняння

$$y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0,$$

я позначаю паралелограми, що належать до членів цього рівняння позначкою *, як ви бачите тут зроблено. Потім я застосовую лінійку DE до нижнього з паралелограмів, позначених у лівій колонці, і змушую її повертатися навколо до правої сторони від нижнього до верхнього, доки вона не почне таким чином торкатися іншого, можливо, більше ніж одного з позначених паралелограмів; і я бачу, що місця, так торкнуті, належать до членів $y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3$, ніби рівних нулю. (і крім того, якщо завгодно, зведене до $v^6 - 7v^2 + 6 = 0$, шляхом взяття $y = \sqrt{ax}$, я шукаю значення y і знаходжу його чотириразовим, $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$ та $-\sqrt{2ax}$, з яких я можу взяти будь-яке для початкового члена частки, залежно від того, який корінь даного рівняння мені необхідно знайти.)

B	x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4
	x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4
	x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4
	x	xy	xy^2	xy^3	xy^4
A	1	y	y^2	y^3	y^4
					C

Рис. 10. Позначення одночленів многочлена.

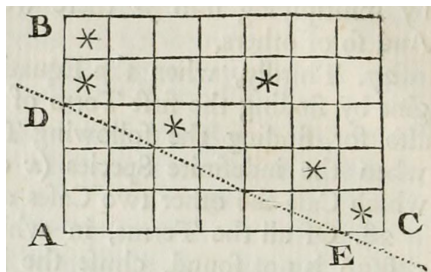


Рис. 11. Знаходження коренів.

Ньютон розробив ітераційний метод для чисельного розв’язання алгебраїчних та трансцендентних рівнянь.

Для розв’язання рівняння $f(x) = 0$ будується ітераційна послідовність:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (33)$$

При вдалому виборі початкового наближення x_0 послідовність збігається до кореня рівняння.

Знайти $\sqrt{2}$ як корінь рівняння $f(x) = x^2 - 2 = 0$.

Маємо $f'(x) = 2x$, тому:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \quad (34)$$

Починаючи з $x_0 = 1$:

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 + 2) = 1.5 \quad (35)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(1.5 + \frac{2}{1.5}\right) = 1.41667 \quad (36)$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(1.41667 + \frac{2}{1.41667}\right) = 1.41422 \quad (37)$$

Точне значення: $\sqrt{2} \approx 1.41421$

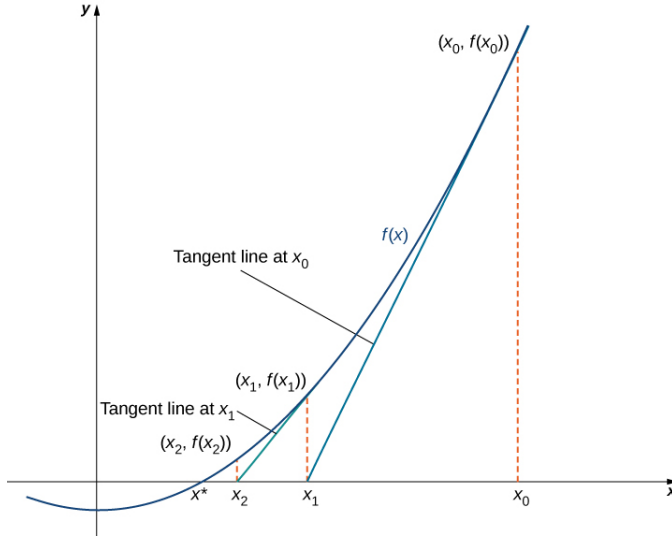


Рис. 12. Метод дотичних (метод Ньютона)

Метод Ньютона (рис. 12) має квадратичну збіжність:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2 \quad (38)$$

де x^* – точний розв’язок, C – константа.

Це означає, що кількість вірних десяткових знаків подвоюється на кожній ітерації.

Коли похідна важко обчислюється, використовується наближення:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (39)$$

Для системи рівнянь $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - J^{-1}(\vec{x}_n) \vec{F}(\vec{x}_n) \quad (40)$$

де J – матриця Якобі.

Класифікація кривих третього порядку.

У праці “Перелік ліній третього порядку” (Enumeratio Linearum Tertii Ordinis, 1704) Ньютон класифікував кубічні криві.

Кубічна крива – це алгебраїчна крива третього степеня, що задається рівнянням:

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + ky + l = 0 \quad (41)$$

Ньютон виділив 72 різних типи кубічних кривих (пізніше було уточнено до 78), деякі з них на рис. 13 нижче.

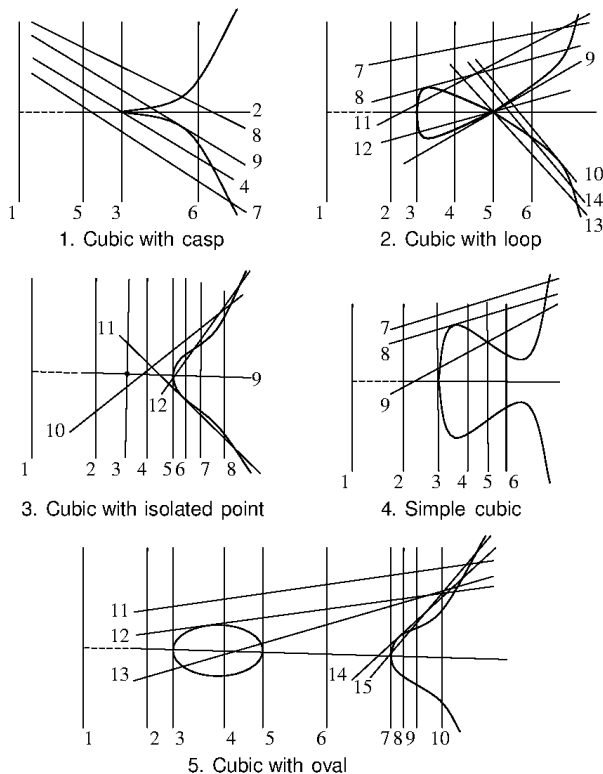


Рис. 13. Класифікація кубічних кривих.

1.6 Дисперсія світла, теорія кольорів і кільця Ньютона.

Ньютон експериментально відкрив дисперсію і математично описав заломлення світла. Закон заломлення Снелліуса стверджує, що при переході світла із середовища з показником заломлення n_1 в середовище з показником n_2 :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (42)$$

Ньютон показав, що показник заломлення залежить від довжини хвилі:

$$n = f(\lambda) \quad (43)$$

Теорія кольорів.

Ньютон розклав біле світло на спектр і показав, що показник заломлення для різних кольорів різний (рис. 14):

$$n_{\text{червон}} < n_{\text{помаранч}} < n_{\text{жовт}} < n_{\text{зелен}} < n_{\text{блакит}} < n_{\text{син}} < n_{\text{фіолет}} \quad (44)$$



Рис. 14. Дисперсія світла.

Кільця Ньютона.

Ньютон досліджував інтерференційні кільця, що виникають між плоскою скляною пластинкою та плосковипуклою лінзою. При падінні пучка монохроматичного світла перпендикулярно до плоскої поверхні, світлові хвилі, відбиті від кожної поверхні, інтерферують між собою. Утворена інтерференційна картина складається з темної плями в місці дотику та концентричних кілець, що чергуються: світлі та темні (рис. 15).



Рис. 15. Кільця Ньютона.

На рис. 16 показано систему лінз для дослідження формування кілець Ньютона у відбитому світлі (ліворуч) та у світлі, що проходить (праворуч).

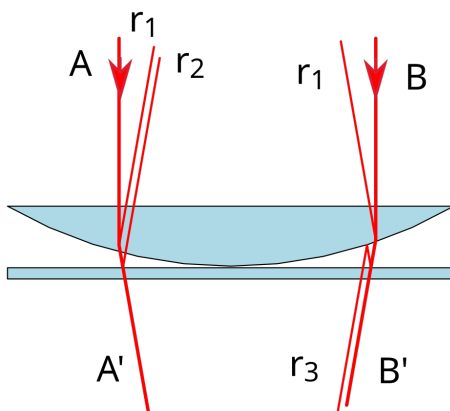


Рис. 16. Система лінз для дослідження кілець Ньютона.

На рис. 17 показано формування темних і світлих інтерференційних смуг у клиноподібній повітряній щілині між двома скляними пластинами. Відстань між поверхнями та довжина світлової хвилі для наочності значно перебільшені.

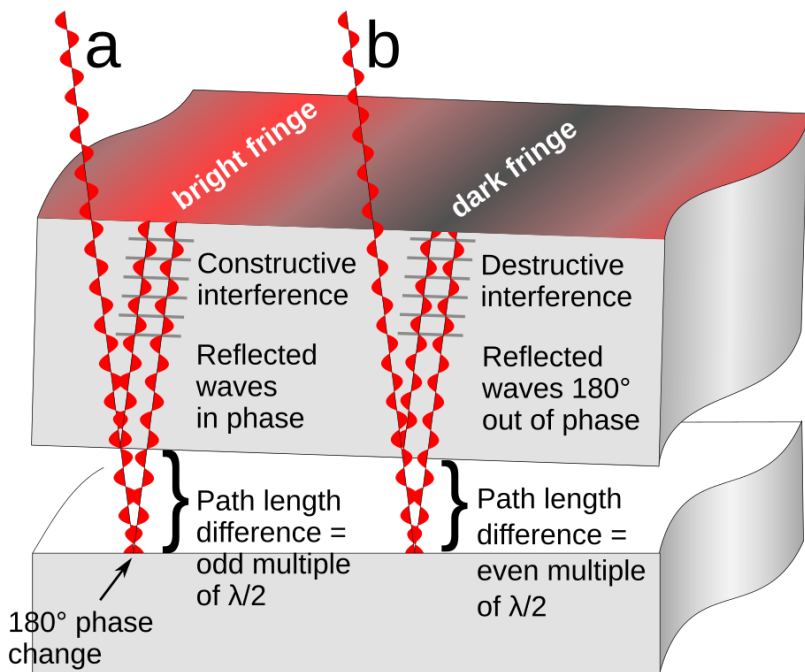


Рис. 17. Формування кілець Ньютона.

Радіус m -го темного кільця:

$$r_m = \sqrt{m\lambda R} \quad (45)$$

де λ – довжина хвилі світла, R – радіус кривизни лінзи, $m = 0, 1, 2, \dots$

Радіус m -го світлого кільця:

$$r_m = \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda R} \quad (46)$$

Корпускулярна теорія світла.

Ньютон запропонував корпускулярну модель світла, де світло являє собою потік частинок (корпускул).

Швидкість світла в середовищі з показником заломлення n :

$$v = \frac{c}{n} \quad (47)$$

1.7 Задача про брахістохрону і циклоїда як її розв'язок.

У червні 1696 року швейцарський математик Йоганн Бернуллі опублікував виклик математикам Європи: знайти криву найшвидшого спуску і дав рік на розв'язання. Ісаак Ньютон, отримавши задачу ввечері після важкого робочого дня на Королівському монетному дворі, розв'язав її за одну ніч і надіслав анонімне рішення. Бернуллі, побачивши елегантність розв'язку, вигукнув: «*Ex ungue leonem!*» (За кігтем пізнають лева!) – він одразу впізнав характерний стиль Ньютона.

Цікаве відео (майже 19 хвилин): Брахістохрона зі Стівеном Строгатцем: <https://www.youtube.com/watch?v=qEEZjzk50K4>

Постановка задачі:

Знайти криву в вертикальній площині, по якій матеріальна точка, рухаючись без тертя під дією сили тяжіння, спускається з точки A в точку B (що знаходиться нижче і горизонтально зміщена від A) за **найменший час**.

Етимологія: від грецького $\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$ (brachistos) – найкоротший, $\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$ (chronos) – час.

Парадокс: Найкоротший шлях (пряма лінія) **НЕ** є найшвидшим!

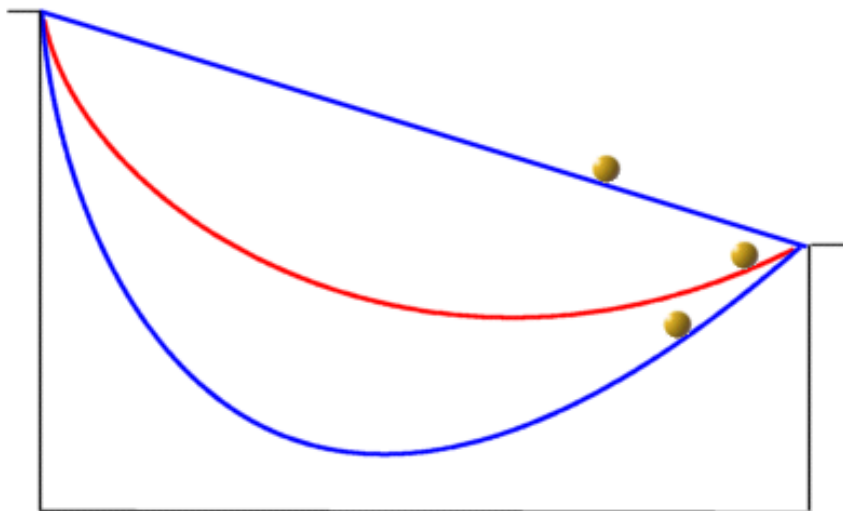


Рис. 18. Задача про брахістохрону: порівняння різних траєкторій.

Парадокс: Найкоротша відстань між A і B – пряма лінія, але **найшвидший шлях** – це **циклоїда**, яка довша за пряму!

Математична причина:

$$\text{Час} = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{ds}{\sqrt{2gy}} \quad (48)$$

Для мінімізації часу потрібен компроміс:

- Мала довжина шляху ds (пряма лінія)
- Велика швидкість $v = \sqrt{2gy}$ (крутий спуск)

Циклоїда – оптимальний баланс!

Циклоїда – розв’язок задачі про брахістохрону.

Крива найшвидшого спуску – це **циклоїда** – траєкторія точки на колі радіуса a , яке котиться по горизонтальній прямій (рис. 19).

Параметричні рівняння циклоїди:

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (49)$$

де a – радіус кола, що котиться, $\theta \in [0, 2\pi]$ – кут повороту кола.



Рис. 19. Циклоїда: точка на колі, що котиться по прямій.

Мінімальний час спуску від найвищої до найнижчої точки циклоїди:

$$T_{\min} = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \quad (50)$$

де:

- a – параметр циклоїди (радіус кола, що котиться)
- $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння
- $\pi \approx 3,14159$ – число пі

Нехай $a = 1$ м, $g = 10$ м/с² (наближено).

Час спуску по циклоїді:

$$T_{\text{цикл}} = \pi \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\pi}{\sqrt{10}} \approx 0,99 \text{ с} \quad (51)$$

Для порівняння, час спуску по прямій лінії між точками (табл. 2):

$$T_{\text{пряма}} \approx 1,08 \text{ с} \quad (52)$$

Циклоїда швидша на $\approx 9\%$!

Таутохронна властивість.

Дивовижне відкриття Христіана Гюйгенса (1659): циклоїда має ще одну чудову властивість – вона **таутохронна** (ізохронна), тобто час спуску по перевернутій циклоїді **не залежить** від того, з якої точки кривої починається рух!

Усі тіла досягають найнижчої точки одночасно (рис. 20)!

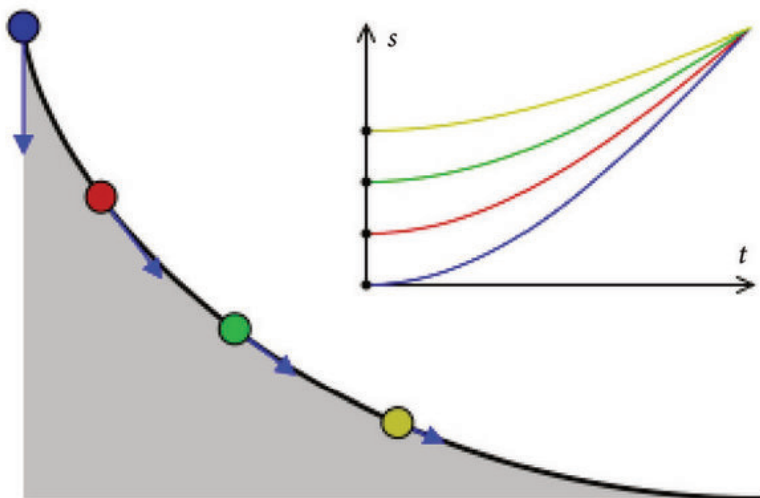


Рис. 20. Таутохронна властивість циклоїди.

Застосування: Гюйгенс використав цю властивість для створення високоточних маятникових годинників з циклоїдальними щочками.

Табл. 2. Час спуску по різних кривих між двома точками
(для $a = 1$ м, $g = 10$ м/с²).

Тип кривої	T (с)	Відносно	Приклад
Циклоїда (оптимум)	0,99	1,00	Розв’язок Ньютона
Пряма лінія	1,08	1,09	Інтуїтивний вибір
Дуга кола	1,12	1,13	Симетрична крива
Парабола	1,05	1,06	Наближення
Ланцюгова лінія	1,15	1,16	Форма підвісного ланцюга

Висновок: Циклоїда дає вигравш у часі $\approx 9\text{--}16\%$ порівняно з іншими кривими!

Задача про брахістохрону була:

- **Першою класичною задачею варіаційного числення** – нової галузі математики,
- **Стимулом для розвитку** рівняння Ейлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (53)$$

- **Демонстрацією сили** нового математичного аналізу та прикладом зв’язку фізики, геометрії та аналізу.

1.8 Правило знаків Декарта-Ньютона.

У 1637 році Рене Декарт у своїй праці «*La Géométrie*» сформулював правило для оцінки кількості додатних коренів многочлена за змінами знаків його коефіцієнтів. Ісаак Ньютон у 1707 році в «*Arithmetica Universalis*» суттєво розвинув це правило, додавши важливе уточнення про парність різниці.

Для многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ з дійсними коефіцієнтами:

1. **Кількість додатних коренів** не перевищує кількості змін знаків у послідовності коефіцієнтів $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$.
2. **Уточнення Ньютона:** Різниця між кількістю змін знаків і кількістю додатних коренів завжди **парна**.
3. **Для від’ємних коренів:** застосовуємо правило до $P(-x)$.

Математично (алгоритм на рис. 21): якщо V – кількість змін знаків, P – кількість додатних дійсних коренів (з урахуванням кратності), то:

$$P = V - 2k, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (54)$$

тобто $P \in \{V, V - 2, V - 4, \dots, 1 \text{ або } 0\}$.

Важливо:

- Нульові коефіцієнти **пропускаємо** (не рахуємо),
- Рахуємо тільки зміни: $+$ $\rightarrow$ $-$ або $-$ $\rightarrow$ $+$,
- Якщо знак не змінюється ($+$ $\rightarrow$ $+$ або $-$ $\rightarrow$ $-$), це не зміна.

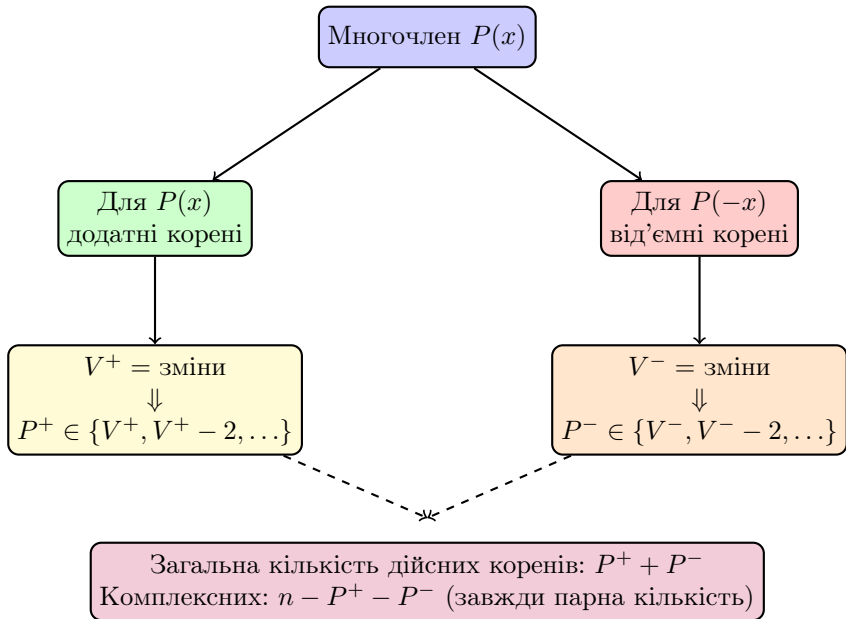


Рис. 21. Алгоритм застосування правила Декарта–Ньютона

Наприклад, розглянемо многочлен $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$ (рис. 22).

Крок 1: Виписуємо коефіцієнти:

$$(a_3, a_2, a_1, a_0) = (+1, -3, +1, +5) \quad (55)$$

Крок 2: Шукаємо зміни знаків:

$$+1 \rightarrow -3 \quad (\text{зміна 1: плюс на мінус}) \quad (56)$$

$$-3 \rightarrow +1 \quad (\text{зміна 2: мінус на плюс}) \quad (57)$$

$$+1 \rightarrow +5 \quad (\text{не зміна: плюс на плюс}) \quad (58)$$

Загалом: $V = 2$ зміни знаків.

Крок 3: Застосовуємо правило Ньютона:

Кількість додатних коренів: $P \in \{2, 0\}$ (тобто 2 або 0).

Крок 4: Від'ємні корені:

Для $P(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + (-x) + 5 = -x^3 - 3x^2 - x + 5$:

Коефіцієнти: $(-1, -3, -1, +5)$

Зміни знаків: $-1 \rightarrow -3$ (немає), $-3 \rightarrow -1$ (немає), $-1 \rightarrow +5$ (зміна!)

$V = 1$ зміна $\Rightarrow$ кількість від'ємних коренів: 1 (обов'язково непарна).

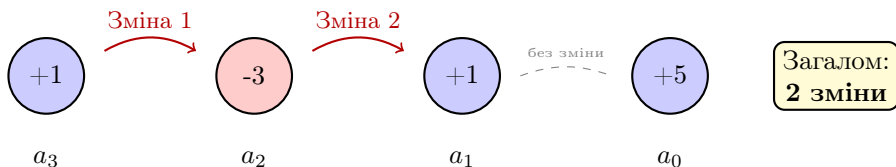


Рис. 22. Підрахунок змін знаків для $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$

Висновок:

- Додатних коренів: 2 або 0
- Від'ємних коренів: 1
- Комплексних коренів: 2 або 0

Перевірка: Розв'язуємо чисельно (рис. 23): $P(x) = 0$

Корені: $x_1 \approx -1.13$ (від'ємний), $x_{2,3} \approx 2.06 \pm 1.31i$ (комплексні).

Додатних: 0, від'ємних: 1

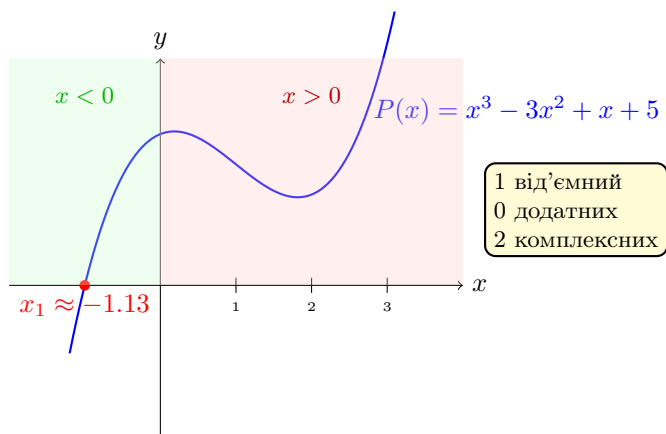


Рис. 23. Графік $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$ та його корені.

Приклад з трьома змінними знаків: $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$

Коефіцієнти: $(+1, -2, +3, -4, +5)$

Зміни: $+\rightarrow -, -\rightarrow +, +\rightarrow -, -\rightarrow +$ — чотири зміни.

Кількість додатних коренів: 4, 2 або 0.

Приклад без зміни знаків: $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

Коефіцієнти: $(+1, +2, +3, +4)$

Зміни: немає.

Кількість додатних коренів: 0 (всі корені від'ємні або комплексні).

Приклад з нульовими коефіцієнтами:

$P(x) = x^5 - 3x^3 + 2x - 1 = x^5 + 0x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 2x - 1$

Виписуємо ненульові: $(+1, -3, +2, -1)$

Зміни: $+\rightarrow -, -\rightarrow +, +\rightarrow -$ — три зміни.

Кількість додатних коренів: 3 або 1.

Інтуїція Ньютона: чому різниця завжди парна?

Коли дійсний корінь «зникає» (перетворюється на пару комплексно-спряжених коренів), відбувається:

- Втрата **двох** дійсних коренів (або появи двох додаткових),
- Кількість змін знаків не змінюється.

Таким чином, різниця завжди парна, бо комплексні корені з'являються парами.

1.9 Степеневі суми коренів і формули Ньютона.

Ньютон вивів рекурентні формули для обчислення сум степенів коренів многочлена через його коефіцієнти, не розв'язуючи самого рівняння.

Для многочлена $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ з коренями $x_1, x_2, \dots, x_n$ визначаємо **ступеневу суму порядку k** :

$$p_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k \quad (59)$$

Зв'язок з елементарними симетричними функціями.

Коефіцієнти многочлена пов'язані з коренями через **елементарні симетричні функції** (формули Вієта):

$$s_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_{n-1} \quad (60)$$

$$s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = a_{n-2} \quad (61)$$

$$s_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots = -a_{n-3} \quad (62)$$

$$\vdots \quad (63)$$

$$s_n = x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n a_0 \quad (64)$$

Ньютон відкрив, що **степеневі суми** p_k можна обчислити через s_i (або безпосередньо через коефіцієнти a_i) за допомогою рекурентних формул.

Формули Ньютона (тотожності Ньютона).

Для многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ з коренями $x_1, \dots, x_n$: степеневі суми p_k задовольняють рекурентним співвідношенням (рис. 24):

$$p_1 + a_{n-1} = 0 \quad (65)$$

$$p_2 + a_{n-1}p_1 + 2a_{n-2} = 0 \quad (66)$$

$$p_3 + a_{n-1}p_2 + a_{n-2}p_1 + 3a_{n-3} = 0 \quad (67)$$

Загальна формула для $k \geq 1$:

$$p_k + a_{n-1}p_{k-1} + a_{n-2}p_{k-2} + \dots + a_{n-k+1}p_1 + ka_{n-k} = 0 \quad (68)$$

Або в компактній формі:

$$p_k = - \sum_{i=1}^{\min(k,n)} a_{n-i}p_{k-i} - k \cdot a_{n-k} \cdot 1_{k \leq n} \quad (69)$$

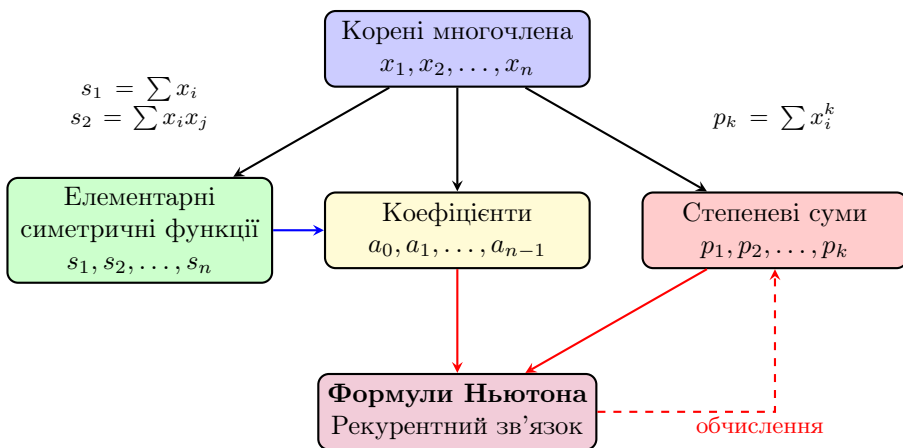


Рис. 24. Зв'язок між коренями, коефіцієнтами та степеневими сумами.

Приклад: квадратне рівняння.

Для рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$ з коренями $x_1 = 2, x_2 = 3$ обчислимо степеневі суми без знаходження коренів.

Маємо: $a_1 = -5$, $a_0 = 6$.

Крок 1: p_1

$$p_1 + a_1 = 0 \Rightarrow p_1 = -(-5) = 5 \quad (70)$$

Перевірка: $x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5$.

Крок 2: p_2

$$p_2 + a_1 p_1 + 2a_0 = 0 \Rightarrow p_2 = -(-5)(5) - 2(6) = 25 - 12 = 13 \quad (71)$$

Перевірка: $x_1^2 + x_2^2 = 4 + 9 = 13$.

Крок 3: p_3 Для $k > n$:

$$p_3 + a_1 p_2 + a_0 p_1 = 0 \Rightarrow p_3 = -(-5)(13) - 6(5) = 65 - 30 = 35 \quad (72)$$

Перевірка: $x_1^3 + x_2^3 = 8 + 27 = 35$

Крок 4: p_{100} (революція Ньютона!)

$$p_{100} = -a_1 p_{99} - a_0 p_{98} = 5p_{99} - 6p_{98} \quad (73)$$

Використовуючи рекурсію, можна обчислити $p_{100} = 2^{100} + 3^{100}$ **без знаходження коренів!**

Графік на рис. 25 нижче ілюструє експоненціальне зростання степеневих сум: чим більший показник степеня k , тим швидше зростає p_k , причому домінуючу роль відіграє найбільший за модулем корінь (у нашому прикладі — це $x_2 = 3$).

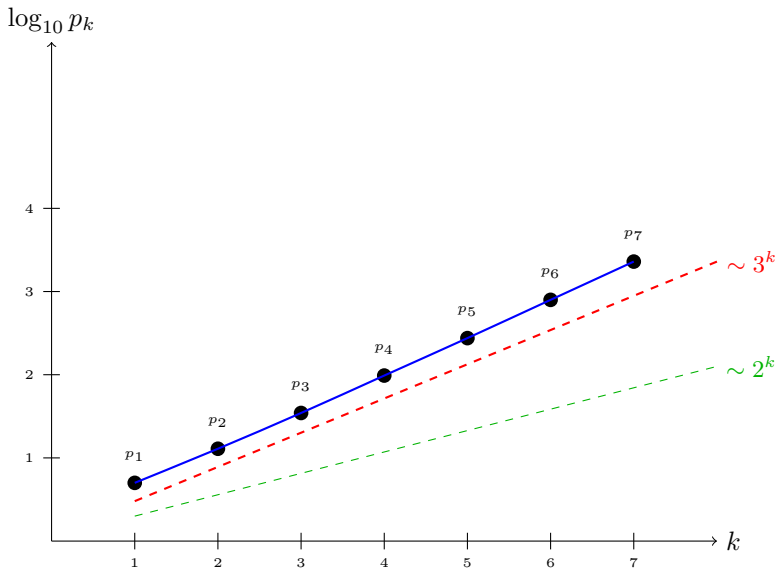


Рис. 25. Експоненціальне зростання степеневих сум для $x^2 - 5x + 6 = 0$ (логарифмічна шкала).

1.10 Математичні таблиці, вплив та спадщина.

Ньютон удосконалив методи складання логарифмічних таблиць, використовуючи ряд:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (74)$$

Для прискорення збіжності він застосував перетворення:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) \quad (75)$$

Тригонометричні функції із застосуванням розкладів в ряди:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots \quad (76)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots \quad (77)$$

Праці Ньютона лягли в основу розвитку аналізу у XVIII столітті:

- Ейлер розвинув теорію рядів та спеціальних функцій;
- Лагранж створив аналітичну механіку;
- Лаплас застосував аналіз до небесної механіки;
- Коші побудував теорію границь та неперервності.

Методи Ньютона стали основою математичної фізики:

- теорія коливань та хвиль;
- гідродинаміка та аеродинаміка;
- теорія пружності;
- електродинаміка;
- квантова механіка (операторний формалізм).

Метод Ньютона та його модифікації широко використовуються:

- розв'язання нелінійних рівнянь та систем;
- оптимізація (метод Ньютона–Рафсона);
- машинне навчання (градієнтний спуск);

- обчислювальна математика.

У XXI столітті методи Ньютона отримали нове життя:

- **метод Ньютона** – основа чисельного розв’язання рівнянь;
- **градієнтні методи** використовуються для навчання нейронних мереж;
- **чисельне інтегрування** застосовується в моделюванні процесів;
- **небесна механіка** – розрахунок траєкторій космічних апаратів.

Ньютон показав, що природа підкоряється математичним законам, які можна відкрити через спостереження та експеримент. Математика – універсальна мова опису природи. Його принцип “*Hypotheses non fingo*” (Гіпотез не вигадую) означав відмову від умоглядних спекуляцій на користь суворих математичних висновків.

Понад три століття після смерті Ньютона його спадщина залишається актуальною, студенти всього світу вивчають закони Ньютона, інженери використовують ньютонівську механіку в проектуванні, математики розвивають ідеї, закладені Ньютоном.

Навіть теорія відносності та квантова механіка, що перевершили класичну механіку, використовують математичний апарат, розроблений Ньютоном та його послідовниками.

“Не знаю, яким я здаюся світу, але сам собі я уявляюся лише хлопчиком, що грається на березі моря й бавиться тим, що час від часу знаходить камінчик більш строкатий, ніж звичайно, або гарну мушлю, в той час як великий океан істини лежить перед ним недослідженим”

Ісаак Ньютон

