

БЕРДЯНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет фізико-математичної, комп'ютерної та технологічної освіти
Кафедра фізики, математики та методики навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедрою
д.п.н., проф. Олександр ШКОЛА
«12» грудня 2025 р.

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ У ФАКУЛЬТАТИВНОМУ НАВЧАННІ
МАТЕМАТИКИ СТАРШОКЛАСНИКІВ**

Кваліфікаційна робота магістра

Виконавець: здобувачка другого рівня вищої
освіти, групи м2МА

Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Спеціальність: 014 Середня освіта
(Математика)

Освітньо-професійна програма: Середня освіта
(Математика)

ПІБ: Лілія ШАКІРОВА

Керівник: к.п.н., ст. викл. Світлана ЄФИМЕНКО

Рецензент: к.п.н., доцент Микола КУДІНОВ

Запоріжжя – 2025

ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

Шакірова Лілія Тахірівна

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи: «Основи теорії фракталів у факультативному навчанні математики старшокласників»

Керівник роботи: Єфріменко С.М., к.п.н., ст. викладач.

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «24» листопада 2025 року № 692с.

2. Строк подання студентом роботи: 08.12.2025 р.

3. Вихідні дані до роботи: теоретично обґрунтувати та розробити методику використання теорії фракталів у факультативному навчанні математики в 10 класі загальноосвітньої школи.

4. Зміст пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити):

- ознайомитися з науковими та методичними джерелами за темою дослідження;
- дослідити основні різновиди фракталів;
- визначити перелік тем з теорії фракталів, що перебувають у межах пізнавальних можливостей учнів 10 класів, і на їх основі запропонувати факультативний курс з математики «Світ фракталів»;
- розробити календарне планування та навчально-методичне забезпечення курсу за вибором (факультативу) «Світ фракталів»;
- надати методичні рекомендації використання теорії фракталів у факультативному навчанні математики у 10 класі;
- провести експериментальну перевірку розробленої методики факультативного навчання математики для учнів 10 класу на основі теорії фракталів

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) (за необхідністю):

6. Консультанти розділів роботи (якщо передбачені):

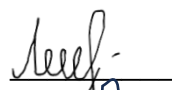
Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання: 27.09.2024 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Формулювання теми кваліфікаційної роботи, підготовка вступу, складання плану роботи.	вересень 2024 р.	
2.	Аналіз літературних джерел за темою дослідження, уточнення базових понять дослідження. Підготовка підрозділів 1.1, 1.2.	жовтень 2024 р.	
3.	Підготовка підрозділу 1.3 та висновків розділу 1 кваліфікаційної роботи.	листопад 2024 р.	
4.	Підготовка підрозділів 2.1 – 2.3 кваліфікаційної роботи та висновків 2 розділу.	жовтень – листопад 2024 р.	
5.	Проведення експерименту та апробації матеріалів	07.11.2025	
6.	Аналіз результатів експерименту, доопрацювання розділу 3	листопад 2025 р.	
7.	Оформлення підсумкового варіанту кваліфікаційної роботи відповідно до чинних вимог.	07.12.2025 р.	

Здобувачка вищої освіти:


(підпис)

Лілія ШАКІРОВА

(прізвище та ініціали)

Керівник роботи:


(підпис)

Світлана ЄФИМЕНКО

(прізвище та ініціали)

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ ВПРОВАДЖЕННЯ ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ У МАТЕМАТИЧНУ ОСВІТУ	9
1.1. Вітчизняні науково-методичні підходи до вивчення фракталів.....	9
1.2. Зарубіжний досвід вивчення фракталів	12
1.3. Огляд програм факультативних курсів з елементами теорії фракталів	18
<i>Висновки першого розділу.....</i>	<i>25</i>
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ІНТЕГРАЦІЇ ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ У МАТЕМАТИЧНУ ОСВІТУ	27
2.1. Геометричні (класичні) фрактали.....	27
2.2. Стохастичні фрактали	30
2.3. Алгебраїчні фрактали та мультифрактали.....	34
2.4. Методичні рекомендації	36
<i>Висновки другого розділу</i>	<i>40</i>
РОЗДІЛ 3. ПРОЄКТУВАННЯ СКЛАДОВИХ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ СТАРШОКЛАСНИКІВ ОСНОВАМ ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ	41
3.1. Мета, завдання та очікувані результати навчання учнів 10 класів основам теорії фракталів	41
3.2. Форми та засоби навчання учнів 10 класів основам теорії фракталів.....	41
3.3. Календарне планування факультативу «Світ фракталів»	48
3.4. Апробація та експеримент	49
3.5. Огляд сайту факультативного курсу «Світ фракталів».....	54
<i>Висновки третього розділу</i>	<i>56</i>
ВИСНОВКИ	58
ДЕКЛАРАЦІЯ ВИКОРИСТАННЯ ІІІ	61

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	62
ДОДАТКИ	69
Додаток А. Анкета для визначення мотивації до вивчення математики	69
Додаток Б. Результати анкети для визначення мотивації до вивчення математики	70
Додаток В. Конспект заняття з фрактальної розмірності	70
Додаток Г. Конспект лекції 1	75
Додаток Д. Конспект лекції 2	78
Додаток Ж. Сценарій пробного заняття «Фрактали: математична магія у природі та житті»	82

ВСТУП

Актуальність дослідження: Зі стрімким розвитком науки і техніки виникає потреба у включенні дедалі більшої кількості математичних розділів до шкільної програми. Донедавна геометричні моделі природних об'єктів будувалися з використанням порівняно простих геометричних фігур, а саме: прямих, прямокутників, кіл, сфер, багатогранників. Однак, цей набір, як не складно помітити, важко застосувати для опису складних об'єктів, таких як пористі матеріали, форма хмар, кровоносно-судинна система, крона дерева та інше. Тому виникає необхідність у запровадженні нових геометричних понять і методів для опису таких об'єктів. Одним із них є поняття фракталу.

Фрактальна геометрія є об'єктом активного вивчення як зарубіжних, так і вітчизняних дослідників. Вагомий внесок у розвиток фрактального аналізу був здійснений Бенуа Мандельбротом ("The Fractal Geometry of Nature") [42], Майклом Барнслі ("Fractals Everywhere") [35], Річардом Крауновером ("Introduction to Fractals and Chaos") [41, 52], Робертом Девайном ("A First Course in Chaotic Dynamical Systems") [39], Кеннетом Фалконером ("Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications") [40]. Серед вітчизняних науковців треба відзначити: В. М. Горобця [13], М. В. Працьовитого, О. В. Мартинюка [21] та інших.

Основною ідеєю нової геометрії є самоподібність. На сьогодні стає очевидним, що з допомогою евклідової геометрії складно моделювати природні об'єкти, оскільки в її рамках відсутні елементи нерегулярності та хаотичності. У таких випадках і застосовується теорія фракталів.

Елементи теорії фракталів зрозумілі для ознайомлення у старшій школі.

Теорія фракталів має дуже широке застосування у математиці, інформатиці (стиснення зображень) [7], фізиці, хімії, астрономії, біології, медицині, економіці, комп'ютерному моделюванні, побудові зображень ландшафтів, в архітектурі та навіть моді, наприклад у комп'ютерній графіці [10, 16], а саме, широко застосовується фрактальна будова ландшафту, яка повністю моделює світ у зображеннях 3D, що важливо для кінематографа та комп'ютерних ігор,

навчання водіїв та льотчиків. У економіці теорія фракталів останнім часом є одним із наймодніших підходів до дослідження ринку. Економісти використовують фрактали для опису кривих коливання курсів валют (ця властивість була відкрита Мандельбротом).

Фрактальна геометрія виходить за межі традиційної евклідової геометрії [24], пропонуючи нові способи опису і дослідження об'єктів, які мають складну, нерегулярну структуру [13]. Мотивацію під час вивчення цієї теми також підвищує те що фрактали мають широке застосування у реальних науках, технологіях, а також те що їх можна побачити навіть у повсякденному житті [34]. Дослідження фракталів допомагає учням зрозуміти складність і красу математичних структур, а також готує їх до вирішення складних міждисциплінарних задач у сучасному світі [35].

Крім того, фрактальні структури досліджуються в науково-дослідницьких роботах учнів-членів МАН. Наприклад: «Симетрія - символ краси, гармонії досконалості», «Неперервні і ніде не диференційовані функції», «Гармонія фракталів», «Застосування «золотого перерізу» в економіці», «Фрактальний многогранник «піраміда Серпінського»», «Фрактали та їх практичне застосування» [15].

Працівники освітньої ниви: О.В. Мартинюк, М.В. Працьовитий та Н.С. Правічка у своїх дослідженнях акцентують увагу на необхідності вдосконалення методики вивчення геометричних перетворень, включаючи фрактальну геометрію, для школярів і майбутніх учителів математики. Вони вважають, що важливим є збагачення змісту дисциплін новітніми досягненнями математичної науки, урізноманітнення задачного матеріалу та використання сучасних засобів ІКТ [21]. Бенуа Мандельброт, засновник фрактальної геометрії, стверджував, що багато природних об'єктів не можуть бути описані традиційною евклідовою геометрією, і запропонував використання фракталів для моделювання складних структур [42]. Н. Розов [25] наголошував, що фрактали здійснюють естетичну дію на учнів і виховують у них поняття прекрасного [42]. В. Г. Бевз своєю чергою вважав доцільним ознайомлення з фракталами [2].

Фрактали з'являються на межі науки та мистецтва, розмиваючи межі між ними [22]. Саме завдяки такому розмиттю меж фрактали стають ідеальним об'єктом міждисциплінарного вивчення в STEM-освіті. Це підтверджує і те, що фракталоподібні структури прослідковуються і в англійській мові і у структурі текстів [17, 18].

На практиці тема фракталів реалізується через низку ініціатив, таких як впровадження щорічного конкурсу юних дослідників «Фрактали» у загальноосвітній санаторній школи-інтернаті I-III ступенів КЗВО «Хортицька національна навчально-реабілітаційна академія». Суть конкурсу полягає в тому, що учні обирають фрактал, детально його вивчають, презентують результати дослідження під час захисту, пропонують нову сферу його застосування [29].

Ачкан Віталій Валентинович пропонує провести заняття у гуртку для учнів, які навчаються за рівнем стандарту, присвячене стислому опису теорії фракталів, а у класах з профільним та поглибленим рівнем провести три заняття на теми «Самоподібні множини», «Елементи фрактального аналізу», «Діаграми Вороного». Також окрім введення теми «фрактали» до програми математичних гуртків пропонується, на підтвердження думки Школьного [32], навіть впровадити до шкільного курсу математики елементи теорії фракталів [1].

Прикладом вітчизняних розробок програм факультативних курсів є «Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання» (Частина I Допрофільна підготовка), у якому міститься програма курсу за вибором для учнів 9 класу математичного профілю «Фрактали» [14]. Окрім цього, існує також факультатив «Історія математики» [3] – програма факультативного курсу для учнів 7-9 класів, у рамках якого в темі «Тема 5. Історія розвитку сучасних розділів математики» розглядаються основні відомості про фрактали, а в «Тема 6. Математична мозаїка» вивчаються сніжинка Коха та килим Серпінського. Інший приклад – програма «Введення у фрактальний аналіз» (Частина II Профільна підготовка) [31] для учнів 11 класів з профільним і поглибленим вивченням математики, що міститься в окремому збірнику.

Про важливість вивчення фракталів студентами писали Власенко [18, 19], З. І. Слєпкань [27], В. А. Тестов [28] та С. О. Бурчак, В. О. Конопля (описують елективний курс «Фрактали» для студентів та доводять, що цей курс сприяє розвитку аналітичного мислення та уяви, а також розвиває міжпредметні зв'язки між математикою та інформатикою) [17].

Враховуючи важливу роль теорії фракталів у математиці та інших галузях науки, а також повсякденному житті, вивчення окремих тем з цього розділу математики є дуже актуальною задачею для учнів старших класів.

Важливим є не лише вивчення тем теорії фракталів а й ознайомлення з прикладами фракталів у природі для більшого розуміння математики світу.

Об'єкт дослідження – процес навчання математики у старшій школі

Предмет дослідження – методика навчання учнів старшої школи основам теорії фракталів під час факультативних занять.

Мета дослідження теоретично обґрунтувати і розробити методику використання теорії фракталів у факультативному навчанні математики в 10 класі загальноосвітньої школи та провести її експериментальну перевірку.

Завдання дослідження:

- ознайомитися з науковими та методичними джерелами за темою дослідження;
- дослідити основні різновиди фракталів;
- визначити перелік тем з теорії фракталів, що перебувають у межах пізнавальних можливостей учнів 10 класів, і на їх основі запропонувати факультативний курс з математики «Світ фракталів»;
- розробити календарне планування та навчально-методичне забезпечення курсу за вибором (факультативу) «Світ фракталів»;
- надати методичні рекомендації використання теорії фракталів у факультативному навчанні математики у 10 класі;
- провести експериментальну перевірку розробленої методики факультативного навчання математики для учнів 10 класу на основі теорії фракталів

Для реалізації поставлених задач були використані такі **методи дослідження**: аналіз, синтез, порівняння, узагальнення даних з проблеми дослідження на основі вивчення психолого-педагогічної та методичної літератури.

Апробація результатів роботи була проведена у рамках Тижнів математики та Днів науки БДПУ 2023 та 2025 років, а також публікації: наукова стаття «Методи впровадження фрактальної геометрії в навчальний процес і створення методичних матеріалів» опублікованій у електронному науковому журналі «Суспільство та національні інтереси» [20]; тези: «Інтеграція фракталів у факультативне навчання старшої школи в контексті розвитку технологічної освіти в Україні» опублікована у збірнику Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини [34]; «Аналіз методичної літератури з теми «Фрактали» у поглибленому та профільному курсах математики» [33] та «Фрактали у поглибленому курсі математики» [35] опубліковані у збірнику тез наукових доповідей здобувачів вищої освіти Бердянського державного педагогічного університету на Днях науки 13 травня 2025 року

Теоретичне і практичне значення роботи полягає в аналізі наукових і методичних джерел з фрактальної геометрії та розробці методики використання теорії фракталів у факультативному навчанні математики учнів 10 класу, створені та впроваджені факультативного курсу «Світ фракталів» та його навчально-методичного забезпечення, що включає: авторський вебсайт [<https://fakultativ-svit-fraktaliv.webnode.com.ua/>] з навчальними матеріалами та інтерактивними ресурсами, календарно-тематичне планування курсу, комплекс розроблених уроків, відеоінструкцій для учнів, завдання дослідницького типу, спрямовані на самостійне моделювання фрактальних структур, інтерактивні аркуші, інфографіка, вебквест, проєктне заняття. Цей курс може бути використаний вчителями шкіл під час навчання геометрії, для самостійного ознайомлення старшокласників з теорією фракталів, для розширення змісту математичної освіти старшокласників.

Структура магістерської роботи складається зі вступу, трьох основних розділів, висновків, списку використаних джерел (54 позицій). Загальний обсяг роботи – 91 с., з яких 57 с. – основна частина. До основного тексту роботи включено 4 таблиці та 14 рисунків; схем і діаграм не подано. Додатки наведено на 21 сторінках.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ ВПРОВАДЖЕННЯ ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ У МАТЕМАТИЧНУ ОСВІТУ

У цьому розділі здійснюється аналіз наукової літератури, що стосується викладання фрактальної геометрії, розглядаються різні підходи до її представлення у шкільному курсі математики та оцінюється ефективність запропонованих методик.

1.1. Вітчизняні науково-методичні підходи до вивчення фракталів

Фрактальна геометрія є предметом численних наукових досліджень, які охоплюють як теоретичні аспекти, так і методики її викладання в закладах освіти різного рівня. Останніми роками з'явилося чимало публікацій, присвячених питанням популяризації фракталів серед учнівської та студентської молоді, а також способам інтеграції цієї теми до навчальних програм.

Одним із прикладів вітчизняних публікацій на цю тему є стаття, у якій пропонується унікальний досвід впровадження щорічного конкурсу юних дослідників «Фрактали» [14], який проводиться у загальноосвітній санаторній школі-інтернаті I-III ступенів КЗВО «Хортицька національна навчально-реабілітаційна академія» [29]. Цей конкурс має на меті зацікавити учнів математикою, розвинути їхні дослідницькі навички та показати приклад реального застосування математичних знань у різних сферах науки й техніки. Формат конкурсу передбачає, що кожен учасник обирає певний фрактал, вивчає його математичні властивості, історію відкриття, методи побудови, а також сучасні сфери його використання. Під час фінального етапу конкурсу учні презентують результати свого дослідження перед журі, демонструючи не лише глибоке розуміння теоретичного матеріалу, а й власне бачення нових можливостей застосування фракталів у науці та техніці.

Такий підхід має безліч переваг. Він не лише розвиває в учнів аналітичне та критичне мислення, але й сприяє розвитку навичок самостійного пошуку

інформації, аналізу та узагальнення отриманих знань. Крім того, конкурс стимулює творчість, оскільки учні не лише репрезентують відомі наукові концепції, а й розглядають потенційні сфери їхнього використання, що сприяє формуванню інноваційного мислення. Важливим є також аспект публічного виступу – вміння ефективно презентувати свої ідеї, аргументувати їх та відповідати на питання журі розвиває комунікативні навички, які є ключовими для майбутньої професійної діяльності.

Окрім цього, у статті розглядається методика інтеграції теми фракталів до навчального процесу через факультативні заняття та математичні гуртки. Зокрема, Ачкан Віталій Валентинович [1] пропонує проведення окремого заняття у гуртку для учнів, які навчаються за рівнем стандарту. Це заняття мало б містити стислий виклад основних понять теорії фракталів, пояснення ключових принципів їхньої побудови, а також знайомство з найвідомішими представниками цього класу математичних об'єктів, такими як крива Коха, трикутник Серпінського та множина Мандельброта. Такий підхід дозволить зацікавити учнів і мотивувати їх до подальшого самостійного вивчення теми.

Водночас у класах з профільним та поглибленим рівнем вивчення математики пропонується реалізувати більш розширену програму, яка включає три окремі заняття. Перше – «Самоподібні множини» у якому пропонується познайомитися з концепцією самоподібності, вивчити її математичне формулювання та проаналізувати приклади самоподібних множин у природі та технологіях. Друге – «Елементи фрактального аналізу», яке має на меті дослідження методів кількісного опису фракталів, розгляд таких понять, як фрактальна розмірність, методи її обчислення та приклади практичного використання. Третє – «Діаграми Вороного» передбачає вивчення особливого типу фрактальних структур, їхнього використання в геометрії, комп'ютерній графіці, географічному аналізі та інших сферах. Ці теми дозволяють поглибити знання учнів, показати взаємозв'язки між фракталами та іншими розділами математики, а також ознайомити їх із сучасними науковими дослідженнями у цій галузі.

Додатково, на думку деяких науковців, зокрема Школьного [32], варто не обмежувати тему фракталів лише математичними гуртками та факультативами, а інтегрувати її безпосередньо до загального шкільного курсу математики. Це дозволило б систематично знайомити учнів з основами фрактальної геометрії, показувати її зв'язок з іншими темами (наприклад, функціями, рівняннями, геометричними перетвореннями) та на практичних прикладах демонструвати її значення у сучасному світі. Такий підхід сприятиме формуванню цілісного математичного світогляду, розширенню розуміння структури простору та процесів, що відбуваються у природі.

На думку О. В. Лабенка, І. Й. Набитовича та В. А. Роменця фрактали постають на перетині науки та мистецтва, стираючи традиційні межі між цими царинами, демонструючи собою приклад префігурації концепції «двох культур». Цей вислів – «дві культури» – ввів фізик і письменник Чарльз Персі Сноу для позначення поділу між гуманітарно-літературною та природничо-математичною галузями знань. Протиставлення культурологічних та природничих наук (де перші зосереджуються на вивченні суб'єктів, а другі – об'єктів) стало однією з ключових тем у неокантіанській філософії. Ідеї, близькі до фрактальних структур, можна знайти ще в античній філософії – яскравий приклад цього дають апорії Зенона, зокрема про Ахіллеса й черепаху. Фрактальне сприйняття світу також притаманне стоїкам, які вважали, що історія Всесвіту нескінченно повторюється за одним і тим самим законом: у кожному новому світі до найменших подробиць відтворюються ті самі події, речі, обличчя. Цей процес зумовлений необхідністю, яку стоїки ототожнювали з долею, природою й провидінням. Навіть людська воля, хоч і ґрунтується на особистому виборі, все одно підпорядковується вищому задумові. У філософії Середньовіччя подібну фрактальну ідею уособлює образ фенікса – символу незмінного в безперервному оновленні. [18, 21] Як казав Тертуліан, образ птаха фенікса, який є уособленням «постійного у змінах», *«служує сам собі потомством, перетворюється на нового фенікса, існує завжди, хоч і перестав жити, залишається подібним до себе, і хоч це уже інший птах»* [цит. за: 25].

О. В. Лабенко досліджував фрактальні структури в англійській мові, оскільки вважав, що сама лексика може сприйматися як певне фрактальне явище, а злиття цих структур є слушним для оновлення застарілих освітніх методик. Його погляд сфокусований на нелінійних фрактальних системах, які найкраще відображають непередбачуваний та хаотичний характер живого людського мовлення, на відміну від лінійних фракталів (як у математиці), де частина є точною копією цілого [18]. У нелінійних фракталах частина є лише подібною, хоч і видозміненою, копією цілого. Фрактальний метод слугує знаряддям для перетворення мовного хаосу на впорядковане знання, пришвидшуючи пристосування слухачів до багатовимірної філософії західного письменництва [19].

Таким чином, запропоновані методики навчання та змагання на основі фрактальної геометрії сприяють не лише розвитку математичних здібностей учнів, а й формуванню навичок самостійного дослідження, аналітичного мислення, творчого підходу до вирішення задач та ефективної комунікації. Це дозволяє зробити навчання не лише більш змістовним, але й значно цікавішим та інтерактивним.

1.2. Зарубіжний досвід вивчення фракталів

Темою фракталів займалися також іноземні науковці. Наприклад, на конференції CIEAЕAM 55[50], що проходила у Плоцьку (Польща) в 2003 році, було запропоновано використовувати методи математичного моделювання задач реальної дійсності для вивчення фракталів. З метою обґрунтування цього підходу автор разом з ОРРІ (Організацією професійної підготовки вчителів), провели експериментальне дослідження, що було описане у статтях Adalberto Codetta Raiteri “An action research on line to introduce fractals in the teaching and learning of mathematics from primary to secondary school” [49], Adalberto Codetta Raiteri та Renza Cambini “L’uso didattico del materiale virtuale presente in rete: un caso i frattali” [37], “Una ricerca-azione on line per introdurre i frattali nell’insegnamento di matematica” [51].

Так Adalberto Codetta Raiteri у статті “An action research on line to introduce fractals in the teaching and learning of mathematics from primary to secondary school” [49] розглядає питання інтеграції фракталів у навчання математики на різних рівнях шкільної освіти. Автор досліджує можливість використання сучасних математичних концепцій у шкільних програмах та оцінює ефективність онлайн-методів у цьому процесі. Дослідження проводилося в рамках конференції CIEAEM 55 і тривало з травня 2004 року до червня 2005 року.

У вищезазначеній статті автор проводить роздуми про консервативність математичної освіти. Він зазначає, що математика як дисципліна змінюється повільно, і це впливає на наукову орієнтацію учнів. Одним із шляхів модернізації освіти є включення новітніх концепцій, таких як фрактальна геометрія, яка дозволяє поєднувати традиційну математику з реальними застосуваннями. На конференції CIEAEM 55 було запропоновано дослідити, чи можна успішно інтегрувати фрактали у викладання математики на різних рівнях: від початкової до старшої школи. Для цього було організовано дистанційне дослідження, яке залучило 15 вчителів математики, 8 вчителів інших предметів, 15 класів та 12 шкіл по всій Італії.

Автор переконаний, що фрактали є ідеальним матеріалом для шкільного навчання з кількох причин:

- вони мають реальні застосування у науці та техніці, наприклад у медицині, кіноіндустрії та фізиці;
- фрактали є візуально привабливими;
- можуть зацікавити учнів через естетичний аспект;
- велика кількість навчальних матеріалів у відкритому доступі спрощує їх використання в освітньому процесі;
- застосування комп’ютерних програм для моделювання фракталів дає змогу учням працювати з поняттями, які раніше були доступні лише професійним математикам.

Таким чином фрактали дозволяють учням зрозуміти, що математика – це не лише процес відкриття, а й винахід, що сприяє розвитку креативного мислення.

Зазначене дослідження проводилося за методом action research, який поєднує дію та рефлексію для поступового вдосконалення підходів до викладання. Під час експерименту використовувався дистанційний формат навчання, при якому всі учасники взаємодіяли через онлайн-платформу. Спочатку було відібрано 74 вчителів, зацікавлених у дослідженні, проте лише 23 з них представили повноцінні навчальні проєкти. Робота проходила у групах відповідно до рівня освіти: початкова, середня та старша школа. Кожен учасник розробив навчальний проєкт, випробував його у своєму класі та представив результати. Для оцінки ефективності навчального процесу учні відповідали на питання з анкети, основне питання якої було: «Що таке фрактал, на вашу думку?».

Фрактали використовувалися для навчання учнів різного віку. У початковій школі (9–11 років) їх вивчали через геометричні перетворення, такі як Крива Коха та Трикутник Серпінського. Використовувалися інтерактивні анімації, римовані пояснення та навчальні ігри. У середній школі (12–14 років) акцент робився на ітераційних процесах, симетрії та природних формах, наприклад, будові листя папороті або формі морських узбереж. Учні працювали з програмами на зразок Cabri, створюючи власні фрактальні об'єкти. У старшій школі (14–19 років) фрактали використовувалися для глибшого аналізу математичних понять: логарифмів, рекурсивних функцій, ймовірності та комплексних чисел. Використовувалися різні програмні засоби, такі як Excel, Pascal, Java, C++. Фрактальна геометрія також активно застосовувалася у міждисциплінарному навчанні, зокрема у фізиці, мистецтві, біології та інформатиці.

Автор доходить кількох важливих висновків. Фрактали можна вивчати на будь-якому рівні школи, починаючи з початкової. Вони сприяють глибшому розумінню математики та можуть мотивувати учнів до її подальшого вивчення. Викладання фракталів може базуватися на евристичних підходах, що

спираються на реальні проблеми, що робить навчання більш практичним і цікавим. Фрактали допомагають встановлювати міждисциплінарні зв'язки, що відповідає сучасним освітнім тенденціям. Вивчення фракталів потребує використання веб-ресурсів і роботи в групах, що сприяє активному навчанню. Фрактальна геометрія може бути інтегрована у стандартну програму з математики через такі теми, як геометричні перетворення, нескінченні послідовності, ряди, рекурсивні функції, логарифми, комплексні числа та ймовірність.

Дослідження демонструє, що навіть без значних фінансових ресурсів та без очного контакту можна успішно впроваджувати нові концепції у шкільну освіту. Онлайн-формат дозволив організувати ефективну співпрацю між учителями з різних регіонів, що відкриває перспективи для подальших досліджень у сфері дистанційного навчання математики. Автор наголошує, що отримані результати можуть бути використані для розробки курсів підвищення кваліфікації вчителів, а також для вдосконалення методик викладання математики у школах.

Таким чином, стаття є цінним внеском у сучасну методiku викладання математики. Вона демонструє, що фрактали – це не лише складна математична концепція, а й ефективний навчальний інструмент. Дослідження підтвердило, що фрактали можуть бути інтегровані в навчальний процес на будь-якому рівні освіти, що дозволяє зробити математику більш цікавою та доступною для учнів.

Стаття Adalberto Codetta Raiteri та Renza Cambini “L’uso didattico del materiale virtuale presente in rete: un caso i frattali” [37] досліджує можливість використання віртуальних навчальних матеріалів у процесі викладання математики, зокрема у вивченні фракталів. Автори розглядають питання, як інтегрувати сучасні цифрові ресурси у традиційні методи математичного навчання, використовуючи підхід математичного моделювання реальних проблем.

На початку статті автори зазначають, що інтернет пропонує необмежену кількість навчальних матеріалів для викладання математики, зокрема анімовані Java-додатки та інтерактивні платформи, які можуть суттєво доповнити

традиційне навчання. Віртуальні матеріали можуть бути створені не тільки професійними розробниками, а й самими вчителями та учнями, що розширює можливості їх використання. Однак постає питання, як правильно інтегрувати ці нові ресурси в освітній процес, щоб вони не лише урізноманітнювали навчання, а й допомагали в опануванні математичних понять. Автори пропонують використовувати метод математичного моделювання, який традиційно застосовується для аналізу реальних проблем.

Метод моделювання проблем реальності включає кілька етапів: спрощення вихідної ситуації, формулювання проблеми, математичне представлення, аналіз і пошук рішень. Автори ілюструють цей підхід на прикладі вибору між покупками у місцевих магазинах та супермаркеті, розглядаючи параметри витрат, часу та транспортних витрат. На основі цих параметрів учні можуть побудувати математичну модель та визначити оптимальне рішення, що дає змогу розвивати аналітичне мислення.

Далі автори переходять до використання цього ж методу для вивчення фракталів. Вони зазначають, що фрактали є поширеними об'єктами в інтернеті і можуть бути вивчені на різних рівнях освіти. У початкових класах фрактали можуть допомогти пояснити поняття самоподібності та геометрії природи, а у старших класах вони можуть використовуватися для вивчення логарифмів, комплексних чисел та рекурсивних функцій.

Для практичного вивчення фракталів автори пропонують використовувати програмне забезпечення Fractint, яке дозволяє генерувати фрактальні об'єкти. Учні можуть досліджувати фрактали, змінюючи параметри та використовуючи функцію «збільшення» для спостереження за самоподібністю структур. Одним із ключових аспектів вивчення є встановлення математичної закономірності формування фракталів, наприклад, у трикутнику Серпінського учні можуть виявити, що кожен наступний рівень будується шляхом видалення певної частини вихідної фігури. Це дозволяє перейти від спостережень до формулювання математичних правил, таких як рекурсивні співвідношення та алгоритмічні побудови.

Автори розглядають можливість використання програмування для моделювання фракталів. Учні можуть писати прості програми на Logo для створення трикутника Серпінського або сніжинки Коха. Цей підхід допомагає зрозуміти алгоритмічний характер фракталів, що є важливим для розвитку навичок роботи з рекурсією.

Ще одним цікавим прикладом застосування фракталів у навчанні є проблема вимірювання довжини берегової лінії, яку запропонував Бенуа Мандельброт. Учні можуть досліджувати, як вибір масштабу впливає на результати вимірювання, та пов'язати це з поняттям фрактальної розмірності. Аналогічно можна вивчати структуру папороті, яка є природним фракталом, що дозволяє поєднати математику з біологією.

У висновках автори наголошують на важливості вивчення фракталів у школі. Вони підкреслюють, що фрактали привабливі не тільки через свою естетичність, а й через широкий спектр застосувань у науці та техніці. Вивчення фракталів сприяє розвитку міждисциплінарного мислення, оскільки вони використовуються у фізиці, медицині, графіці та багатьох інших галузях. Велика кількість доступних матеріалів в інтернеті дає можливість вивчати фрактали через різні підходи, включаючи програмування, геометричні побудови та аналіз реальних об'єктів.

Таким чином, стаття показує, що фрактали можуть стати ефективним навчальним інструментом на різних рівнях шкільної освіти. Використання математичного моделювання дозволяє зробити процес вивчення фракталів логічним та послідовним, а інтеграція цифрових ресурсів розширює можливості для візуалізації та експериментування. Автори доводять, що сучасні технології можуть значно збагатити математичну освіту, якщо їх використовувати у поєднанні з продуманими методичними підходами.

А у статті “Una ricerca-azione on line per introdurre i frattali nell'insegnamento di matematica” [51], та книзі “A fractals unit for elementary and middle school students” [38] також наведено приклади впровадження теорії фракталів під час вивчення інших тем математики, які входять в освітню програму учнів різних

класів. Наприклад, теми: геометричні перетворення, самоподібність, логарифми, комплексні числа, рекурсивні функції.

1.3. Огляд програм факультативних курсів з елементами теорії фракталів

Прикладом вітчизняних розробок програм факультативних курсів є «Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання» (Частина I Допрофільна підготовка), у якому міститься програма курсу за вибором для учнів 9 класу математичного профілю «Фрактали» [14]. Окрім цього, існує також факультатив «Історія математики» [38] – програма факультативного курсу для учнів 7-9 класів, у рамках якого в темі «Тема 5. Історія розвитку сучасних розділів математики» розглядаються основні відомості про фрактали, а в «Тема 6. Математична мозаїка» вивчаються сніжинка Коха та килим Серпінського. Інший приклад – програма «Введення у фрактальний аналіз» (Частина II Профільна підготовка) [31] для учнів 11 класів з профільним і поглибленим вивченням математики, що міститься в окремому збірнику.

Аналіз факультативу «Фрактали» [14] для 9 класу [33]

Програма складається з 16 годин і охоплює ключові теоретичні поняття, алгоритмічні побудови та практичні застосування фракталів.

Курс «Фрактали» для 9 класу має на меті не лише поглибити знання учнів з математики та інформатики, але й значно розширити їхнє уявлення про математичні та природничі науки загалом. Він сприяє розвитку логічного та алгоритмічного мислення, формуючи в учнів навички, необхідні для розв'язування задач, які вимагають творчого підходу. Окрім цього, курс дозволяє учням познайомитись з потужними інструментами для візуалізації математичних об'єктів, що робить навчання більш цікавим та доступним, а також сприяє підвищенню їхніх практичних навичок у роботі з сучасними програмними засобами.

Завдяки використанню комп'ютерних програм, учні можуть на власні очі побачити, як виглядають різноманітні фрактали, а також як алгоритмічно

будуються такі складні об'єкти. Це особливо важливо для розвитку навичок програмування, адже учні вивчають принципи побудови фракталів через програмні мови та інтерфейси, що дозволяє їм отримати практичні навички, корисні в подальшій освіті та кар'єрі в галузі інформаційних технологій.

Курс починається із загального знайомства з поняттям фрактала, що дозволяє створити базову основу для подальшого вивчення більш складних тем. Учні вивчають історію виникнення терміну «фрактал», розглядають основні характеристики, такі як самоподібність, нескінченна складність та фрактальна вимірність. Важливою частиною програми є практичне застосування цих понять у реальному світі через вивчення класичних фракталів, таких як крива Коха, сніжинка Коха та множина Кантора. Розглядаючи ці фрактали, учні вивчають математичні принципи, які лежать в основі їхнього створення, та їхні властивості, що дозволяє створити міцне підґрунтя для подальших досліджень.

Далі програма охоплює більш складні фрактали, зокрема множини Мандельброта та Жуліа. Ці об'єкти вводять учнів у світ алгебраїчних фракталів та дають можливість познайомитись з роботою з комплексними числами. Тут важливо, що учні не лише вивчають математичні поняття, але й отримують практичні навички побудови фракталів за допомогою сучасних комп'ютерних програм.

Окрему увагу приділено стохастичним фракталам, які використовуються для моделювання випадкових процесів. Це дозволяє учням краще зрозуміти застосування фракталів у різних галузях науки і техніки, зокрема в природничих науках, економіці та інженерії. Стохастичні фрактали демонструють, як математичні моделі можуть використовуватись для аналізу реальних випадкових процесів, таких як ринкові коливання чи природні катастрофи.

Однак, незважаючи на обмеження курсу, його програма все ж надає важливу платформу для розвитку учнів, оскільки допомагає сформувати основи для подальшого поглибленого вивчення фракталів та їхніх застосувань у різних галузях. Курс також може стати основою для майбутніх інтересів учнів до математичних та інформатичних дисциплін. Адже вивчення фракталів дозволяє

не тільки розвивати математичне мислення, але й допомагає учням зрозуміти глибші зв'язки між теоретичною математикою та її практичними застосуваннями.

Однією з переваг курсу є міждисциплінарний підхід, який дозволяє учням побачити, як фрактали використовуються в реальних життєвих ситуаціях. Наприклад, вивчення фракталів в економіці може допомогти краще зрозуміти поведінку фінансових ринків, а застосування фрактальних моделей у природничих науках демонструє, як математичні концепти можуть використовуватись для моделювання складних природних процесів. Це дозволяє учням не лише поглибити свої знання в математиці, але й отримати корисні навички для вирішення завдань у реальному житті.

Практична частина курсу, зокрема робота з комп'ютерними програмами для візуалізації фракталів, є дуже важливою, оскільки дозволяє учням не тільки теоретично освоїти концепти, а й отримати реальний досвід роботи з програмним забезпеченням. Це дає їм можливість створювати власні фрактальні побудови, експериментувати з різними алгоритмами та візуалізувати складні математичні структури. Такі навички можуть бути корисні в майбутньому при навчанні в університетах, а також при роботі в галузях, пов'язаних з математичними, інженерними чи комп'ютерними науками.

Ще однією перевагою курсу є можливість розвитку творчих здібностей учнів. Курс завершується конкурсом творчих робіт, де учні можуть продемонструвати власні фрактальні побудови, що дозволяє не тільки оцінити їхні математичні досягнення, але й розвивати вміння самовираження через науку. Це також стимулює учнів до подальших досліджень і експериментів, що є важливою частиною навчального процесу.

Програма курсу також дозволяє залучати учнів до роботи в команді, що є важливою навичкою для майбутньої професійної діяльності. Робота над фрактальними побудовами в групах може сприяти розвитку комунікаційних навичок, вміння працювати з іншими людьми над спільними проєктами, а також допоможе зрозуміти важливість співпраці у досягненні спільних цілей.

Хоча курс має деякі недоліки, такі як обмеження за часом та складність деяких тем, він є відмінною відправною точкою для поглибленого вивчення фракталів та їхніх застосувань у різних галузях науки та техніки. Він не тільки дає учням базові знання з математики та інформатики, але й розвиває важливі навички, які будуть корисні в їхньому майбутньому навчанні та кар'єрі.

Друга програма – «Вступ до фрактального аналізу» для 11 класу акцент робиться на математичні методи дослідження фрактальних множин.

Аналіз факультативу «Введення у фрактальний аналіз» [31] для 11 класу [33]

Факультатив «Введення у фрактальний аналіз» для 11 класу спрямований на ознайомлення учнів із поняттям фракталів, їхніми властивостями, класифікацією та застосуваннями. Факультатив складається з кількох основних розділів. Перший розділ – «Вступ до фрактальної геометрії» – знайомить учнів із поняттям фракталів, історією виникнення терміна та основними властивостями, такими як самоподібність і нескінченна деталізація. Другий розділ присвячений фрактальній розмірності, зокрема визначенню цього поняття та алгоритму її обчислення. Третій розділ охоплює геометричні фрактали, включаючи класичні приклади, такі як множина Кантора, крива Коха, сніжинка Коха, трикутник і килим Серпінського. Також розглядаються складніші структури: губка Менгера, крива Леві та дерево Піфагора. Четвертий розділ присвячений стохастичним (випадковим) фракталам. У ньому розглядається поняття стохастичних фракталів, методи моделювання випадкових процесів і приклад броунівського руху як фрактальної структури. П'ятий розділ знайомить учнів із програмним забезпеченням, що використовується для побудови та візуалізації фракталів. Учні вивчають основи роботи з алгоритмами створення фрактальних структур та опановують навички аналізу отриманих моделей. Шостий розділ акцентує увагу на застосуванні фракталів у різних галузях: у природничих науках, соціології та економіці, а також у літературі та мистецтві. У рамках цього факультативу відсутнє глибоке опрацювання фракталів, що базуються на комплексних числах та поліноміальних функціях.

Факультатив має кілька важливих переваг. По-перше, він демонструє практичне застосування фракталів у реальних ситуаціях, що підвищує інтерес учнів до математики. По-друге, курс сприяє розвитку дослідницьких навичок: учні навчаються працювати з програмами для побудови фракталів та проводити аналіз отриманих моделей. По-третє, міждисциплінарний підхід, що використовується у курсі, дозволяє учням бачити взаємозв'язок між математикою та іншими науками, формуючи цілісне уявлення про математичні моделі.

Разом із тим, курс має певні труднощі. Складність математичного апарату полягає в тому, що обчислення фрактальної розмірності базується на використанні хаусдорфової розмірності, яка потребує знання границь, логарифмів і інтегралів. Додаткову складність створює необхідність аналізу нескінченно малих масштабів та використання формул, які описують поведінку фрактальних структур при різних рівнях поділу. Однією з головних проблем вивчення теми «Фрактали» є обмежена кількість навчальних посібників, адаптованих для шкільного рівня. Крім того, викладання цієї теми вимагає використання спеціалізованого програмного забезпечення та обладнання, яке не завжди доступне у навчальних закладах.

Важливо врахувати, що 9 та 11 класи – це період підготовки до державної підсумкової атестації (ДПА) та зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО)/національного мультипредметного тесту (НМТ), тому додаткове навантаження у вигляді факультативного курсу може бути надмірним для учнів. Натомість 10 клас є більш сприятливим періодом для проведення факультативу за цієї теми, оскільки він не супроводжується підготовкою до іспитів, що дає учням більше часу для глибшого занурення у складні математичні теми. Це дозволить учням більш ґрунтовно засвоїти матеріал, не відволікаючись на підготовку до іспитів, та отримати ширше уявлення про сучасну математику та її застосування. Нижче наведено порівняльний аналіз курсів з вивчення теорії фракталів для учнів 9-11 класів (див. таб.1.1)

Таблиця 1.1

Порівняльний аналіз курсів

Курс	Цільова аудиторія	Основна мета	Методи навчання	Очікувані результати
«Фрактали» для 9 класу	Учні 9 класу	Ознайомлення з базовими поняттями фрактальної геометрії, такими як самоподібність, ітерація, рекурсія.	Візуалізація фракталів за допомогою простих комп'ютерних програм; використання графічних редакторів; обговорення концепцій через приклади та побудову простих фракталів.	Розвиток інтуїтивного розуміння базових понять фрактальної геометрії; формування інтересу до математики; підвищення рівня обчислювальної грамотності.

Продовження табл. 1.1

Курс	Цільова аудиторія	Основна мета	Методи навчання	Очікувані результати
Введення у фрактальний аналіз» для 11 класу	Учні 11 класу з поглибленим вивченням математики	Поглиблене вивчення понять фрактальної геометрії, включаючи фрактальний вимір, межі та алгоритми генерації фракталів.	Практичні заняття з використанням спеціалізованого забезпечення (наприклад Fractal Explorer); моделювання складних структур; розробка власних фрактальних проєктів.	Засвоєння фундаментальних і прикладних аспектів фрактальної геометрії; розвиток аналітичного мислення; навички аналізу, моделювання та візуалізації складних геометричних об'єктів

Джерело: [20]

Висновки першого розділу

Як показує аналіз статті Adalberto Codetta Raiteri та Renza Cambini, фрактали мають потужний міждисциплінарний потенціал і можуть бути інтегровані в навчання на різних рівнях – від початкової школи до старшої.

Фрактали дозволяють учням зрозуміти такі фундаментальні математичні поняття, як самоподібність, нескінченні послідовності, рекурсивні функції та фрактальна розмірність. Оскільки вони широко використовуються в реальних застосуваннях – у біології, фізиці, графіці, медицині та економіці – їхнє вивчення робить математику більш практичною та наближеною до життя.

Вивчення фракталів передбачає використання комп'ютерних програм, що розвиває алгоритмічне мислення та навички програмування. Учні можуть моделювати фрактали, змінювати параметри, досліджувати їхні властивості, що сприяє активному навчанню та підвищенню мотивації.

Крім того, фрактальна геометрія дозволяє будувати міжпредметні зв'язки, що робить її особливо цінною для сучасного навчального процесу. У математиці вона пов'язана з геометричними перетвореннями, логарифмами, комплексними числами та ймовірністю, допомагаючи учням глибше зрозуміти ці поняття через їхні реальні застосування. У програмуванні фрактали відіграють важливу роль завдяки використанню рекурсивних алгоритмів, що сприяє розвитку алгоритмічного мислення та навичок кодування. У природничих науках вони допомагають пояснити структуру природних об'єктів і процесів, таких як розгалуження дерев, форма берегових ліній чи динаміка росту клітин. Водночас у мистецтві та дизайні фрактали використовуються для створення складних візерунків та аналізу естетичних закономірностей, що розширює можливості творчого вираження. Таким чином, фрактальна геометрія не лише поглиблює математичні знання, а й відкриває шлях до їхньої інтеграції в різні галузі науки та мистецтва.

З огляду на легкість інтеграції фрактальної тематики у шкільні курси та високий рівень зацікавленості учнів, факультатив із теорії фракталів стане не лише інструментом поглибленого вивчення математики, а й засобом розвитку

творчого мислення, здатності до аналізу та вирішення нестандартних задач. Він здатний слугувати своєрідним мостом між традиційною шкільною математикою та сучасними науковими підходами, забезпечуючи підготовку учнів до майбутніх викликів у різних галузях науки й технологій.

Аналіз методичної літератури з теми «Фрактали» поглибленому та профільному курсі математики показав, що ця тема має великий потенціал для розвитку математичного мислення та інтеграції сучасних математичних підходів. Усі ці аспекти потребують розробки сучасних і доступних методичних матеріалів, які б сприяли ефективному засвоєнню теми фракталів та її інтеграції у шкільний курс математики. Існуючі програми факультативних курсів для 9 та 11 класів охоплюють основні поняття фрактальної геометрії, але мають певні обмеження щодо глибини викладення матеріалу та доступності для учнів. Отже, подальше дослідження та адаптація теми «Фрактали» сприятиме не лише розвитку математичних компетентностей учнів, але й формуванню цілісного уявлення про застосування математики у різних галузях науки і техніки.

У зв'язку з цим доцільно розробити курс, адаптований для шкільної програми, який включатиме доступний виклад теоретичних основ, інтерактивні завдання та практичні вправи. Важливим є також створення методичних рекомендацій для вчителів, що полегшить викладання складних аспектів теми фракталів. Тому Ми пропонуємо факультатив «Світ фракталів».

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ІНТЕГРАЦІЇ ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ У МАТЕМАТИЧНУ ОСВІТУ

Ми пропонуємо почати вивчення теорії фракталів з теми геометричні фрактали, бо на основі цієї теми можна пояснити теми мультифрактали та стохастичні фрактали.

2.1. Геометричні (класичні) фрактали

Це найзвичніший нам вигляд фракталів. Геометричні фрактали будуються звичайними засобами евклідової геометрії, тобто на основі якоїсь геометричної фігури шляхом дроблення її частин та їх перетворення, через це є найнаочнішими. Тому ми пропонуємо більше уваги приділити найбільш наочним та доступним видам фракталів, тобто класичним (геометричним) фракталам.

Вивчення цієї теми спирається на вже здобуті знання та вміння учнів з тем шкільної програми. Розрахунок розмірності фракталів потребує знань та вмінь з теми «Показникова та логарифмічна функція», яка вивчається в 11 класі курсу алгебри [23].

Обчислення довжин, площ або об'ємів геометричних фракталів фактично зводиться до доведення рівності нулю або нескінченності цих величин із застосуванням формули суми нескінченної геометричної прогресії. Тобто для цього учні повинні знати тему «Числові послідовності» 9 класу курсу алгебри [23].

Геометричні фрактали є предметом достатньо серйозного наукового вивчення, але їх можна побачити, навіть не вивчаючи теорію фракталів. Багато геометричних фракталів можна намалювати буквально на папері в клітинку, це буде лише кінцевим наближенням нескінченних фракталів. Але завжди можна намалювати таке наближення, що око не розрізнятиме зовсім дрібні деталі й наша уява може добудувати картину фракталу. Наприклад, маючи досить великий аркуш міліметрового паперу та запас вільного часу, можна вручну намалювати таке точне наближення до якогось фракталу, що з відстані кілька метрів неозброєне око сприйматиме його як справжній фрактал.

Фрактали цього типу будуються поетапно. Спочатку зображується основа. Потім деякі частини основи замінюються фрагментом. На кожному наступному етапі ці фрагменти знову замінюються на фрагмент, взятий у відповідному масштабі. Щоразу масштаб зменшується. Коли зміни стають візуально непомітними, вважають, що побудована фігура добре наближає фрактал і дає уявлення про його форму. Для отримання самого фракталу потрібна нескінченна кількість етапів. Змінюючи основу та фрагмент, можна отримати багато різних геометричних фракталів.

Це потребує багато часу, тому ми пропонуємо ознайомити учнів з такою побудовою на прикладі одного або двох геометричних фракталів, для подальшого ознайомлення, вивчати їх в комп'ютерній програмі.

На нашу думку, обов'язково потрібно звернути увагу учнів на застосуванні цих фракталів у житті, наприклад для отримання зображень дерев, кущів, берегових ліній тощо.

Ми пропонуємо почати вивчення цієї теми з найпростішого фракталу – множини Кантора. Принцип побудови множини Кантора використовується при побудові багатьох інших геометричних фракталів.

У змісті запропонованого факультативу геометричні фрактали будуть вивчатися на прикладах таких фрактальних фігур: множина Кантора, крива Пеано, крива Коха, сніжинка Коха, трикутник Серпінського, килим Серпінського, крива Леві, крива Мінковського, дерево Піфагора та губка Менгера.

Ми пропонуємо вивчати ці фрактали за такою схемою:

Схема вивчення геометричних фракталів

- 1. Побудова геометричного фракталу**
 - 1.1.** Позначити основу фракталу.
 - 1.2.** Задати закон перетворення основи, який призведе до появи частин основи.

1.3. Застосувати закон перетворення до частин, які з'явилися після попереднього перетворення.

1.4. Застосовувати закон перетворення до частин, які будуть з'являтися після попередніх перетворень, замінюючи їх все новими та новими перетвореними частинами, так теоретично до нескінченності

2. Вивчення властивостей геометричного фракталу

2.1. Знайти розмірність та порівняти з топологічною розмірністю.

2.2. Поставити учням запитання: Якщо ми маємо фрактальну лінію з нескінченним периметром, як можливо, що площа, яку вона обмежує (або в межах якої вона розташована), залишається обмеженою (скінченною)?

2.3. Перевірити, чи є фрактальна лінія гладкою, чи в кожній своїй точці в неї є злам.

2.4. Виконати завдання для підготовки до наступної теми. (Чи можна перетворити дану фрактальну фігуру, щоб отримати новий фрактал?)

Приклади завдань для підготовки до наступної теми

2.4.1.1. Чи зміниться фрактал під назвою Канторовий пил, якщо на кожному кроці видаляти зьому центральну частину кожного відрізка?

2.4.1.2. Змінюючи процес побудови кривої Коха отримати новий фрактал.

2.4.1.3. Якщо перетворити дерево Піфагора за допомогою дзеркальної симетрії, як показано на рис. 2.1. Чи можна цю фігуру назвати фракталом? Якщо так, чи зміняться його властивості?

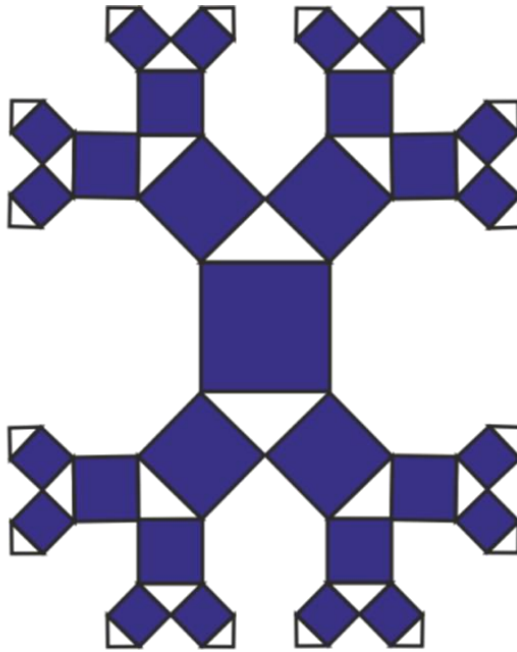


Рис. 2.1. дерево Піфагора у дзеркальній симетрії

2.2. Стохастичні фрактали

Фрактальні об'єкти повсюдно зустрічаються у природі. Тепер учні цілком обґрунтовано очікують побачити фрактальну модель практично у всьому, що оточує нас у зовнішньому світі. Моделі сніжинок, дерев, кущів, листя тощо. Звичайно, фігура сніжинки може одночасно служити моделлю берегової лінії острова, а дерево може бути використане для представлення анатомічних об'єктів, таких, як бронхіальне або артеріальне дерево.

Хоча кожен може розпізнати кленовий лист, фактично, жодні два листи не будуть точно подібні один до одного, вони як відбитки пальців людини.

Однією з причин такого стану речей є те, що випадковість є неодмінною властивістю реального світу. Звичайно, з великою ймовірністю можна припускати, що існує детермінований генетичний код для листа клена. Однак реальне зростання листа значною мірою залежить від таких факторів, як наявність води, сонячного світла, поживних речовин, а також хвороб та багатьох інших подібних впливів. Всі ці чинники докільля призводять до збурень у процесах зростання і, отже, визначають появу випадкових відмінностей у конфігураціях аркуша.

Тому запровадимо новий клас об'єктів для моделювання широкого спектра «природних фракталів»: гір, хмар, поверхонь лісових масивів та інших подібних геометричних конфігурацій.

З огляду на складність цієї теми, ми пропонуємо ознайомити учнів з рандомізованими геометричними фракталами та розглянути застосування броунівського руху. Вивчення теми стохастичні фрактали спирається на вже здобуті знання та вміння учнів з тем шкільної програми. Побудова деяких стохастичних фракталів потребує знань та вмінь з теми «Геометричні переміщення» 9 класу курсу геометрія. Розрахунок розмірності фракталів потребує знань та вмінь з теми «Показникова та логарифмічна функція», яка вивчається в 11 класі курсу алгебра [23].

Побудова цих фракталів не зводиться до випадкових збурень детермінованих фракталів. Навпаки, випадковий характер властивий їм спочатку, що з випадковими процесами.

Основною моделлю та головною темою є фрактальний броунівський рух – випадковий процес, широко поширений у природі. Але спершу ми пропонуємо коротко розглянути методи випадкових збурень, а потім перейти до броунівського руху.

Випадкові збурення

Ми можемо побудувати рандомізовану сніжинку Коха (рис. 2.3) , додаючи на кожному кроці рівносторонні трикутники до рис 2.2, звернені як усередину, так і назовні.



Рис. 2.2. Рандомізована сніжинка Коха (перша ітерація)

Якщо на кожному кроці ми зробимо вибір напрямку всередину або назовні випадковим, то в результаті отримаємо фрактальну криву, яка, як і раніше, має розмірність

$$D = \frac{\ln \ln 4}{\ln \ln 3} \quad (1)$$

Криві, одержані таким чином, можуть використовуватися для моделювання берегових ліній островів.

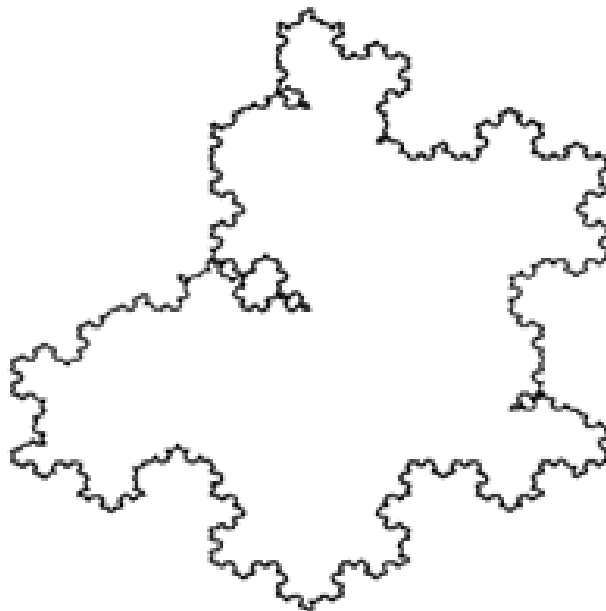


Рис. 2.3. Рандомізована сніжинка Коха

Сніжинка Коха не єдиний фрактал з яким можна так вчинити, наприклад, у разі трикутника Серпінського (рис. 2.4), при побудові якого зазвичай

видаляється середня з чотирьох трикутних областей, ми можемо випадковим чином видаляти будь-який із чотирьох трикутних областей.

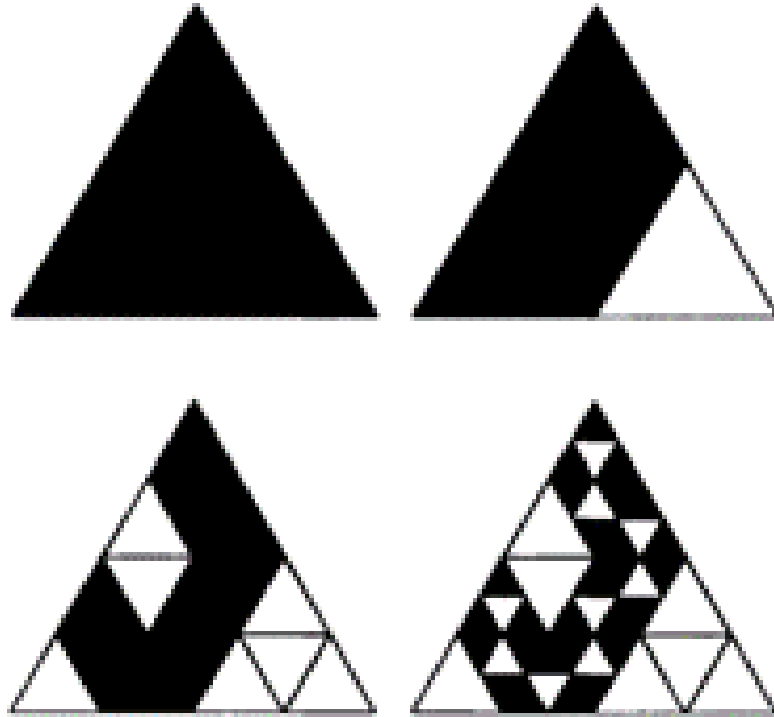


Рис. 2.4. Рандомізований трикутник Серпінського

Наведені приклади лише поверхово ілюструють предмет рандомізованих фрактальних побудов. Інші способи полягають у рандомізації параметрів, що використовуються в детермінованих конструкціях. Приклад рандомізації довжин інтервалів, що видаляються при побудові множини Кантора. Існує ряд глибоких теорем про розмірність фракталів, одержуваних таким чином. Ряд цікавих теорем визначає також властивості протікання фракталів типу рандомізованих килимів.

Броунівський рух

Найпростішим випадковим фрактал є траєкторія частки, що здійснює броунівський рух. Броунівський рух – безладний рух мікроскопічних видимих зважених в рідині або газі частинок твердої речовини, що викликається тепловим рухом частинок рідини або газу (*рис. 2.5*). Було відкрито у 1827 році Робертом Броуном.

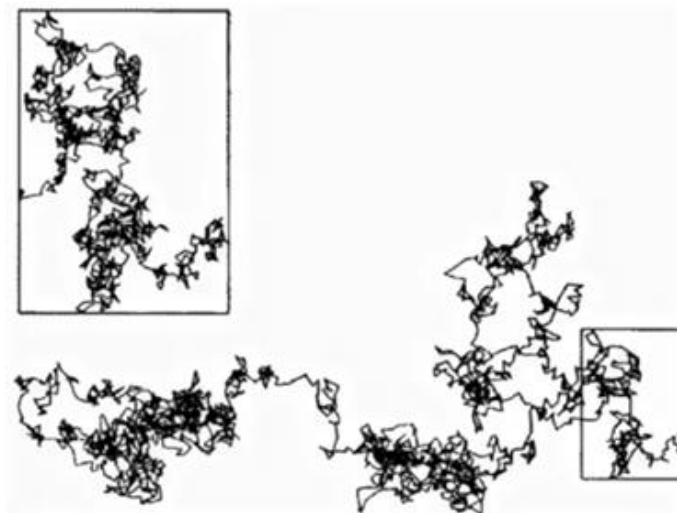


Рис. 2.5. Броунівський рух

Броунівський рух є наочним підтвердженням хаотичного теплового руху атомів і молекул, що є фундаментальним становищем молекулярно-кінетичної теорії.

Броунівський рух знаходить різноманітні практичні додатки: за його допомогою Мандельброт [42] передбачив ціни на шерсть, він знаходить застосування при створенні фрактальної музики, карт ліній узбережжя, островів, фрактальних зображень ландшафтів.

2.3. Алгебраїчні фрактали та мультифрактали

З огляду на те що учні старших класів, окрім 11 класу профільного рівня на основі поглибленого вивчення математики з 8 класу, не проходять у школі тему комплексних чисел, ми не можемо повною мірою вивчити теми алгебраїчних фракталів та мультифракталів.

Особливості змісту теми алгебраїчні фрактали

Алгебраїчні фрактали – це найбільша група фракталів. Отримують їх за допомогою нелінійних процесів у n -мірних просторах.

Будуються на основі математичних формул – їх можна перетворити на геометричні, якщо побудувати графіки на координатній площині. В результаті математичної обробки цієї формули на екран виводиться точка певного кольору. Результатом виявляється дивна фігура, в якій прямі лінії переходять у криві, з'являються ефекти самоподібності різних масштабних рівнях. Майже кожна

точка на екрані комп'ютера як окремий фрактал. Серед алгебраїчних фракталів можна виділити фрактали Мандельброта, Жюліа і басейни Ньютона. Всі вони будуються на множині комплексних чисел, які складаються з дійсної та уявної частини.

Тому в цій програмі пропонується поверхневе ознайомлення з алгебраїчними фракталами, зокрема на прикладі множини Мандельброта, а також для зацікавлення цією темою наводиться цікава історія виникнення цього фракталу.

Особливості змісту теми мультифрактали

З огляду на те, що мультифрактал – комплексний фрактал, який виходить за допомогою не одного будь-якого алгоритму побудови, а декількох алгоритмів, що послідовно змінюються. Тому Ми пропонуємо вивчати цю тему на прикладі мультифракталів, які складені з вже вивчених геометричних фракталів шляхом їх перетворення, зокрема мультифрактал, складений з двох трикутників Серпінського (рис. 2.6). Побудова деяких мультифракталів потребує знань та вмінь з теми «Геометричні переміщення» 9 класу курсу геометрія [23]. Тому актуальним буде пригадати тему геометричні фрактали.

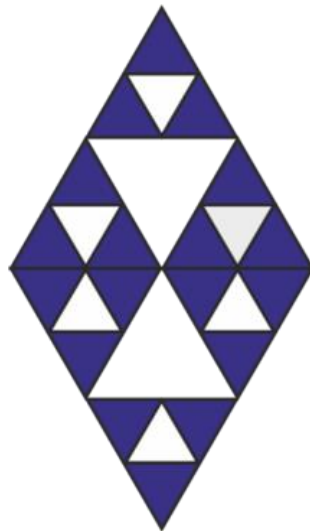


Рис. 2.6. Мультифрактал, складений з двох трикутників Серпінського

Об'єднувати та перетворювати геометричні фрактали для отримання мультифракталів можна з різною фрактальною розмірністю, наприклад

мультифрактал що складається із двох фракталів Серпінського різної розмірності (рис. 2.7).

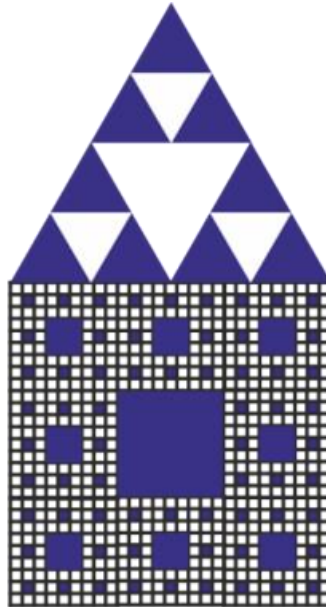


Рис. 2.7. Мультифрактал, складений з трикутника та килима Серпінського

2.4. Методичні рекомендації

Фрактальна розмірність

Існують різні типи фрактальної розмірності, зокрема розмірність самоподібності D_s , Хаусдорф-Безікович розмірність D_{HB} та коміркова (клітинна, ємнісна) розмірність D_c .

Проте, у нашому курсі ми радимо застосовувати коміркову розмірність з кількох причин:

- Вона придатна для обчислення фрактальної розмірності справжніх фізичних об'єктів, на відміну від D_s і D_{HB} , котрі використовуються переважно до ідеальних математичних фракталів.
- Метод підрахунку покривних комірок є універсальним і дозволяє аналізувати складні, нерівномірні структури.
- Цей підхід є практичнішим і доступнішим для обчислень, аніж інші методи, які потребують значних математичних обчислень або чіткого визначення об'єкта.

Таким чином, коміркова розмірність D_c є найефективнішою для аналізу реальних фрактальних структур, що робить її зручною та корисною в рамках нашого курсу (див. Додаток В).

Інтерактивні вправи

Для створення сприятливої атмосфери на уроці, зняття психологічної напруги та усунення комунікативного бар'єру, а також для забезпечення більш ефективної взаємодії між учнями та вчителем, важливо використовувати різні методи і прийоми. Ці прийоми допомагають учням налаштуватися на активну участь у навчальному процесі, сприяють вираженню емоцій та думок і підтримують фокус на навчальних завданнях. Тому ми пропонуємо ввести в навчальний процес вправу «Криголам».

Під «криголами» ми розуміємо методи та прийоми створення атмосфери довіри, організації відкритої багатосторонньої комунікації між суб'єктами освітнього процесу та концентрації уваги на моментах, діях, подіях тощо [16, с. 4]. Наша пропозиція полягає у використанні двох криголамів: перший на початку уроку для встановлення настрою учнів, а другий наприкінці уроку, прив'язаний до теми заняття, для допомоги учням у рефлексії [8].

Перший криголам проводиться на початку уроку та спрямований на встановлення настрою учнів, що дозволяє вчителю краще зрозуміти їхній емоційний стан і за необхідності скоригувати атмосферу заняття. Це досягається через використання візуального вибору: учням пропонується шість зображень дівчинки, кожна із яких передає певний настрій – від радісного й енергійного до спокійного чи задумливого. Завдяки цьому учні можуть легко і невимушено висловити свої емоції, навіть якщо їм складно зробити це словами (див. Додаток Г).

Крім самого вибору зображення, важливо, що кожна фотографія асоціюється з певним описом або настроєм, що допомагає учням усвідомити свої емоції й поділитися ними з класом. Наприклад, підписи можуть бути такі: «Сьогодні я готова до нових викликів», «Мені трохи складно зосередитися, але я намагаюся» (Див. рис. 2.8 та рис. 2.9). Це створює відкриту й довірливу

атмосферу, дозволяючи вчителю врахувати емоційний стан класу та відповідно адаптувати темп і стиль викладання. Такий підхід не лише сприяє кращій взаємодії між учнями та вчителем, а й допомагає зробити урок комфортнішим та ефективнішим (див. Додаток Д).



Рис. 2.8. Криголам 1

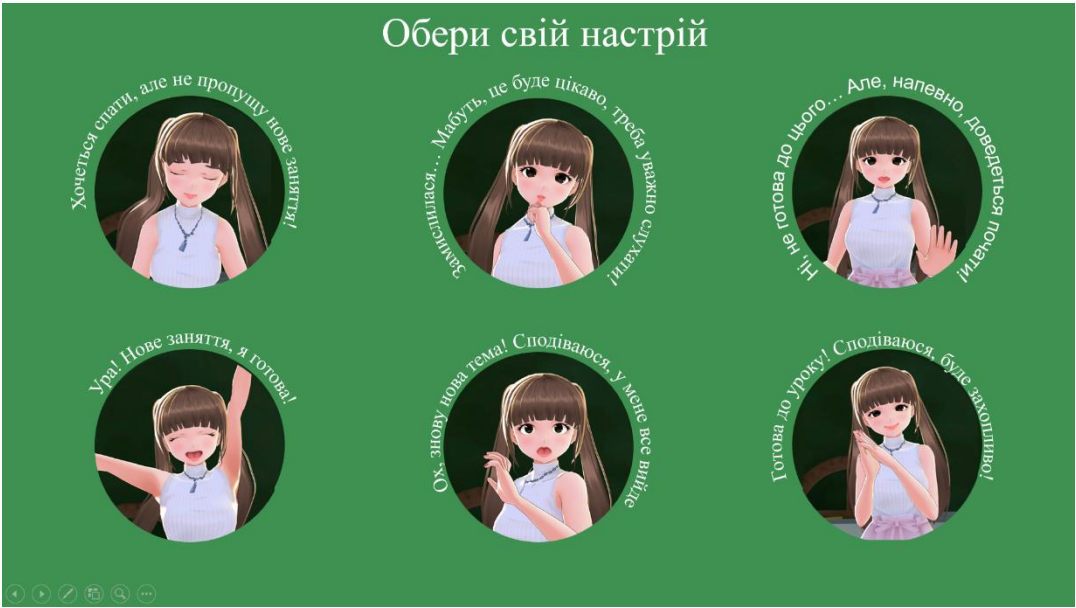


Рис. 2.9. Криголам 2

Другий криголам демонструється наприкінці уроку й пов’язаний із його темою. Він допомагає учням осмислити отримані знання, зробити рефлексію та ще раз закріпити ключові моменти заняття. У наведеному прикладі це реалізується через візуалізацію понять, оскільки учням пропонується шість

зображень різних фракталів, кожен із яких має особливі властивості та може бути пов'язаний із певним стилем мислення або життєвим підходом. Вибір серед них змушує учнів ще раз звернути увагу на вивчений матеріал і пригадати основні характеристики фракталів (див. Додаток Г).

Крім того, кожне зображення супроводжується підписом, що інтерпретує фрактал у контексті особистісного розвитку. Наприклад, папороть має опис: «Мій життєвий шлях повторює певні етапи, але кожен наступний рівень – це новий досвід», що може викликати асоціації з навчальним процесом або власними досягненнями. Інші варіанти можуть передавати ідеї зростання, стабільності, пошуку нових можливостей тощо. Таким чином, учні не просто вибирають фрактал, а й аналізують свої відчуття та стиль мислення через призму вивченої теми. Це сприяє глибшому осмисленню уроку, формуванню особистісного зв'язку з матеріалом і розвитку рефлексивного мислення.

Висновки другого розділу

Вивчення тем фрактальної геометрії у запропонованих методичних рекомендаціях спирається на вже здобуті знання та вміння учнів з тем шкільної програми. Аналіз змісту тем теорії фракталів з огляду на відповідність шкільному курсу математики виявив низку суттєвих методичних зауважень.

Зокрема, для побудови фракталів за допомогою повторюваних операцій, тобто ітерацій учні повинні засвоїти подібність фігур, обертання та паралельне перенесення. А гомотетія (збільшення та зменшення фігур) та симетрія стануть у нагоді при побудові та вивченні властивостей фракталів. Тобто, для ознайомлення з цією темою потрібно актуалізувати знання учнів з теми «Геометричні перетворення» (Курс геометрії 9 клас).

Обчислення довжин, площ або об'ємів фракталів фактично зводиться до доведення рівності нулю або нескінченності цих величин із застосуванням формули суми нескінченної геометричної прогресії. Тобто для цього учні повинні знати тему «Числові послідовності» 9 класу курсу алгебри.

Розрахунок розмірності фракталів потребує знань та вмінь з теми «Показникова та логарифмічна функція», яка вивчається в 11 класі курсу алгебри. Тому актуальним буде перед розглядом розмірності фрактала ввести поняття логарифму.

Також через складність тем теорії фракталів Ми пропонуємо ознайомлюватись з деякими темами поверхово. Наприклад, тему алгебраїчні фрактали не можна повною мірою опанувати, оскільки вона потребує навичок працювання з комплексними числами, а тема «Комплексні числа» вивчається лише в 11 класі профільного рівня з початком вивчення на поглибленому рівні з 8 класу. Вивчати тему стохастичні фрактали Ми пропонуємо на спрощених моделях, а саме на рандомізованих геометричних фракталах та броунівському русі. А тему мультифрактали вивчати на прикладі мультифракталів, які складені з вже вивчених геометричних фракталів шляхом їх перетворення.

РОЗДІЛ 3. ПРОЄКТУВАННЯ СКЛАДОВИХ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ СТАРШОКЛАСНИКІВ ОСНОВАМ ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ

3.1. Мета, завдання та очікувані результати навчання учнів 10 класів основам теорії фракталів

Мета і завдання курсу:

- розширити творчі здібності учнів;
- професійна орієнтація учнів;
- розвиток навичок дослідницької діяльності;
- формування уявлень про математику як частини загальнолюдської культури, розуміння значущості математики для соціального прогресу;
- підвищення інтересу до математичних знань;
- розвиток математичного мислення, кмітливості, ерудиції та кругозору;
- показати зв'язок математики з життям;
- формування вмінь використовувати комп'ютер для демонстрації краси математики.

Очікувані результати:

- формування інтересу до творчого процесу;
- розширення математичного світогляду;
- поповнення математичних знань;
- знайомство з геометричними, алгебраїчними, стохастичними фракталами та мультифракталами.

3.2. Форми та засоби навчання учнів 10 класів основам теорії фракталів

Структура факультативу «Світ фракталів»

Факультатив для учнів старшої школи розрахований на 30 годин, заняття проводяться дві години на тиждень. Основними формами роботи є лекції та

лабораторні роботи у комп'ютерному класі. Перевірка засвоєння матеріалу проводиться у формі самостійних робіт, а саме робіт із зображення геометричних фракталів. Підсумковий контроль можна проводити у формі конкурсу на зображення «власних» фракталів.

Курс складається з теоретичної частини (21 година), у якій передбачено проведення інтерактиву та лабораторного практикуму (9 годин).

Лабораторний практикум знайомить учнів з однією або декількома зі запропонованих комп'ютерних програм. Перші два заняття для ознайомлення з програмою. Інші лабораторні узгоджені з теоретичною частиною, більшою мірою, з теми геометричні фрактали. Така побудова практикуму дозволяє почати лабораторний курс наприкінці вивчення першої теми.

Засоби навчання учнів 10 класів основам теорії фракталів

Ми пропонуємо обрати програми для візуального представлення та більш детального вивчення фракталів.

Є кілька відмінних програм, за допомогою яких можна вивчати особливості фрактального всесвіту.

JWildfire (рис. 3.1, рис. 3.2). Ще одна кросплатформова (у тому числі з мобільною версією) програма, заснована на Java з відкритим вихідним кодом для обробки зображень. Вона відома переважно своїм складним генератором полум'яних фракталів.



Рис. 3.1. Скріншот з програми JWildfire [45]

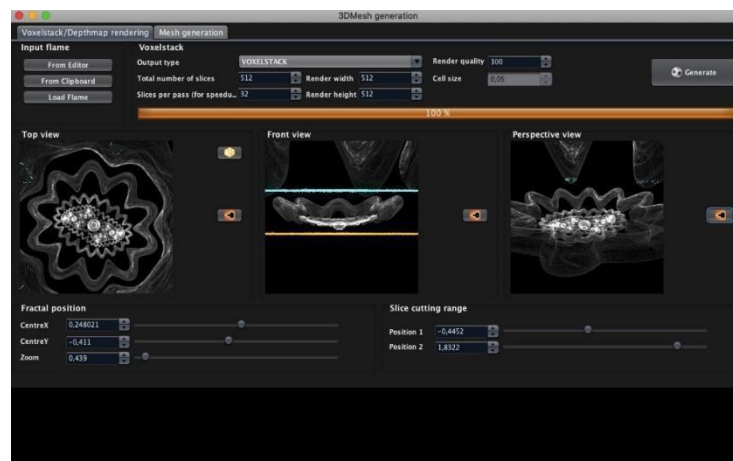


Рис. 3.2. Скріншот з програми JWildfire [44]

Mandelbulber | Mandelbulb3D (рис. 3.3) Чудові безкоштовний інструменти для створення тривимірних фракталів, таких як жахлива Оболонка Мандельброта, загадкова «коробка» Мандельбокс та ін.

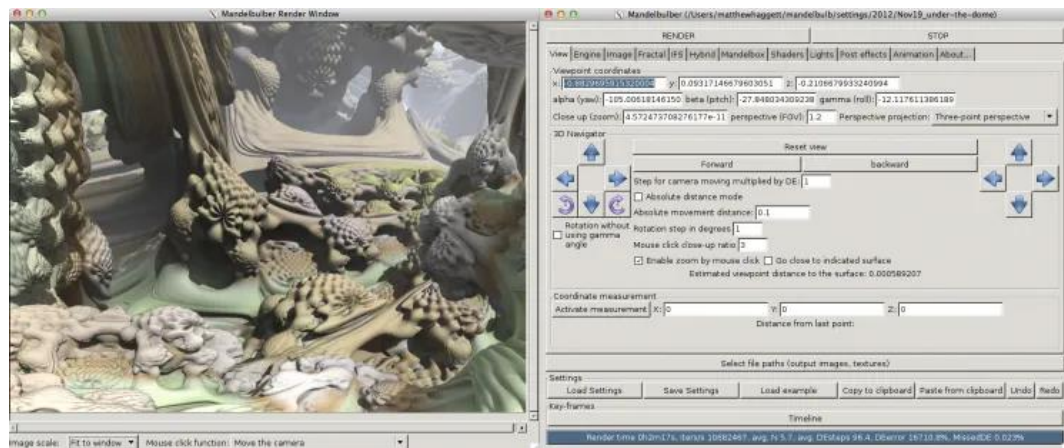


Рис. 3.3. Скріншот з програми Mandelbulber [43]

Ultra Fractal [51] (рис. 3.4) – це програмне забезпечення для створення та дослідження фрактального мистецтва зі зручним та інтуїтивно зрозумілим інтерфейсом. Програма дозволяє генерувати двовимірні фрактали різних видів, таких як множина Мандельброта, Юлія, Лямбда-фрактали та багато інших, з можливістю глибокого налаштування параметрів і шарів.

Ultra Fractal підтримує багатошарове редагування, що дає змогу комбінувати різні фрактальні формули і ефекти, створюючи унікальні складні композиції. Крім того, Ultra Fractal забезпечує потужний інструментарій для рендерингу зображень високої якості, підтримує масштабування без втрати деталізації і експортує результати у популярні графічні формати.

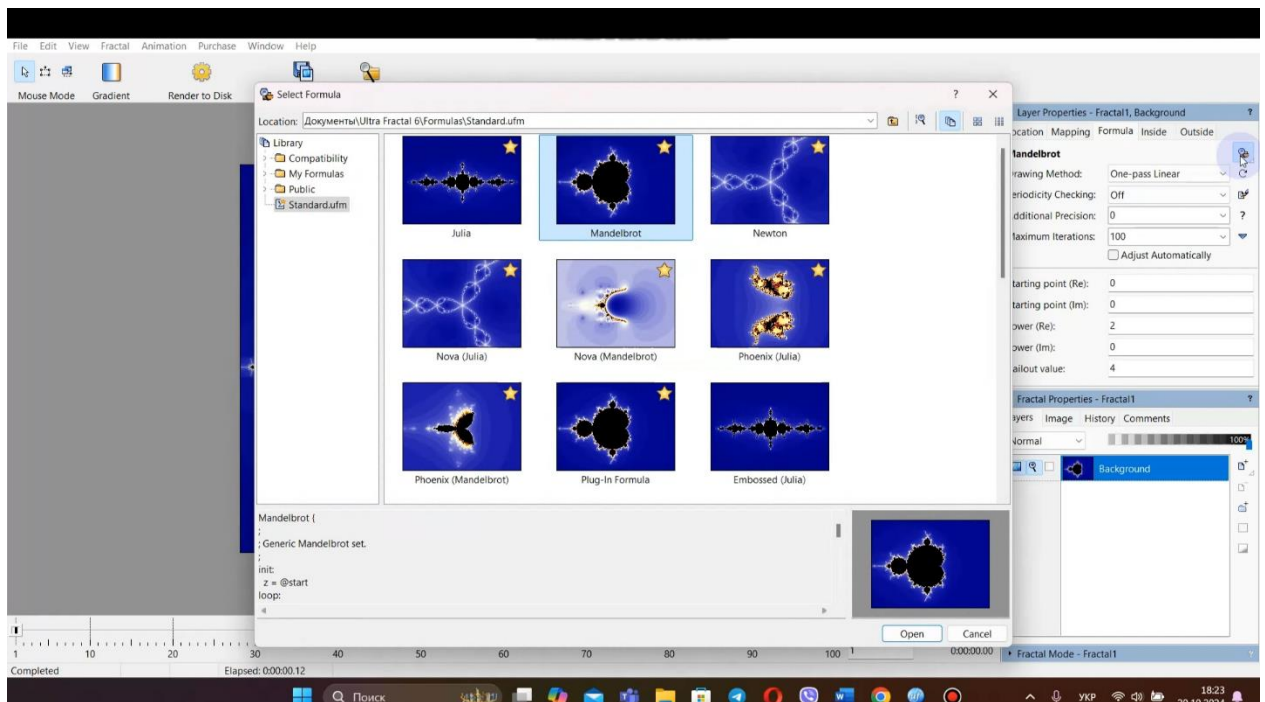


Рис. 3.4. Скріншот з програми Ultra Fractal

Incendia Fractals (рис. 3.5) – це програмний комплекс для створення та візуалізації тривимірних фракталів, розроблений художником та програмістом Раміро Пересом. Пакет містить декілька модулів, зокрема основну програму Incendia Next для генерації фракталів, Aural – для візуалізації звуку, а також утиліти для роботи з матеріалами, текстурами і освітленням. Incendia дозволяє створювати фрактальні структури на основі складних математичних алгоритмів, таких як IFS, Mandelbulb, Quaternion Julia та інших. Завдяки потужному вбудованому рендеру можна отримувати високоякісні зображення, змінювати кольорові палітри, налаштовувати відбиття, прозорість, освітлення та зберігати результати у форматах OBJ або STL для подальшого застосування чи 3D-друку. Програма має інтуїтивно зрозумілий графічний інтерфейс і надає широкі можливості для творчості. Incendia Fractals є безкоштовною для некомерційного застосування і активно використовується як у цифровому мистецтві, так і в освітніх цілях для вивчення фрактальної геометрії.

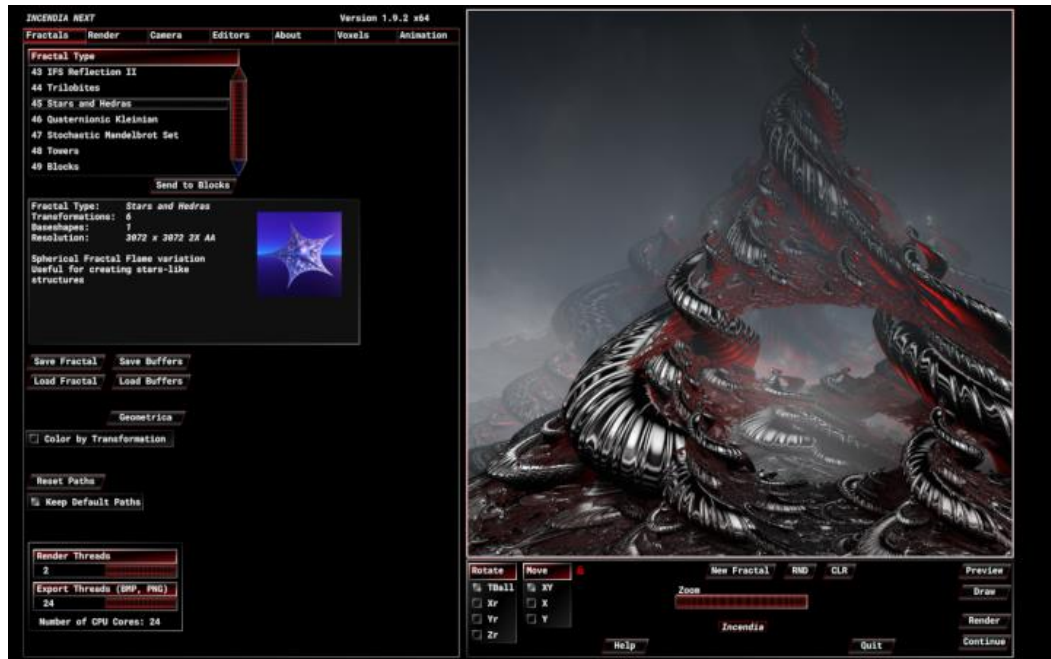


Рис. 3.5. Скріншот з програми Incendia Fractals [48]

На заняттях ми пропонуємо також використовувати програму PolyPad [46]. Це безкоштовна, інтуїтивно зрозуміла онлайн-дошка, яка не потребує реєстрації чи встановлення, що гарантує її легку інтеграцію в навчальний процес. PolyPad функціонує як віртуальний математичний майданчик із широким набором маніпулятивів та геометричних інструментів.

Ключовою перевагою PolyPad у контексті вивчення фракталів є можливість яскравої візуалізації та симуляції процесу ітерації. Замість абстрактних формул, учні 10 класу можуть «фізично» – за допомогою миші чи сенсорного екрану – створювати та змінювати геометричні фігури, спостерігаючи, як прості правила призводять до виникнення складних, самоподібних структур. PolyPad надає готові геометричні плитки, багатокутники та мозаїки, які можна використовувати як базові елементи для оперативного моделювання фрактальних візерунків. Це дозволяє демонструвати як вже готові фрактальні мозаїки для аналізу їхніх властивостей, так і безпосередньо будувати класичні фрактали шляхом послідовного застосування ітераційних кроків.

З огляду на зазначені переваги, Ми пропонуємо включити віртуальну дошку PolyPad як допоміжний інструмент для практичного моделювання на факультативі з фракталів. Зокрема, в межах факультативу планується

проведення лабораторної роботи на тему «Побудова Килима Серпінського у PolyPad». Ця робота є ілюстративним прикладом, що демонструє принцип самоподібності та ітерацій. У додатках до дипломної роботи для забезпечення успішного проведення цієї лабораторної роботи ми надаємо відеоінструкцію до роботи в PolyPad (Власного виробництва): Це короткий навчальний відеоролик, який наочно демонструє учням послідовність дій для побудови Килима Серпінського, починаючи від створення початкового квадрата і закінчуючи виконанням кількох ітерацій, з використанням вбудованих функцій PolyPad (різання, копіювання, видалення).

Як допоміжний, заохочувальний та естетичний засіб, радимо застосовувати програму WeaveSilk [53]. Це безкоштовна онлайн-програма для малювання, котра утворює симетричні, насичені візерунки, подібні до фрактальних мандал, завдяки застосуванню дзеркальної та ротаційної симетрії. Ключова перевага WeaveSilk полягає у її надзвичайній простоті: для створення складних і візуально привабливих зображень учням абсолютно не потрібно мати художніх навичок. З нею впорається будь-хто, оскільки програма автоматично застосовує математичні правила симетрії до простих рухів миші, гарантуючи миттєвий і вражаючий результат.

WeaveSilk чудово підходить для будь-якого етапу факультативу, починаючи від вступної мотивації, де вона показує візуальну привабливість та складність, що виникає з простих правил симетрії. Водночас, її функціональність дозволяє використовувати її в межах звичайних уроків математики як корисний інтерактивний елемент. Зокрема, вона допомагає учням візуалізувати та вивчати різні типи симетрії (осьової, поворотної), які досліджуються у курсі геометрії, слугуючи для вдосконалення візуального мислення та демонструючи міжпредметний зв'язок математики та мистецтва.

Для розширення кругозору учнів ми пропонуємо ознайомити їх з Aural [47] – це аудіоредактор, що генерує мелодії з використанням фрактальних алгоритмів, тобто це звуковий синтезатор-секвенсор. Для того, щоб працювати з

Aural, не потрібно вивчати теорію фракталів – досить просто змінювати параметри алгоритму генерування послідовності нот.

3.3. Календарне планування факультативу «Світ фракталів»

З огляду на теми, які потрібні для вивчення окремих елементів теорії фракталів. Даний спецкурс або факультатив, ми можемо пропонувати учням 10 класу, бо ці теми за чинною навчальною програмою вони вже вивчили.

Таблиця 3.1

Календарне планування факультативу

№ з/п	Тема	К-ть год.	Дата
	Тема 1. Фрактали	9	
1	Квазіфрактали	1	
2	Поняття та історія терміну	1	
3-4	Застосування фракталів	2	
5-6	Програми для вивчення фракталів	2	
7	Логарифм	1	
8-9	Фрактальна розмірність	2	
	Тема 2. Геометричні фрактали	15	
10	Поняття геометричного фракталу	1	
11-12	Канторів пил	2	
13-14	Крива Пеано	2	
15-16	Крива Коха	2	
17-18	Сніжинка Коха	2	
19-20	Трикутник Серпінського	2	
21-22	Килим Серпінського	2	
23-24	Крива Леві, крива Мінковського, дерево Піфагора та губка Менгера	2	
	Тема 3. Стохастичні та алгебраїчні фрактали та мультифрактали	6	
25	Поняття стохастичного (випадкового) фракталу	1	

Продовження табл. 3.1

26	Випадкові обурення	1	
27	Броунівський рух	1	
28	Поняття алгебраїчного фракталу	1	
29	Множина Мандельброта	1	
30	Приклади мультифракталів	1	

3.4. Апробація та експеримент

Робота має широку науково-методичну основу, що включає як теоретичні доробки, так і практичну апробацію.

Наукова база та апробація: Розроблена програма факультативного заняття «Фрактали: геометрія природи та мистецтва» була презентована та обговорена на наукових майданчиках. Зокрема, у рамках Днів науки БДПУ (2023 та 2025 років) були представлені результати теоретичного дослідження та розроблені матеріали для факультативу. Ця робота знайшла відображення у науковій статті «Методи впровадження фрактальної геометрії в навчальний процес і створення методичних матеріалів» (опублікованій у електронному науковому журналі «Суспільство та національні інтереси») [20] та трьох тезах доповідей: «Інтеграція фракталів у факультативне навчання старшої школи в контексті розвитку технологічної освіти в Україні» (опублікована у збірнику Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини) [34], яка детально описує структуру та зміст розробленої програми факультативу; «Аналіз методичної літератури з теми «Фрактали» у поглибленому та профільному курсах математики» [33] та «Фрактали у поглибленому курсі математики» [35] (опубліковані у збірнику тез наукових доповідей здобувачів вищої освіти Бердянського державного педагогічного університету на Днях науки 13 травня 2025 року). На базі факультету фізики, математики, інформатики та технологічної освіти Бердянського державного педагогічного університету було проведено ознайомче заняття у рамках Тижня математики 2023, розширений

варіант заняття «Фрактали: математична магія у природі та житті», доповненне інтерактивним квестом (створеному у Genially), був успішно реалізований під час Тижня математики 2025 року. Логічним продовженням цієї роботи та ключовим емпіричним етапом апробації розробленої методики став педагогічний експеримент, проведений в умовах шкільного освітнього середовища на базі Ліцею багатoproфільного міста Сіверськoдoнецькa Луганської області.

У зв'язку з цим, **метою емпіричного дослідження** було встановлення статистично значущого впливу факультативного заняття з елементами фрактальної геометрії на рівень навчальної мотивації учнів.

Для перевірки впливу експериментального чинника було сформульовано наступні гіпотези:

- Нульова гіпотеза (H_0): Немає статистично значущої різниці в рівні навчальної мотивації учнів до та після проведення факультативного заняття з елементами теорії фракталів.
- Альтернативна гіпотеза (H_1): Рівень навчальної мотивації учнів статистично значуще підвищився після проведення факультативного заняття з елементами теорії фракталів.

Для емпіричної перевірки гіпотези про ефективність інтеграції елементів фрактальної геометрії у навчальний процес було проведено формувальний експеримент з використанням дизайну порівняння двох залежних вибірок (вимірювання до і після експериментального чинника). Дослідження охопило 16 учнів 11 класів, які послідовно пройшли обидва етапи опитування. В якості інструментарію використовувалася адаптована анкета, що включала 12 ключових тверджень для оцінки когнітивного, емоційного та ціннісного компонентів навчальної мотивації, які оцінювалися за 5-бальною шкалою Лайкерта. Експериментальним чинником слугувало пробне факультативне заняття «Фрактали: математична магія у природі та житті» (див. Додаток Ж). На першому етапі аналізу було розраховано середній інтегральний бал мотивації,

який показав позитивну динаміку: середній бал до заняття становив $\bar{X} = 3.64$, а після заняття – $\bar{Y} = 4.02$, що свідчить про загальне підвищення рівня мотивації на 0.38 балів.

Результати чітко підтверджують ефективність запропонованої методики, особливо у сферах, де математика виступає як інструмент пізнання та моделювання.

Таблиця 3.2

Порівняльний аналіз середніх балів мотивації учнів (див. Додаток Б.)

Сумма балів					
Критерій 1	61	66	3,81	4,13	0,31
Критерій 2	67	68	4,19	4,25	0,06
Критерій 3	67	69	4,19	4,31	0,13
Критерій 4	53	69	3,31	4,31	1,00
Критерій 5	57	62	3,56	3,88	0,31
Критерій 6	55	64	3,44	4,00	0,56
Критерій 7	68	66	4,25	4,13	-0,13
Критерій 8	53	57	3,31	3,56	0,25
Критерій 9	42	43	2,63	2,69	0,06
Критерій 10	52	64	3,25	4,00	0,75
Критерій 11	57	69	3,56	4,31	0,75
Критерій 12	66	75	4,13	4,69	0,56

Найвищий приріст балів ($\Delta = +1,00$) зафіксовано у твердженні, що стосується світоглядного усвідомлення математичних закономірностей. Це доводить, що демонстрація фракталів успішно виконала функцію «мосту» між абстрактною математикою та реальністю, змусивши учнів «по-новому сприймати світ навколо» та зробивши предмет більш особистісно значущим. Високий приріст ($\Delta = +0,75$) у питаннях про практичне застосування математики та про допомогу математичних знань у розумінні інших предметів. Це свідчить про те, що учні почали цінувати математику як міждисциплінарний інструмент пізнання, а не як самоціль. Значне зростання ($\Delta = +0,56$) зафіксовано у питаннях ціннісної орієнтації («Я вважаю, що математика — це не лише формули, а спосіб мислення й розуміння світу.») та когнітивного інтересу («Мені

цікаво досліджувати, як математичні моделі описують реальні явища й процеси.»). Це підтверджує успішну реалізацію навчальної мети — демонстрації нестандартного та творчого боку математики, а також стимулювання дослідницької активності через моделювання. Позитивний приріст ($\Delta = +0,31$) отримано у твердженнях, що стосуються естетики («Я вважаю, що математика й мистецтво мають спільне розуміння краси та гармонії.»), логічного мислення («Математика допомагає мені мислити логічно, систематично та шукати нестандартні підходи до розв'язання задач.») та МПЗ ($\Delta = +0,25$) «Я бачу, що математичні принципи відображаються в природі, мистецтві та технологіях. Це підкреслює, що візуальна привабливість фракталів посилила сприйняття математики через призму краси та гармонії, а також підтвердила її роль як інструменту для структурування думки. Низький приріст за показниками аналітичні навички ($\Delta = +0,13$) та наміру ($\Delta = +0,06$) може бути пояснений тим, що ці аспекти мали відносно високі початкові бали, або ж вони вимагають більш тривалого впливу, ніж одне заняття. Єдине незначне зниження балу ($\Delta = -0,13$) зафіксовано у питанні початкового інтересу («Мені цікаво, звідки беруться складні геометричні форми в природі.»). Це може бути пояснене тим, що після отримання технічних знань про складність побудови фракталів, початковий емоційно-романтичний інтерес до природи міг трансформуватися в більш критичне усвідомлення складності матеріалу. Однак, цей невеликий спад цілком нівелюється значним зростанням за всіма іншими, більш глибокими мотиваційними компонентами.

Для визначення статистичної значущості цієї зміни застосовувався **t-критерій Стюдента для залежних вибірок**.

Таблиця 3.3

Дані для обчислення t-критерію за методом різниць

Учасник експерименту	середнє значення до заняття	середнє значення після заняття	d	d ²
1	4,50	5,00	0,50	0,25
2	4,75	4,75	0,00	0,00
3	2,92	3,58	0,66	0,44
4	4,25	4,50	0,25	0,06
5	3,08	3,33	0,25	0,06
6	3,50	4,08	0,58	0,34
7	3,67	3,92	0,25	0,06
8	3,25	3,42	0,17	0,03
9	3,42	3,83	0,41	0,17
10	4,17	4,42	0,25	0,06
11	3,17	3,50	0,33	0,11
12	3,58	4,42	0,84	0,71
13	3,17	3,50	0,33	0,11
14	4,25	4,92	0,67	0,45
15	3,58	4,08	0,50	0,25
16	2,92	3,08	0,16	0,03
Сума			6,15	3,12

$$\bar{d} = \frac{\sum (\underline{y} - \underline{x})}{n} = \frac{6,15}{16} \approx 0,38$$

(2) середнє значення різниці

$$Sd = \sqrt{\frac{\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{3,12 - \frac{(6,15)^2}{16}}{16 * 15}} \approx 0,06$$

(3) стандартне відхилення для різниць

$$df = n - 1 = 16 - 1 = 15$$

(4) число ступенів свободи

$$t_{\text{екс}} = \frac{\bar{d}}{sd} \approx \frac{0,38}{0,06} \approx 6,33$$

(5) емпіричне значення

$$t_{\text{кр}} = \begin{cases} 1,75 \text{ для } p \leq 0,1; \\ 2,13 \text{ для } p \leq 0,05; \\ 2,95 \text{ для } p \leq 0,01; \\ 4,07 \text{ для } p \leq 0,001. \end{cases}$$

(6) критичне значення знайдене за таблицею

$$6,33 > 4,07 \Rightarrow t_{\text{екс}} > t_{\text{кр}} (p = 0,001)$$

(7)

Обчислення дало емпіричне значення $t_{\text{екс}}$ при числі ступенів свободи $df = 15$, це значення значно перевищує критичне значення $t_{\text{кр}}$ для рівня значущості $p \leq 0,001$. Отже, виявлене підвищення мотивації є **статистично високодостовірним**, що дозволяє відхилити нульову гіпотезу H_0 та підтвердити ефективність розробленої методики на 0,1% рівні значущості прийняти альтернативну гіпотезу H_1 .

3.5. Огляд сайту факультативного курсу «Світ фракталів»

У рамках практичної частини дослідження для підвищення ефективності та надання вичерпної та структурованої інформації факультативного курсу «Світ фракталів» було створено спеціалізований освітній вебсайт [30].

Створений сайт має п'ять навігаційних розділів:

1. «Головна» – основна сторінка з наданням стислих огляду та актуальності курсу.

2. «Про нас» – сторінка містить визначення курсу як «навчального факультативу для учнів 10 класів, спрямованого на ознайомлення зі світом фрактальної геометрії в доступній, захопливій та практично орієнтованій формі», опис факультативу: мету («сформувати уявлення про фрактали, розвинути навички моделювання та мотивувати до вивчення»), структуру (тривалість 30 годин), перелік необхідних знань (геометричні перетворення, послідовності, показникова та логарифмічна функція) та цільову аудиторію

(майбутні IT-спеціалісти, дизайнери, математики та інші) [30].

3. «Зареєструватися» – містить форму для запису на курс.
4. «Контакти» – забезпечує канали для зворотнього зв'язку.
5. «Замкнута сторінка» – основний дидактичний простір з обмеженим доступом тільки після реєстрації.

Опис розділу «Замкнута сторінка»

«Замкнута сторінка» створена як закрите навчальне середовище, яке поділено на три функціональні зони.

Перша зона, «Практична діяльність», містить посилання на Google Диск де знаходяться матеріал для лабораторних, практичних, що супроводжується відеоінструкціями, та проєктних робіт. Також розміщені посилання на інтерактивні навчальні елементи, такі як вебквест на платформі Genially та інтерактивні аркуші для контролю знань за всіма основними теоретичними блоками факультативу «Світ фракталів»: «Вступ», «Геометричні фрактали», «Стохастичні фрактали» та «Алгебраїчні фрактали».

Друга зона, «Матеріали до курсу», забезпечує теоретичну підтримку, надаючи доступ до бази у Google Диск з конспектами лекцій, які супроводжуються презентаціями та навчальною інфографікою.

Третя зона, «Додатково», має посилання на корисні ресурси та опис спеціалізованого програмного забезпечення.

Висновки третього розділу

Підготовча фаза дослідження охоплювала повну розробку необхідного науково-методичного забезпечення: мету, методи, засоби, очікувані результати та програму факультативного курсу «Світ фракталів». Ці методичні доробки стали основою для проведення апробації та експерименту, метою якого було емпіричне підтвердження ефективності розробленої методики викладання основ теорії фракталів.

Аналіз результатів педагогічного експерименту проведенного на базі Ліцею багатoproфільного міста Сіверськодонецька Луганської області, а саме змін за 12 критеріями показав, що найбільший приріст (на +1 та +0.75 балів) зафіксовано за твердженнями, що відображають ціннісний та естетичний компоненти мотивації, що свідчить про успішність використання фракталів як інструменту для демонстрації прикладної цінності та краси математики.

Статистичний аналіз за допомогою t-критерію Ст'юдента показав, що отримане емпіричне значення $t_{\text{екс}}$ значно перевищує табличне, тому ми зробили висновок про ефективність пробного факультативного заняття **«Фрактали: математична магія у природі та житті»** з факультативу «Світ фракталів» є ефективним.

Крім того, широка наукова апробація методики (у рамках Тижнів математики та Днів науки БДПУ 2023 та 2025 років, а також публікації у науковій статті: «Методи впровадження фрактальної геометрії в навчальний процес і створення методичних матеріалів» опублікованій у електронному науковому журналі «Суспільство та національні інтереси» та тезах: «Інтеграція фракталів у факультативне навчання старшої школи в контексті розвитку технологічної освіти в Україні» опублікована у збірнику Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини; «Аналіз методичної літератури з теми «Фрактали» у поглибленому та профільному курсах математики» та «Фрактали у поглибленому курсі математики» опубліковані у збірнику тез наукових доповідей здобувачів вищої освіти Бердянського державного педагогічного університету на Днях науки 13 травня 2025 року підкреслюють її

практичну значущість та готовність до впровадження в освітній процес. Також у рамках магістерської роботи був розроблений сайт для структурного подання матеріалів та інформації по курсу «Світ фракталів».

ВИСНОВКИ

Фрактальна геометрія, як розділ сучасної математики, має не лише теоретичне, а й велике практичне значення. Проведене дослідження підтвердило, що фрактали є перспективною темою для вивчення у шкільному курсі математики. Її включення дозволяє не лише урізноманітнити зміст шкільної математичної освіти, але й сформувати в учнів нові підходи до аналізу математичних об'єктів та процесів, які мають складну, нерегулярну структуру. А її поєднання з класичними розділами шкільної програми дає змогу сформувати цілісне математичне мислення, розвивати інтерес до предмета, урізноманітнити методику навчання і зробити математику ближчою до сучасної науки та практики.

У першому розділі магістерської роботи було здійснено теоретичний аналіз наукової та методичної літератури з теми фрактальної геометрії, а також освітніх програм, де ця тема вже реалізована у вигляді факультативних курсів та гурткових занять. Вивчення праць зарубіжних та вітчизняних науковців, таких як Бенуа Мандельброт, Майкл Барнслі, Річард Крауновер, Кеннет Фалконер, В.М. Горобець, М.В. Працьовитий, О.В. Мартинюк та інших, дало змогу виділити ключові підходи до викладання фрактальної тематики. Було встановлено, що фрактали не лише наочно демонструють складні математичні ідеї, але й дають змогу формувати міжпредметні зв'язки, особливо з інформатикою, фізикою, біологією та навіть мистецтвом.

У результаті аналізу чинних програм факультативних курсів: «Фрактали» для 9 класу та «Введення у фрактальний аналіз» для 11 класу встановлено, що вони мають низку недоліків зокрема відсутність методичних рекомендацій для вчителів. Також важливо врахувати, що 9 та 11 класи – це період підготовки до державної підсумкової атестації (ДПА) та зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО)/національного мультипредметного тесту (НМТ), тому додаткове навантаження у вигляді факультативного курсу може бути надмірним для учнів. Водночас, як засвідчує досвід вітчизняних освітніх ініціатив (зокрема, Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів членів

МАН, спеціалізованих занять у математичних гуртках та інші ініціативи), інтерес учнів до фракталів є високим, а навчальні результати – значними.

У другому розділі роботи було проведено змістовний аналіз тем теорії фракталів на відповідність шкільному курсу математики. Пропонується почати вивчення теорії фракталів з теми геометричні фрактали, бо на основі цієї теми можна легше пояснити теми мультифрактали та стохастичні фрактали.

Встановлено, що опрацювання понять фрактальної геометрії базується на знаннях і вміннях, які учні здобувають у 9 та 11 класах. Так, побудова фракталів передбачає засвоєння понять теми «Геометричні перетворення» – подібності, поворот, паралельного перенесення, симетрія відносно прямої та відносно точки, гомотетії. Розрахунок площ, довжин та об'ємів фрактальних об'єктів ґрунтується на використанні формул для суми нескінченної геометричної прогресії, що вивчається у темі «Числові послідовності». Поняття фрактальної розмірності пропонується вивчати за спрощеним але більш точним методом ніж розмірність Хаусдорфа-Безиковича. Це поняття «Клітинкова розмірність» безпосередньо пов'язане з темою «Показникова та логарифмічна функція», а саме з поняттям логарифм, яке вводиться у другому семестрі 11 класу у курсі алгебри, через завантаженість 11 класу підготовкою до ЗНО/НМТ у методичних рекомендаціях вказано, що доцільним буде пояснити поняття логарифму окремо на початку вивчення теми фрактальна розмірність.

Що стосується складніших розділів – таких як алгебраїчні, мультифрактали чи стохастичні фрактали – вони, згідно з аналізом, можуть бути подані на базовому ознайомчому рівні. Зокрема, через спрощені приклади або через застосування візуалізації та комп'ютерного моделювання, особливо в частині стохастичних фракталів, пов'язаних з випадковими процесами (напр., броунівським рухом).

Методичні рекомендації, розроблені на основі аналізу літератури і програм, акцентують увагу на необхідності поетапного ознайомлення учнів із темами фрактальної геометрії та зосереджені переважно на практичному вивченні фракталів. У них визначено, з яких типів фракталів доцільно починати

знайомство учнів із темою, охарактеризовано основні властивості, які варто досліджувати у шкільному курсі. Також подані зразки навчальних завдань. Питання введення понятійного апарату або етапів актуалізації знань висвітлюються обмежено.

Статистичний аналіз за допомогою t-критерію Стюдента для залежних вибірок виявив високодостовірну ефективність розробленої методики. Крім емпіричного підтвердження, широка наукова апробація методики (зокрема, у рамках Тижнів математики та Днів науки БДПУ, а також публікації у науковій статті та тезах доповідей) підкреслює її практичну значущість, валідизацію науковою спільнотою та готовність до негайного впровадження в освітній процес.

Також у рамках магістерської роботи був розроблений сайт факультативного курсу «Світ фракталів», на якому зібрані та структуровані всі розроблені методичні матеріали та інформація стосовно цієї теми.

Таким чином, результати магістерської роботи свідчать про високу дидактичну та навчально-методичну цінність фрактальної геометрії. Її вивчення сприяє розвитку математичної грамотності, логічного та алгоритмічного мислення, формує навички аналізу, узагальнення, застосування знань у практичних ситуаціях. Змістовне впровадження тем фрактальної геометрії у шкільну математику є важливим кроком до модернізації освіти та забезпечення її зв'язку з реальними науковими і технологічними викликами сучасності.

ДЕКЛАРАЦІЯ ВИКОРИСТАННЯ ІІІ

Розкриття факту делегування завдань генеративному ІІІ

Автори заявляють про використання генеративного ІІІ у процесі дослідження та підготовки рукопису. Відповідно до таксономії GAIDeT (2025), наведені нижче завдання були делеговані інструментам генеративного ІІІ за повного людського нагляду:

- Вичитування та редагування
- Адаптація та коригування емоційного тону
- Переклад
- Реформатування

Використаний інструмент генеративного ІІІ: ChatGPT, Gemini.

Повну відповідальність за фінальний рукопис несуть автори.

Інструменти генеративного ІІІ не зазначаються як автори та не несуть відповідальності за кінцеві результати.

Декларацію подав(ла): Лілія Шакірова [54].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ачкан В. В. Використання творчої спадщини вітчизняних математиків у позакласній роботі в старшій школі. *Педагогічні науки: реалії та перспективи*. 2013. Вип. 40. С. 7-11.
2. Бевз В. Г. Практикум з історії математики: навч. посіб. для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Київ, НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2008. 312 с.
3. Бевз В. Г. Програма факультативного курсу для учнів 7-9 класів «Історія математики». Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання: у 2 частинах. Харків: Ранок, 2011. Ч. 1. С. 108-116.
4. Без автора. Скріншот з програми Incendia Next [Зображення]. Incendia.net. URL: https://www.incendia.net/img/IncendiaNEXT_192.png (дата звернення: 21.06.2025)
5. Без автора. Скріншот із фракталу Mandelbulb [Зображення]. Mandelbulb.com. URL: https://i0.wp.com/www.mandelbulb.com/wp-content/uploads/2012/11/manedlbulber_mandelbulb_render_3D_fractals-2WEBLG.jpg?resize=742%2C311&ssl=1 (дата звернення: 21.06.2025)
6. Без автора. Mandelbulber: офіційний сайт програми для генерації фракталів. URL: <https://www.mandelbulb.com> (дата звернення: 21.06.2025)
7. Бондаренко В. А., Дольников В.Л. Фрактальне стиснення зображень за Барнслі-Слоаном. *Автоматика і телемеханіка*. 1994. N5. с.12-20.
8. Борзик О. Б., Молчанюк О. В. Упровадження «криголамів» в освітній процес педагогічних закладів фахової передвищої та вищої освіти за умов дистанційного навчання PEDAGOGY. MODERN AND GLOBAL METHODS OF THE DEVELOPMENT OF SCIENTIFIC THOUGHT: зб. наук. пр.: матеріали міжнар. наук.-практ. конф. (Флоренція, Італія, 25–28 жовт. 2022 р.). – 2022. – С. 381–388. – URL: <https://scispace.com/pdf/modern-and-global-methods-of-the-development-of-scientific-39fbrf4.pdf> (Дата звернення: 13.11.2025).

9. Бурчак С. О., Конопля В. О. Методичне забезпечення елективного курсу «Фрактали». *Наукові записки НДУ ім. М. Гоголя*. Ніжин, НДУ ім. М. Гоголя. С. 112-117.
10. Ватолін Д. Застосування фракталів в машинній графіці. *Computer World-Україна*. 2015. N15. с.11.
11. Власенко К. В. Фрактал. *Математика*. 2002. №14. С. 1, 4-5.
12. Власенко О. І. Методика викладання математики: заг. питання: навч. посіб. для студентів фіз -мат. ф-тів пед. ін-тів. Київ: Вища школа, 1974. 206 с.
13. Горобець Ю., Вавилова І., Кучко А. Фрактальна геометрія у природознавстві. К.: Наукова думка, 2008. С 232.
14. Канакіна Л. П. Програма курсу за вибором для учнів 9 класу математичного профілю «Фрактали». Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання: у 2 частинах. Харків: Ранок, 2011. Ч. 1. С. 235-238.
15. Котова О. В. Роль спецкурсу "фрактали в математиці" у професійній підготовці майбутніх вчителів математики. *Науковий вісник Ужгородського національного університету*. 2013. Серія: Педагогіка. Соц. робота, № 26. С. 106–107.
16. Криголами: практ. посіб. / уклад. О. Борзик; Комунальний заклад «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради. – Харків, 2019. – 118 с
17. Кузьмін Г. Фрактали навколо нас. *Машини та механізми*. 2020. №173.
18. Лабенко В. А. Нелінійні фрактальні системи в англійській мові та їх застосування у навчальному процесі. *Наукові записки*. Серія: Педагогічні науки. Кіровоград, 2015. Вип. 132. С. 97–102
19. Лабенко О. В. Стохастичний педагогічний процес – як основа композитної педагогічної технології викладання англійської мови для слухачів

мовних курсів. *Наукові записки*. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. 2016. Вип. 9 (III). С. 97–104.

20. Лаврик В.В., Алексєєва Г.М., Шакірова Л.Т., Овсянніков О.С. Методи впровадження фрактальної геометрії в навчальний процес і створення методичних матеріалів. Електронний науковий журнал “Суспільство та національні інтереси”. Номер 4(12). № 4(12). 2025. С. 228-236. [https://doi.org/10.52058/3041-1572-2025-4\(12\)-228-236](https://doi.org/10.52058/3041-1572-2025-4(12)-228-236)

21. Мартинюк О.В., Правіцка Н.С., Працьовитий М. В. Геометричні перетворення в математичній освіті школярів і майбутніх учителів математики. Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання: матеріали Всеукр. науково-практ. конф., м. Київ, 18-20 січ. 2023 р. Київ, 2023. С. 141–143.

22. Набитович І. Й. Фрактали та фрактальні структури у художньому тексті (на прикладі прози Л. Керрола, К. С. Льюїса та Х. Л. Борхеса) *Вісник Львівського університету. Серія: Іноземні мови.* – 2011. – Вип. 18. – С. 42-51.

23. Навчальні програми з математики 10-11 клас. URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (дата звернення: 25.02.2025).

24. Працьовитий М. В. Аномально фрактальні і суперфрактальні об'єкти. *Наук. зап. КДПІ ім. М. П. Драгоманова*. Київ, КДПІ ім. М. П. Драгоманова, 1992. С. 309-310.

25. Розов Н. Х. Курс математики загальноосвітньої школи: сьогодні і післязавтра. Завдання в навчанні математики: теорія, досвід, інновації: матеріали Всеукр. Наук.-практ. Конф., присв. 115-річчя чл.-кор. АПН СРСР П.А. Ларичева. Вінниця: Країна, 2017. С. 6-12.

26. Роменець Володимир. Історія психології: Стародавній світ. Середні Віки. Відродження / Володимир Роменець. - К.: Либідь, 2005, с. 471.

27. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підруч. для студ. мат. спец. пед. навч. закл. К.: Зодіак-ЕКО, 2000. 511 с.

28. Тестов В.А. Про проблеми змісту сучасної математичної освіти.

Сучасна математика і математична освіта в вузах і школах України: досвід, тенденції, проблеми: межвуз. зб. наук.-метод. робіт. Вінниця: Країна, 2016. С. 5-8.

29. Туманян Т. С. Ми думаємо про завтра, тому обираємо stem сьогодні. Шляхи удосконалення професійних компетентностей фахівців в умовах сьогодення: матеріали міжнар. наук.-практ. інтернет конф. (28-29 трав. 2020 р., м. Київ) Луцьк: СНУ ім. Лесі Українки, 2020. С. 223–226.

30. Факультатив «Світ фракталів»: освітній вебсайт. URL: <https://fakultativ-svit-fraktaliv.webnode.com.ua/> (Дата звернення: 13.11.2025).

31. Цибко В. В. Програма курсу за вибором для учнів 11 класів з профільним і поглибленим вивченням математики «Введення у фрактальний аналіз». Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання: у 2 частинах. Харків: Ранок, 2011. Ч. 2. С. 355-361.

32. Шкільний О. І. Вивчення елементів теорії фракталів у школі. *Математика у школі.* 2004. №9. С. 42-48.

33. Шакірова Л. Т. Аналіз методичної літератури з теми «Фрактали» у поглибленому та профільному курсах математики: теза доп. // Збірник тез наукових доповідей здобувачів вищої освіти Бердянського державного педагогічного університету на Днях науки 13 травня 2025 року. Т. 3: Природничі науки. – Запоріжжя: БДПУ, 2025. – С. 60–64.

34. Шакірова Л. Т. Інтеграція фракталів у факультативне навчання старшої школи в контексті розвитку технологічної освіти в Україні. Актуальні проблеми професійної та технологічної освіти: погляд у майбутнє: матер. Всеукр. студ. наук.-практ. конф. (Умань, 10 жовтня 2024 р.) / МОН України, Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини; за заг. ред. С. І. Ткачука; [редкол.: Н. В. Дубова, Т. Н. Азізов, А. І. Терещук, О. С Мельник]. Умань, 2024. с. 334-336.

35. Шакірова Л. Т. Фрактали у поглибленому курсі математики: теза доп. // Збірник тез наукових доповідей здобувачів вищої освіти Бердянського державного педагогічного університету на Днях науки 13 травня 2025 року. Т. 3:

Природничі науки. – Запоріжжя : БДПУ, 2025. – С. 65–67.

36. Barnsley M. Fractals Everywhere, Academic Press, 1988. URL: http://lib.ysu.am/open_books/418197.pdf (дата звернення: 11.05.2025).
37. Cambini R. Raiteri A. C. “L’uso didattico del materiale presente in rete: un caso I frattali”. Quaderni di Ricerca in Didattica, G.R.I.M. Department of Mathematics, University of Palermo, Italy. №14. 2004. URL: https://sites.unipa.it/grim/quad14_codetta_it.pdf (дата звернення: 12.05.2025)
38. Cynthia Lanius A fractals unit for elementary and middle school students. Rice University.
39. Devaney R.L. Fractals. A First Course in Chaotic Dynamical Systems. 2020. P. 182-210. URL: <https://www.taylorfrancis.com/chapters/mono/10.1201/9780429280665-14/fractals-robert-devaney> (дата звернення: 11.05.2025).
40. Falconer K.J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. John Wiley and Sons Ltd, 2014.
41. Feldman D. Chaos and Fractals: An Elementary Introduction. Oxford University Press, 2012. 432 p.
42. Mandelbrot B. The fractal geometry of nature. New York: W.H. Freeman, 1983. 468 p.
43. Mandelbulber Fractal Rendering Software. Mandelbulb.com. 2012. [Зображення]. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://www.mandelbulb.com/2012/11/3d-fractal-rendering-mandelbulber/manedlbulber_mandelbulb_render_3d_fractals-2web1g/#main (дата звернення: 13.11.2025).
44. Maschke A. (2020). Скріншот із програми JWildfire [Зображення]. Steam. URL: https://shared.akamai.steamstatic.com/store_item_assets/steam/apps/1445310/ss_588cbffa2720ceb90365e5cedcf2513dfe726c9c.1920x1080.jpg?t=1604086669 (дата звернення: 21.06.2025)

45. Maschke A. (2020). Скріншот із програми JWildfire [Зображення]. Steam. URL: https://shared.akamai.steamstatic.com/store_item_assets/steam/apps/1445310/ss_84663b02a1912c2c3ab0318aa08ec85a982bf1ff.1920x1080.jpg?t=1604086669 (дата звернення: 21.06.2025)
46. Polypad – The Mathematical Playground. Amplify Education. 2025. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://polypad.amplify.com> (дата звернення: 13.11.2025).
47. Pérez R. Aural: офіційний сайт програми для генерації фракталів. URL: <https://www.incendia.net/aural.php> (дата звернення: 21.06.2025)
48. Pérez R. Incendia Fractals. [Зображення]. Режим доступу: https://www.incendia.net/img/IncendiaNEXT_192.png (дата звернення: 13.11.2025).
49. Raiteri A. C. An action research on line to introduce fractals in the teaching and learning of mathematics from primary to secondary school. OPPI. Milano. URL: <http://www.codetta.it/appuntamenti/cieaem05.pdf> (дата звернення: 25.04.2023)
50. Raiteri A. C. “Fractals as didactic material”. CIEAEM 55 Proceedings, in “Quaderni di ricerca didattica” of GRIM. n 14. 2004. P. 160-167. URL: https://www.academia.edu/64630653/Fractals_as_didactic_material (дата звернення: 25.04.2023)
51. Raiteri A. C. Una ricerca-azione on line per introdurre i frattali nell'insegnamento di matematica. OPPI. Milano. URL: http://www.maecla.it/ricerca_azione/relazione_montevarchi.pdf (дата звернення: 25.04.2023)
52. Schroeder M. Fractals, chaos, power laws: Minutes from an infinite paradise. New York: W. H. Freeman, 1991. 429 p.
53. Silk – Interactive Generative Art. Вішневський, Ю. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://weavesilk.com> (дата звернення: 13.11.2025).
54. Suchikova, Y., Tsybuliak, N., & Teixeira da Silva, J. A. & Nazarovets,

S. GAIDeT (Generative AI Delegation Taxonomy): A taxonomy for humans to delegate tasks to generative artificial intelligence in scientific research and publishing. Accountability in Research, in press. 2025. DOI: <https://doi.org/10.1080/08989621.2025.254433158>.

ДОДАТКИ

Додаток А. Анкета для визначення мотивації до вивчення математики

У цій анкеті представлено твердження, що стосуються вашого ставлення до математики, інтересу до предмета та мотивованості до навчання. Будь ласка, оцініть кожне твердження за шкалою від 1 до 5, де 1 означає повну незгоду «Повністю не згоден(на)», а 5 — повну згоду «Повністю згоден(на)».

1. Математика допомагає мені мислити логічно, систематично та шукати нестандартні підходи до розв'язання задач.
2. Вивчення математики розвиває мою здатність аналізувати й бачити закономірності у складних ситуаціях.
3. Я бачу, що математичні принципи відображаються в природі, мистецтві та технологіях.
4. Розуміння математичних закономірностей допомагає мені по-новому сприймати світ навколо.
5. Я вважаю, що математика й мистецтво мають спільне розуміння краси та гармонії.
6. Мені цікаво досліджувати, як математичні моделі описують реальні явища й процеси.
7. Мені цікаво, звідки беруться складні геометричні форми в природі.
8. Коли я натрапляю на цікавий математичний факт, мене тягне дізнатися більше.
9. Я хотів(ла) би поглиблено вивчати математику або відвідувати факультативи.
10. Я бачу практичне застосування математичних знань у повсякденному житті.
11. Математичні знання допомагають мені краще аналізувати інформацію та приймати рішення.
12. Я вважаю, що математика — це не лише формули, а спосіб мислення й розуміння світу.

Додаток Б. Результати анкети для визначення мотивації до вивчення математики

Сумма балів					
Критерій 1	61	66	3,81	4,13	0,31
Критерій 2	67	68	4,19	4,25	0,06
Критерій 3	67	69	4,19	4,31	0,13
Критерій 4	53	69	3,31	4,31	1,00
Критерій 5	57	62	3,56	3,88	0,31
Критерій 6	55	64	3,44	4,00	0,56
Критерій 7	68	66	4,25	4,13	-0,13
Критерій 8	53	57	3,31	3,56	0,25
Критерій 9	42	43	2,63	2,69	0,06
Критерій 10	52	64	3,25	4,00	0,75
Критерій 11	57	69	3,56	4,31	0,75
Критерій 12	66	75	4,13	4,69	0,56

Додаток В. Конспект заняття з фрактальної розмірності

План-конспект факультативного заняття з математики в 10 класі

Тема: Фрактальна розмірність

Мета:

навчальна: зацікавити дітей вивчати математику, фізику та інформатику;
сформувати знання про фрактали

розвиваюча: розвивати в учнів логічне мислення, абстрактне мислення.

виховна: виховувати в учнів культуру мовлення, вміння висловлювати свої думки.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Зміст уроку

Актуалізація почуттєвого досвіду й опорних знань учнів.

Цільове завдання 1: актуалізувати знання учнів про найпростіші властивості інтегралів.

Метод навчання: бесіда

Самоподібність та розмірність фракталів – дві суттєві характеристики фракталів. Найбільша цінність фракталів полягає у їх використанні при моделюванні різних процесів: чим менша дробова розмірність фракталу, тим

менш стійким є процес, який моделюється за допомогою даного фракталу. Зупинимося детальніше на понятті розмірності. З метою успішного засвоєння учнями нового матеріалу перед вивченням нової теми потрібно активізувати знання учнів про розмірність

У повсякденному житті ми постійно зустрічаємося з розмірностями. Як саме? Ми прикидаємо довжину дороги, дізнаємося площу квартири та шукаємо на наклейці об'єм пляшки води. Пригадаємо найпопулярніше визначення розмірності для стандартних геометричних об'єктів. Розмірність простору чи об'єкта це число незалежних змінних які необхідні визначення положення точки у цьому просторі чи об'єкті. Отже усі стандартні (і деякі фрактальні) об'єкти мають ціло численні розмірності.

Мотивація навчальної діяльності школярів.

Цільове завдання 2: мотивувати учнів до вивчення фракталів

Запитання до учнів: Як Ви вважаєте, чи може бути дробова розмірність?

На цьому факультативному занятті ви ознайомитеся із новим для вас способом обчислення розмірності, порівняєте його з вже знайомим способом пошуку топологічної розмірності, а на наступних факультативних заняттях будете використовувати його на практиці.

Повідомлення теми уроку.

Цільове завдання 3: на основі актуалізації й мотивації навчальної діяльності учнів визначити первинне бачення учнями теми заняття.

Метод навчання: дискусія.

Запитання до учнів: як, на вашу думку, звучатиме тема нашого заняття?

Тема нашого заняття звучить так: «Фрактальна розмірність».

Сприйняття й первинне усвідомлення учнями нового матеріалу.

Цільове завдання 4: формування знань про фрактальну розмірність.

До цього ми вивчали рівняння, в яких невідомими були числа. Сьогодні ж ми навчимося розв'язувати рівняння, в яких невідомими є функції.

Учні прослухавши нову інформацію про розмірність, намагаються

пояснити, як вони зрозуміли почуте.

Осмислення об'єктивних зв'язків і відносин у досліджуваному матеріалі й розкриття внутрішньої сутності досліджуваних явищ.

Цільове завдання 5: осмислення учнями суті поняття «розмірність Хаусдорфа-Безиковича».

Метод навчання: пояснення

Знаходження розмірності фракталу методом Хаусдорфа-Безиковича ґрунтується на ідеї покриття фрактального об'єкта маленькими фігурами, наприклад маленькими відрізками, квадратами, трикутниками, колами, кубами тощо. - Що більше підходить у кожному конкретному випадку. Природно, що чим меншими будуть ці невеликі фігури, тим більше їх буде потрібно, щоб повністю покрити фрактал.

Визначення. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича – це число D , до якого прагне відношення

$$\frac{\ln N(e)}{\ln \frac{1}{e}}$$

формула (В.1)

де $e \rightarrow 0$, де N – число фігур, за допомогою яких відбувається покриття фрактального об'єкту, e – лінійний розмір цих фігур.

Застосування на практиці

Цільове завдання 6: сформулювати учнів вміння знаходити розмірність Хаусдорфа-Безиковича

Для більшого розуміння, пропоную порівняти звичайну (топологічну) розмірність зі фрактальною на прикладі деяких об'єктів евклідової геометрії.

Точка

Її розмірність дорівнює 0, тому що для визначення положення точки «всередині неї» не потрібно взагалі ніяких змінних - точка всього одна, жодних

варіантів її положення немає.

Спосіб Хаусдорфа-Безиковича

Візьмо нескінченно маленький відрізок довжини e

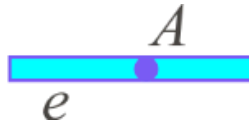


Рис. В.1. Відрізок довжини e

За визначенням

$$D = \frac{\ln \ln N(e)}{\ln \ln \frac{1}{e}} = \frac{\ln \ln 1}{\ln \ln \frac{1}{e}} = \frac{0}{\ln \ln \frac{1}{e}} = 0$$

формула (В.2)

Відрізок. Звичайний спосіб

Лінія має розмірність 1. Це означає, що вибравши точку відліку, ми можемо будь-яку точку на цій лінії визначити за допомогою 1 числа - позитивного або негативного.

Для одномірних об'єктів - збільшення вдвічі їх лінійного розміру призводить до збільшення розмірів (довжини) вдвічі 2^1 .

Метод Хаусдорфа-Безиковича

Відрізок L розіб'ємо на N відрізків довжиною e

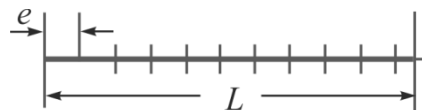


Рис. В.2. Відрізок L

Очевидно, що

$$L = eN$$

формула (В.3)

отже

$$N = \frac{L}{e}$$

формула (В.4)

За формулою

$$D = \frac{\ln \ln N(e)}{\ln \ln \frac{1}{e}} = \frac{\ln \frac{L}{e}}{\ln \ln \frac{1}{e}} = \frac{\ln \ln L}{\ln \ln \frac{1}{e}} + 1$$

формула (B.5)

де, $e \rightarrow 0 \frac{\ln \ln L}{\ln \ln \frac{1}{e}} \rightarrow 0$, отже

$$D = 0 + 1 = 1$$

формула (B.6)

Квадрат.

Розмірність квадрата дорівнює 2, оскільки визначення положення точки всередині квадрата необхідні вже дві незалежні змінні. Розмірність 2 означає, що будь-яку точку ми можемо однозначно визначити двома числами. Якщо з математичного погляду, то розмірність визначається так. Для двовимірних об'єктів збільшення вдвічі лінійних розмірів призводить до збільшення розміру (наприклад, площа прямокутника) вчетверо 2^2 .

Метод Хаусдорфа-Безиковича

Нехай L сторона квадрата. Аналогічно відрізок розділяємо сторону квадрата L на

$$N = \left(\frac{L}{e}\right)^2$$

формула (B.7)

квадратів зі стороною e .

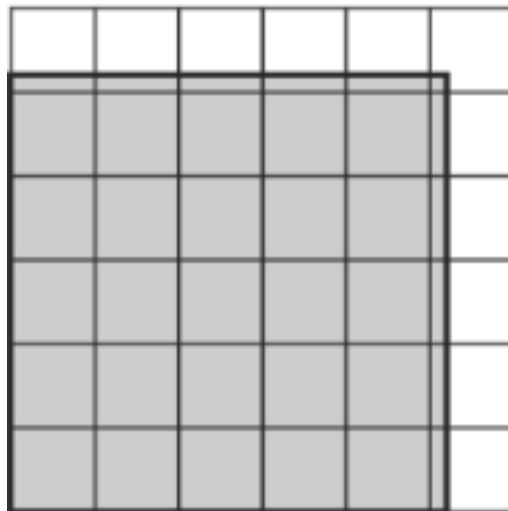


Рис. В.3. квадрат зі стороною e

За означенням

$$D = \frac{\ln \ln N(e)}{\ln \ln \frac{1}{e}} = \frac{\ln \ln \left(\frac{L}{e}\right)^2}{\ln \ln \frac{1}{e}} = \frac{2 \ln \ln \frac{L}{e}}{\ln \ln \frac{1}{e}} = 2 \left(\frac{\ln \ln \frac{L}{e}}{\ln \ln \frac{1}{e}} \right)$$

формула (В.8)

де, $e \rightarrow 0 \quad \frac{\ln \ln \frac{L}{e}}{\ln \ln \frac{1}{e}} \rightarrow 1$, отже

$$D = 2 * 1 = 2$$

формула (В.9)

Тим самим підтвердили, що спосіб Хаусдорфа-Безиковича і звичайний спосіб дають ту саму розмірність для звичайних евклідових фігур.

Закріплення нового матеріалу.

Цільове завдання 7: розвинути практичні навички до обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича.

Узагальнення й систематизація знань.

Цільове завдання 8: узагальнити й систематизувати знання учнів.

Запитання до учнів?

Що таке розмірності Хаусдорфа-Безиковича?

В чому суть пошуку розмірності за методом Хаусдорфа-Безиковича?

Чи може бути дробова розмірність?

Чи може топологічна та фрактальна розмірність відрізнятися?

Додаток Г. Конспект лекції 1

Тема: Фрактали

Мета:

- Навчальна: Розглянути поняття фрактал та ознайомитись з його історією. Розглянути приклади фракталів у природі. Навчитися знаходити фрактальні структури у навколишньому світі.

- Розвивальна: Розвивати математично грамотне мовлення, творче мислення, уяву, зорову пам'ять та спостережливість.

- Виховна: Формувати естетичне сприйняття навколишнього світу, виховувати уважність до природних явищ.

Очікувані результати:

Знати: різницю між фракталами та квазіфракталами; історію виникнення поняття «фрактал»; основні етапи розвитку теорії фракталів.

Вміти: розрізняти фрактали та квазіфрактали, наводити приклади, знаходити фрактальні структури у навколишньому світі.

I. Вступ: Слайд 2. Криголам «Обери картинку настрою»

Подивіться на картинки. Оберіть ту, яка найбільше відповідає вашому настрою зараз.

Розкажіть кількома словами, чому саме ця картинка вам підходить.

Сьогодні ми теж будемо говорити про різноманітні форми, які здаються дуже різними, але насправді мають спільну особливість.

Інструкція для вчителя: Діти обирають одну з картинок, яка їм більше відповідає (настрою/стану). Кілька учнів коротко пояснюють вибір.

Слайд 3. Демонстрація природних об'єктів

Подивіться на зображення капусти Романеско, дерев, соняшників, блискавок.

Як ви думаєте, що об'єднує ці природні об'єкти? Що спільного між їхніми формами?

Після відповідей учнів: Насправді всі ці об'єкти підкоряються одним і тим самим закономірностям – вони побудовані за принципом фракталів.

Пояснення: Фрактали – це геометричні фігури, які повторюються на різних рівнях масштабів. Незалежно від того, чи дивимось ми на величезне дерево або його маленьку гілочку, форма буде повторюватися за схожим принципом. Такі повторювані структури допомагають рослинам ефективніше використовувати ресурси.

Ідеальні фрактали – це математичні абстракції. Природні ж фрактали називаються квазіфракталами, бо їх повторення неповні або неточні.

II. Основна частина: Слайди 4–6. Приклади фракталів у рослинах

Броколі та цвітна капуста: гілки виглядають подібно до загальної головки.

Дерева: гілки розгалужуються на менші, створюючи фрактальний малюнок.

Листя папороті: чіткі фрактальні форми, які збереглися понад 350 млн років.

Королівська бегонія: листя різних розмірів має однакову структуру.

Цікавий факт: Дерева розташовують листя для кращого доступу до світла. Існує навіть явище «сором'язлива крона» – крони дерев не стикаються, залишаючи проміжки.

Слайд 7. Фрактали у морських організмах

Корали, морські зірки, їжаки: мають будову з чітким повторенням елементів. Це теж приклади квазіфракталів у природі.

Слайди 8–9. Фрактали у природних явищах

Гірські хребти та русла річок: повторюють фрактальні моделі.

Блискавки: їхні розгалуження імітують фрактальні принципи.

Морозні візерунки на склі: утворюють самоподібні малюнки.

Берегові лінії та географічні кордони: демонструють складність і самоподібність.

Слайд 10. Фрактали в організмах людини і тварин

У нашому організмі теж є фрактальні структури: система кровообігу, бронхи, нервові клітини.

Такі структури допомагають забезпечити ефективний обмін речовин.

Передостанній слайд. Криголам «Обери свій фрактал»

Подивіться на ці фрактали. Оберіть той, який найбільше вам імпонує.

Поясніть, чому саме цей фрактал ви обрали.

Так само як люди, фрактали різноманітні, але мають спільну рису – самоподібність.

III. Загальні висновки Останній слайд. Висновки і завдання

Отже, фрактали – це геометричні фігури, які повторюють свою структуру на різних масштабах.

Природні об'єкти, схожі на фрактали, називаються квазіфракталами.

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте означення фрактала.
2. Сформулюйте означення квазіфрактала.
3. Умови, коли фігуру можна назвати фракталом.

Домашнє завдання: Намалювати або сфотографувати три природні об'єкти, які мають фрактальну структуру. Описати, які саме елементи цих об'єктів нагадують фрактали.

Викладач – Шакірова Лілія Тахірівна

Додаток Д. Конспект лекції 2

Лекція 2. Історія та українські дослідження

Тема: Історія та українські дослідження фракталів.

Мета:

- Навчальна: Ознайомити учнів з історією виникнення та розвитку поняття «фрактал». Показати основні етапи розвитку фрактальної геометрії у світі та в Україні.
- Розвивальна: Розвивати логічне мислення, вміння аналізувати історичні факти та робити висновки.
- Виховна: Формувати інтерес до історії математики та гордість за внесок українських науковців.

Очікувані результати:

Знати: основні історичні етапи розвитку фракталів; імена вчених, які зробили внесок у розвиток теорії фракталів; українські дослідження у цій сфері.

Вміти: розповідати про історичні відкриття, пояснювати, чому вони здавалися парадоксальними, наводити приклади внеску українських математиків.

План

- Квазіфрактали, фрактали
- Історія фракталів
- Українські дослідження теорії фракталів

I. Вступ: Слайд 2. Криголам «Обери картинку настрою»

Подивіться на картинки. Оберіть ту, яка найбільше відповідає вашому настрою зараз. Розкажіть кількома словами, чому саме ця картинка вам підходить.

А тепер уявіть, що історія фракталів теж складається з дуже різних “настроїв” – дивних відкриттів, парадоксів і несподіваних рішень. Саме про це ми сьогодні дізнаємося.

Інструкція для вчителя: Діти обирають одну з картинок, яка їм більше відповідає (настрою/стану). Кілька учнів коротко пояснюють вибір.

II. Основна частина: Слайд 3. Перехід до історії

Розглянемо його історію.

Слайди 4–10. Історичні етапи (хронологія)

1 березня 1872 Карл Вейєрштрас представив перше визначення функції з графіком, який сьогодні вважався б фрактальним, що має неінтуїтивну властивість бути скрізь неперервною, але ніде не диференційованою.

1883 Канторове безліч (канторів дисконтинуум, канторовий пил) – один із найпростіших фракталів, підмножина одиничного відрізка числової прямої, яка є класичним прикладом дисконтинууму в математичному аналізі.

1890 Крива Пеано – загальна назва для параметричних кривих, образ яких містить квадрат (або, у загальному сенсі, відкриті області простору). Інша назва – крива, що заповнює простір. Названа на честь Джузеппе Пеано, першовідкривача такого роду кривих, у приватному сенсі кривою Пеано називається конкретна крива, яку знайшов Пеано.

1904 Крива Коха – фрактальна крива, описана в 1904 шведським математиком Хельге фон Кохом. Три копії кривої Коха, побудовані (вістрями

назовні) на сторонах правильного трикутника, утворюють замкнуту криву нескінченної довжини, звану сніжинкою Коха.

Фікавий факт Має нескінченну довжину

Сніжинка Коха обмежує кінцеву площу. І це при тому, що її периметр нескінченний.

(Ця властивість може здатися парадоксальною, але вона очевидна – сніжинка повністю поміщається в коло, тому її площа свідомо обмежена.)

1906 Крива Леві – фрактал. Запропоновано французьким математиком П. Леві.

Трикутник Серпінського – фрактал, один із двовимірних аналогів безлічі Кантора, математичний опис якого опублікував польський математик Вацлав Серпінський у 1915 році. Також відомий як «серветка» Серпінського.

Килим Серпінського (квадрат Серпінського) – фрактал, один із двовимірних аналогів безлічі Кантора, запропонований польським математиком Вацлавом Серпінським у 1916 р.

Килим Серпінського не можна повною мірою вважати плоскою фігурою – такі фігури зазвичай мають ненульову площу, а площа килима Серпінського = 0

З іншого боку, здається інтуїтивно зрозумілим (і це правда), що він не відноситься і до сімейства кривих, займаючи проміжне становище.

1918 Відкриття поняття хаусдорфової розмірності.

У математиці розмірністю зазвичай називають топологічну розмірність, яка просто відповідає кількості вимірювань предмета. Наприклад, у тривимірному евклідовому просторі хаусдорфова розмірність кінцевої множини дорівнює нулю, розмірність гладкої кривої – одиниці, розмірність гладкої поверхні - двом і розмірність безлічі ненульового обсягу – трьом, тобто, куб має три виміри – довжину, ширину та висоту, отже, його розмірність дорівнює трьом. А лінія на папері має лише довжину, і її розмірність дорівнює одиниці. Тому на перший погляд здається неможливим уявити предмет із нецілою розмірністю. Який об'єкт може мати розмірність 1,26? Адже його описали ще в 1904 році і більше півстоліття просто не звертали на нього уваги, вважаючи забавною іграшкою. Це

сніжинка Коха, що є замкненою кривою з найпростішим алгоритмом побудови, з якого ясно, що її довжина в звичному нам розумінні нескінченна. Математики ввели для такої нецілої розмірності окремий термін – розмірність Хаусдорфа-Безиковіча.

Жуліа опублікував 199-сторінкову роботу під назвою *Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*

1934-1937 Роботи А.С. Безиковіча з посиланнями на роботи Хаусдорфа
Слайди 11–14. Мандельброт і сучасність

1975 На початку своєї наукової діяльності Бенуа працював у дослідному центрі компанії IBM. На той час співробітники центру працювали над передачею даних на відстань. У ході досліджень вчені зіткнулися з проблемою великих втрат, які виникають через шумові перешкоди. Перед Бенуа стояло складне і дуже важливе завдання зрозуміти, як передбачити виникнення шумових перешкод в електронних схемах, коли статистичний метод виявляється неефективним.

Переглядаючи результати вимірювання шуму, Мандельброт звернув увагу на одну дивну закономірність – графіки шумів у різному масштабі виглядали однаково. Ідентична картина спостерігалася незалежно від того, був це графік шумів за один день, тиждень або годину. Варто змінити масштаб графіка, і картина щоразу повторювалася. Бенуа Мандельброт сам вигадав цей термін у сімдесятих роках минулого століття, запозичивши слово *fractus* з латині, де воно буквально означає "ламаний" або "дроблений".

1 березня 1975 Мандельброт показує світові фрактали в «Какова длина побережья Великобритании? Статистическое самоподобие и фрактальная размерность»

Цей французький математик запитав, як виглядатиме безліч, якщо побудувати його на основі простої формули, проітерованої циклом зворотного зв'язку. Тобто це означає, що для конкретного числа ми знаходимо за формулою нове значення, після чого підставляємо його знову у формулу та отримуємо ще одне значення. Результат – велика послідовність чисел.

Щоб отримати повне уявлення про таку множину, потрібно зробити величезну кількість обчислень – сотні, тисячі, мільйони. Вручну це було просто неможливо. Але коли у розпорядженні математиків з'явилися потужні обчислювальні пристрої, вони змогли по-новому поглянути на формули та висловлювання, які давно викликали інтерес. Мандельброт був першим, хто використовував комп'ютер прорахувати класичний фрактал. Опрацювавши послідовність, що з великої кількості значень, Бенуа переніс результати на графік. Ось що він одержав. 1977 Мандельброт випускає книгу Фрактальна геометрія природи "The Fractal Geometry of Nature"

Розглянемо українські дослідження

III. Загальні висновки. Отже, фрактали – це геометричні фігури, які повторюють свою структуру на різних масштабах. Проте природні об'єкти, які схожі на фрактали, називаються *квазіфракталами*, тому що їх повторення неповні або неточні.

Передостанній слайд. Криголам «Обери свій фрактал»

Подивіться на ці фрактали. Оберіть той, який найбільше вам подобається або відображає ваш характер. Поясніть свій вибір.

Як і люди, фрактали різні, але всі вони прекрасні й логічні.

Останній слайд. Висновки і завдання

Фрактали – це шлях від дивних кривих до напряму сучасної науки. В Україні створено власні наукові школи у цій сфері.

Домашнє завдання: Підготувати міні-презентацію про одного з математиків (світового чи українського), який працював із фракталами.

Викладач – Шакірова Лілія Тахірівна

Додаток Ж. Сценарій пробного заняття «Фрактали: математична магія у природі та житті»

Перш ніж почнемо, прошу вас увімкнути камери – хоча б на хвилинку. Хочу, щоб ми трохи познайомилися: побачили один одного, відчували, що по той бік екрану – справжні люди, а не чорні квадратики.

Щоб зробити знайомство цікавішим, пропоную міні-криголам:

коли вмикаєте камеру, скажіть одне маленьке “факт-сюрприз” про себе. Це може бути будь-що: улюблений предмет у школі; якийсь смішний випадок із навчання; хобі, про яке рідко хтось знає; чи навіть ваш улюблений математичний символ або число.

Ласкаво прошу у світ, де математика стає мистецтвом і загадкою природи!

Подивіться на картинки на слайді. Оберіть ту, яка найбільше відповідає вашому настрою зараз.

Розкажіть кількома словами, чому саме ця картинка вам підходить.

Подивіться на картинку, яку ви обрали. Знаєте, навіть у вашому виборі є закономірність. Сьогодні ми зануримося у світ ідеальних візерунків, які повторюються усюди: від броколі до будови вашого серця. Ласкаво прошу у фрактальний світ!

У математиці існує таке поняття, як фрактал.

Фрактал – безліч, що має властивість самоподібності.

Самоподібні фігури, що повторюються кілька разів, називаються предфракталами.

Звучить трохи незрозуміло, правда? Тож давайте розберемося, де ми можемо знайти цю ідею в реальному світі. Приклади є повсюди!

Однак важливо пам'ятати, що природні об'єкти (ми називаємо їх квазіфракталами) відрізняються від ідеальних, математичних фракталів. Вони мають неповноту та неточність повторень структури, оскільки на деякому малому масштабі фрактальна структура зникає. Природні структури не можуть бути ідеальними фракталами через обмеження, що накладаються розмірами живої клітини і, зрештою, розмірами молекул.

Приклади фракталів у природі зустрічаються повсюдно: від мушель до соснових шишок. Класичний приклад у природі – броколі, цвітна капуста. Кожне відгалуження капусти виглядає як уся голівка загалом. Італійська капуста романеско має недефективну конструкцію, що дозволяє максимізувати вплив сонячного світла та транспортувати поживні речовини по всій клітинній структурі рослини.

Чому, на вашу думку, броколі та романеско називають «фрактальними овочами»?

На перший погляд здається, що флора не має закономірностей, а рослини та їх частини ростуть хаотично, але розгляньте будь-яке дерево: Від основи до вершини від стовбура відходять великі гілки. На кожній із них відбувається аналогічне розгалуження менших гілок. Далі форма розгалуження в будь-якій частині дерева повторюється, тільки стає все менше і менше. З урахуванням принципів побудови фракталів, знаючи закономірності розташування гілок у вершини, легко відтворити вид дерева біля основи.

Чи можна сказати, що коренева система теж є фракталом?

А тепер подивіться на листя. Чи бачите ви у ньому фрактальні риси?

Тобто Пржилки на листі утворюють фрактальні малюнки, що нагадують плоске крихітне дерево. При цьому не буває двох листків з однаковим малюнком, всі вони є унікальними, як відбитки пальців людей.

Фрактали можна виявити на кожному рівні лісової екосистеми – від насіння до листя. Подивіться на ілюстрацію з «сором'язливою кроною».

Як ви думаєте, чому крони дерев не стикаються між собою?

Так тобто, щоб кожне дерево отримувало достатньо світла і виживало у конкуренції. (листя розташоване якнайдалі один від одного, щоб максимізувати доступ до ресурсів, особливо до сонячного світла для фотосинтезу.)

Наступний приклад

Кімнатна королівська бегонія. Її найменше листя за формою та поєднанням відтінків аналогічні найбільшим.

Будова листя папороті, що живе на нашій планеті вже понад 350 млн років, нагадує комп'ютерний фрактал. Ці рослини доводять, що у давніх біологічних формах найлегше простежити фрактал, тобто форма організмів тоді будувалася за простішими правилами.

А зараз ми трохи перепочинемо й пограємо у гру. Я буду показувати вам фото рослин, а ваше завдання — вирішити: це приклад фракталу чи ні?

1. Сукуленти

Найбільш математично точними є невисокі сукуленти. Величезна кількість представників цієї групи рослин пов'язана не тільки їх дивовижною здатністю накопичувати вологу, але й красивими візерунками листя.

2. Алое багатолісте (*Aloe polyphylla*)

Ця рослина демонструє досконалу спіральну розетку. Її гострокінцеве листя росте по спіралі, яка повторюється і постійно закручується від центру. Уявіть, що ви будете спіральні сходи, де кожна сходинка (листок) ідеально продовжує візерунок попередньої. Це створює враження ідеальної, математично точної форми, що повторюється.

3. Красула "Храм Будди" (*Crassula 'Buddha's Temple'*)

Ця красула – справжній архітектор! Вона росте у вигляді стовпчастих веж. Кожен рівень нових, щільно складених листків ідеально накладається та перетинається з попереднім, утворюючи пірамідальну або храмову форму. Це повторення однакових "блоків" (рядів листя) по вертикалі створює самоподібний ефект.

4. Росоліст лузітанський (*Drosophyllum lusitanicum*)

Фрактальна краса росоліста у його текстурі. Довгі листки вкриті тисячами однакових залозок, які виділяють липкі, "рубінові" крапельки для ловлі комах. Багаторазове повторення цього малюнка (крапель на волосках) по всій поверхні листка створює неймовірно щільний та рівномірний візерунок.

5. Соняшник

Хоча це не класичний гіллястий фрактал, суцвіття соняшника — еталон геометричної досконалості. Насіння розташоване у вигляді двох наборів спіралей, які перетинаються між собою. Цей повторюваний спіральний візерунок дозволяє рослині упакувати найбільшу кількість насіння на мінімальній площі — це ідеальна природна "система пакування".

6. Тюльпан: Його листки прості, довгі та ланцетоподібні, без самоподібного малюнка.

7. Жоржини

Квітки жоржини вражають своєю шаруватістю. Вони складаються з безлічі

рядів пелюсток, розташованих навколо центру. Кожен ряд пелюсток схожий на попередній, але трохи менший. Це постійне, самоподібне нарощування форми від центру до країв надає жоржинам вигляду ідеальної, багат шарової сфери.

8. Людвігія болотна (*Ludwigia palustris*)

Ця рослина демонструє один із найпростіших фракталів — дихотомічне (вильчасте) розгалуження. Основний пагін ділиться навпіл, і кожна нова гілка знову ділиться навпіл. Це постійне повторення простого правила "ділитися на два" створює форму, де маленька гілка виглядає так само, як і вся система розгалуження.

9. Листя амазонського латаття: Нижня частина листка має потужну сітку ребер, які радіально розходяться від центру; Ці головні ребра з'єднані між собою меншими ребрами, утворюючи щось на зразок ферменної конструкції (як мости чи дахи).

10. Хойя (Квітки)

Квітки хойї демонструють ідеальну симетрію та повторення. Кожна квітка має форму п'ятикутної зірки, а в її центрі розташована менша, але абсолютно ідентична зірка (корона). Це самоподібність — менша фігура повторює форму більшої — у межах однієї квітки.

11. Подорожник великий

листя Утворює прикореневу розетку. Кожен листок є цілісним і має овальну або яйцеподібну форму без складних лопатей чи розгалужень. Якщо ви відірвете частину листка, вона не буде схожа на весь листок. Жилки: Жилки розташовані паралельно або майже паралельно, що є прикладом простої лінійної геометрії, а не складної, багаторівневої мережі, як у фрактальних папоротей.

12. Пелецифора аселіформіс (*Pelecypora aselliformis*)

Цей рідкісний кактус має надзвичайно точний, повторюваний малюнок. Його тіло складається з чітких, однакових горбків, які розташовані у спіральні ряди. Це багаторазове повторення одного структурного елемента по спіралі створює враження, ніби кактус ідеально виточений.

13. Кактус Мамілярія Марксіана (*Mammillaria Marksiana*)

Як і соняшник, цей кульовий кактус має горбки (ареоли), розташовані по спіральних лініях, що обертаються навколо тіла. Це геометричне, спіральне повторення горбків створює ідеальний, рівномірний малюнок. А його золотисті квіточки, які розпускаються по спіральному колу, лише підкреслюють цю самоподібну красу.

Фрактали є не лише у рослинах. Наприклад У лишайниках і мохах, як і древніх представниках рослинного світу, фрактали яскраво виражені. Їхні вузли аналогічні краям і відрізняються тільки розміром.

Гірська гряда, річище річок, водні потоки, рух зграї птахів, ритми серця. Кордони географічних об'єктів (країн, областей, міст), Берегові лінії, Хмари, циклони сніжинки

Блискавки, іоносфера, північне сяйво та полум'я

Морозні візерунки на шибках, Кристали, Сталактити, сталагміти, геліктити. Туманності, народження зірок

У людському організмі є низка природніх фракталів. Такі як очі, клітини мозку, або ділення клітин. структура ДНК

Зокрема, бронхи розгалужуються за фрактальною закономірністю. Кожний із бронхів ділиться на два меншого діаметру, які, своєю чергою, також діляться на два менші і так далі. Розгалуження кровоносних судин також має фрактальну закономірність. Фрактальна структура бронхіального дерева (зліва) і судинного русла легень (справа) І це не примха природи, а життєва необхідність забезпечення всіх однотипних клітин певної тканини організму киснем і поживними речовинами однаковою мірою. На слайді Ангіографія нирки. Втрата фрактальності судин у ділянці пухлини на верхньому полюсі нирки. Ця втрата фрактальності є сигналом лікарю.

Фрактали в історії

Спираючись на знайдені цікаві артефакти, ми бачимо, що знання про фрактали мали люди ще в давнину. Їх зображення ми знаходимо на кераміці Трипільської культури (з 5450 по 2700 рік до н.е.), в контурах побудови селищ та городищ, архітектурі будівель.

Одним із яскравих прикладів застосування фрактальних принципів у давнину є архітектурні споруди. Наприклад, видатному архітектору Стародавнього Єгипту Імхотепу вдалося звести першу в тій країні ступінчасту піраміду – грандіозна фрактальна споруда з чіткими математичними пропорціями. А за часів існування ордена Тамплієрів по всій Європі набув широкого поширення готичний стиль архітектури – втілення сакральної геометрії та фрактальних візерунків у камені.

На фото зображено фрагмент купола іранської мечеті. Зображені тут будівлі включають мечеть Хазрат-Масуме в Кумі, школу Чахарбаг в Ісфахані та мечеть Шах-і-Черах у Ширазі.

На фото – будівля одного з найскладніших в архітектурному плані комплексів, розташована в міському районі Мельбурна (Австралія).

Фрактали у моді

Одяг з фрактальним кроєм або принтами стає все більш популярним

Наприклад стиль бохо і етно в колекції одягу на 2022 рік.

Фрактали залишили свій слід не лише в архітектурі, а й у мистецтві. Деякі художники у своїх роботах використовували фрактальні структури, щоб передати складність і гармонію світу.

Живопис:

«Галатея сфер», 1952 – Сальвадор Далі

«Коло з метеликами», 1950 – Мауріц Корнеліс Ешер

Сучасна наука і технології дозволяють досліджувати фрактали з новою глибиною. Наприклад, лазерний фізик Том Беддарт з Університету Сент-Ендрюс (Шотландія) зробив неймовірно докладні 3D-фрактали. Його роботи демонструють, як стародавні знання про фрактали можуть поєднуватися з найсучаснішими досягненнями науки.

Але навіщо взагалі потрібні ці гарненькі картинки?

Виявляється, фрактали не лише красиві, а й дуже корисні. У 1978 році художник і майбутній засновник Ріхар Лорен Карпентер за допомогою формул намалював гірський пейзаж.

Принцип побудови полягав у тому, щоб розділяти більшу геометричну фігуру на дрібні елементи, а ті, у свою чергу, ділити на аналогічні фігури меншого розміру.

Саме за цим принципом сьогодні створюють ландшафти у фільмах і комп'ютерних іграх.

Фрактали допомогли і в техніці. Натан Коен, радіоаматор із Бостона, хотів зробити антену з максимальною чутливістю, але не міг встановити велику конструкцію. Тоді він вирішив спробувати фрактальну форму – і створив антену у вигляді «сніжинки Коха». Вона виявилася настільки ефективною, що подібні фрактальні антени тепер використовують у телефонах і радіопристроях по всьому світу.

Фрактали навіть «завітали» в економіку. Американський фінансист Ральф Елліот помітив, що зміни цін на біржі нагадують фрактальні хвилі: великі коливання складаються з менших, а ті – з ще дрібніших.

Він створив «хвильову теорію Елліота», за якою рух цін можна розділити на хвилі росту та хвилі спаду. Кожна хвиля повторює структуру більшої, як у фракталах. Це допомагає аналітикам передбачати, коли краще купувати чи продавати акції.

Сформулюйте означення фрактала.

Сформулюйте означення квазіфрактала.

Умови, коли фігуру можна назвати фракталом.

Вправа Криголам

Подивіться на ці фрактали. Оберіть той, який найбільше вам імпонує.

Поясніть, чому саме цей фрактал ви обрали.

Так само як люди, фрактали різноманітні, але мають спільну рису – самоподібність.

Наше заняття добігає кінця. Пам'ятайте: фрактали – це не просто красиві картинки. Це закономірність, яка повторюється. Вона є в нас, у деревах, у хмарах. Бажаю вам сьогодні уважніше придивитися до світу і побачити в ньому фрактал, що ви оберете.

Дякую за вашу активну роботу і увагу!

Всім гарного дня і бажаю фрактальних успіхів!