

БЕРДЯНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет фізико-математичної, комп'ютерної та технологічної освіти

Кафедра математики та методики навчання математики

Пояснювальна записка

до магістерської роботи
магістр

(освітній ступінь)

на тему «Елементи методичної системи навчання учнів 11 класів основам теорії
фракталів»

здобувача другого рівня вищої освіти зі
спеціальності
014 Середня освіта (Математика)
Чернеги Іллі

Керівник: к.-ф.м. наук, доцент
Коваленко В.М.

Бердянськ – 2022 року

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ I. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПРЕДМЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ	7
1.1. Означення фрактала	7
1.1.1. Метрична розмірність (Гаусдорфа-Безиковича, ентропійна)	7
1.1.2. Топологічна розмірність.....	8
1.1.3. Класичне означення фрактала та альтернативні підходи	9
1.1.4 Самоподібна розмірність, самоподібні фрактали.....	12
1.2. Приклади фрактальних множин	12
1.2.1. Множина Кантора	12
1.2.2. Сніжинка Коха.....	21
1.2.3. Килим Серпінського.....	23
1.2.4. Губка Менгера	25
1.2.5. Самоафінні фрактали	25
1.2.6. Множини Мандельброта та Жюліа	26
1.3. Зв'язок теорії фракталів з шкільним курсом математики	28
ВИСНОВКИ ДО ПЕРШОГО РОЗДІЛУ	30
РОЗДІЛ II. ПРОЕКТУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ МЕТОДИЧНОЇ СИСТЕМИ НАВЧАННЯ УЧНІВ 11 КЛАСІВ ОСНОВАМ ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ	31
2.1. Система вправ з теорії фракталів, що розв'язуються методами елементарної математики	31
2.2. Методичні рекомендації щодо навчання учнів 11 класів основам теорії фракталів.....	35
2.3. Педагогічний експеримент та його результати	37
ВИСНОВКИ ДО ДРУГОГО РОЗДІЛУ	38
ВИСНОВКИ	39
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	40

ВСТУП

Актуальність теми. Одним з розділів сучасної математики, який бурхливо розвивається протягом останніх десятиріч, є теорія фракталів (фрактальний аналіз та фрактальна геометрія). Наука про фрактали оформилася в окрему область математики зовсім недавно: на початку 70-х років 20 століття. Історія виникнення інтересу до вивчення фракталів може служити прикладом взаємопроникнення ідей абстрактних і прикладних наук. Початком цього процесу прийнято вважати появу в 1977 році книги Бенуа Мандельброта «Фрактальна геометрія природи» [17], де міститься величезна кількість зображень різних фрактальних множин і наведено різноманітні застосування теорії фракталів в науці та техніці. Сам термін «фрактал» був введений Мандельбротом в 1975 році (від латинського *fractus* – дробовий, ламаний), він відображає той факт, що досить часто фрактальні множини мають дробову розмірність Гаусдорфа-Безиковича [27].

Слід зазначити, що перші фрактали з'явилися в математиці набагато раніше, в кінці 19 – початку 20 століття. До їх числа відносяться такі дивовижні конструкції, як канторівська множина, функції Веєрштрасса та ван дер Вардена, крива Коха, трикутний килим Серпінського, множини Жюліа тощо [12, 17, 27]. Ці конструкції були свого часу відкриті математиками для того, щоб показати, наскільки наївними і крихкими можуть бути наші уявлення про такі знайомі, здавалося б, об'єкти, як функція і крива. Ці складні конструкції справляли дуже сильне враження на математиків того часу, за що прозвали математичними монстрами [27].

Після виходу згаданої книги почалася справжня «фрактальна лихоманка». Багатьом вдалося по-новому поглянути на об'єкти своїх досліджень, і виявилось, що вони довгі роки вивчають фрактали. Одна за одною стали з'являтися наукові роботи, де повідомлялося про знаходження фрактальних об'єктів. Досліджувалися поверхні розломів твердих зразків, процеси агрегації

кластерів і адсорбції, форма хмар і хмарних зон над поверхнею Землі, шорсткість мінералів, динаміка економічних процесів, зростання біологічних популяцій, хвилі в океані. У геології і картографії, у фізиці і біології – скрізь були виявлені фрактали [27].

Сьогодні фрактали широко використовуються в різних галузях математики і далеко за її межами, особливо популярні вони в фізиці і матеріалознавстві [27], біології і геофізичній динаміці, теорії протікання тощо. В останній виявлені тісні зв'язки деяких критичних показників системи з її фрактальними властивостями [27]. Корисні фрактали, в першу чергу, там, де методи подібності є чи не єдиним засобом теоретичного аналізу. Вони допомагають створювати нові матеріали з бажаними властивостями. Використання результатів фрактального аналізу в інформатиці дозволило побудувати ефективні алгоритми стиснення інформації. Не менш популярними вони є і в математиці. Тисячі публікацій присвячено фракталам та їх використанню, фрактальному аналізу в теоріях різних математичних структур.

Велика кількість різноманітних застосувань та привабливих зображень фрактальних множин робить теорію фракталів доволі ефективною з точки зору популяризації математики. Тому в останні роки елементи теорії фракталів почали розглядати в школі на факультативних заняттях та позакласних заходах [41]. На освітніх порталах можна знайти багато розробок вчителів щодо проведення позакласних заходів, присвячених фракталам. Треба відмітити, що основна увага в цих матеріалах приділяється розгляду відомих прикладів фрактальних множин, їх зображенням та застосуванням фракталів в різних галузях науки, техніки та мистецтві. І дуже мало або взагалі не приділяється уваги розв'язанню задач пов'язаних з фракталами, хоча учні 11 класів володіють достатнім рівнем знань та навичок для розв'язування елементарних задач з теорії фракталів. Таким чином, на даний момент існують протиріччя між досить значним інтересом до теорії фракталів з боку шкільних вчителів та

недостатньою розробленістю методики навчання учнів основам теорії фракталів.

Все вищесказане зумовило актуальність і вибір теми дослідження «Елементи методичної системи навчання учнів 11 класів основам теорії фракталів».

Мета дослідження – розробити, теоретично обґрунтувати та апробувати у навчальному процесі методичні рекомендації щодо навчання учнів 11 класів основам теорії фракталів.

Об’єкт дослідження – процес навчання математики у старшій школі.

Предмет дослідження – методика навчання учнів 11 класів основам теорії фракталів.

Для реалізації поставлених задач були використані такі **методи дослідження**:

теоретичні: аналіз, синтез, порівняння, узагальнення даних з проблеми дослідження на основі вивчення психолого-педагогічної та методичної літератури;

емпіричні: педагогічні спостереження; педагогічний експеримент.

Відповідно до поставленої мети, об’єкту і предмету були визначені такі завдання дослідження:

- вивчити наукову, психолого-педагогічну, методичну і навчальну літературу з предмету дослідження;
- систематизувати теоретичні відомості про базові поняття та факти теорії фракталів; розкрити зв’язок між основами теорії фракталів та шкільним курсом математики;
- розробити, теоретично обґрунтувати та апробувати у навчальному процесі компоненти методичної системи навчання учнів 11 класів основам теорії фракталів.

Практичне значення отриманих результатів дослідження полягає в тому, що вони можуть бути використані в процесі навчання математики в старшій школі.

Структура та обсяг дипломної роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів, загальних висновків, списку використаних джерел.

ВИСНОВКИ

У процесі дослідження нами було розроблено, теоретично обґрунтовано та апробовано у навчальному процесі методичні рекомендації щодо навчання учнів 11 класів основам теорії фракталів.

У роботі нами було розкрито теоретичні основи навчання основам теорії фракталів. Розглянуто поняття фрактала, наведено приклади відомих фракталів та їх властивості, розкрито зв'язок основ теорії фракталів з шкільним курсом математики.

Нами було складено систему задач з основ теорії фракталів які можна пропонувати для розв'язування учням 11 класів. Складено методичні рекомендації щодо навчання учнів 11 класів основам теорії фракталів..

Розроблені методичні рекомендації щодо навчання учнів 11 класів основам теорії фракталів були апробовані в навчально-виховному процесі. Як показав педагогічний експеримент, використання розроблених елементів методичної системи навчання учнів 11 класів основам теорії фракталів дозволило успішно розібратись учням з базовими поняттями теорії фракталів, підвищило інтерес учнів до математики. Таким чином, результати експерименту свідчать про доцільність впровадження у навчальний процес результатів дипломного дослідження.

Результати даної роботи можна використовувати в курсі математики старшої школи при проведенні позакласної роботи из математики, факультативних курсів з теорії фракталів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко А. К. Алгебра і початки аналізу. 11 клас: Пробний підручник. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. 384 с.
2. Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функціональний аналіз : підручник. Львів, 2014. 559 с.
3. Биркгоф Дж. Динамические системы. Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет”, 1999. 408 с.
4. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 128 с.
5. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. Х.: Основа, 1995. 304 с.
6. Гливенко Е.В. О мере типа Хаусдорфа. Математический сборник. 1956. № 4. С. 423-432.
7. Грохольська А.В., Яценко С.Є. Методика навчання математики в старшій та вищій школах : навч. посіб. для студ. фіз.-мат. спец. пед. ун-тів. Вид. 2-ге, переробл. і допов. Київ : НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2011. 156 с.
8. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і початки аналізу: (проф. рівень): підруч. для 10-го кл. закл. Серед. Освіти. Київ: Генеза, 2018. 448 с.
9. Карлесон Д. Избранные проблемы теории исключительных множеств . М.: Мир,1971. 126 с.
10. Коба В.І. Позакласна робота з математики в школі. Київ: Радянська школа, 1968. 375с.
11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 496 с.
12. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
13. Куратовский К. Топология. М. : Мир, 1966. 594 с.

14. Ландкоф И.С. Емкости и меры Хаусдорфа. Оценки потенциалов. Успехи мат. наук. 1965. № 1. С. 189-195.
15. Лисовик Л.П. Фрактальные множества, определяемые конечными преобразованиями. Кибернетика и системный анализ. 1996. № 4. С. 13-27.
16. Лисовик Л.П. Применение конечных преобразователей для задания фрактальных кривых. Кибернетика. 1994. № 3. С. 11-22.
17. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
18. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, проф. рівень. Харків: Гімназія, 2011. 431 с.
19. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на погл. рівні з 8 кл. проф.. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 312 с.
20. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х. : Гімназія, 2018. 256 с.
21. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 160 с.
22. Моторіна В.Г. Технології навчання математики в сучасній школі: Монографія. Харків: «Лемінги», 2001. 262 с.
23. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу. Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. Харків: Гімназія, 2010. 416 с.
24. Нісімчук А.С. Сучасні педагогічні технології: Навчальний посібник. Київ:«Просвіта», Пошуково-видавниче агентство «Книга Пам'яті України», 2000. 368 с.
25. Окстоби Дж. Мера и категория. М.: Мир, 1974. 156 с.

26. Пайтген Х.О., Рихтер Л.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. 176 с.

27. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. К.: НПУ ім. Драгоманова, 1998. 296 с.

28. Працевитый Н.В. Геометрические вероятности на фрактальных совершенных абсолютно самоподобных множествах пространства R^1 . Применение аналитических методов в вероятностных задачах. К.: Ин-т математики АН УССР, 1986. С. 100-109.

29. Працьовитий М.В. Аномальнофрактальні і суперфрактальні об'єкти. Наук. записки КДПІ імені М.П. Драгоманова. К.: КДПІ, 1992. С. 309-310.

30. Працьовитий М.В. Про означення фрактала. Наук. записки УДПУ імені М.П. Драгоманова. К.: УДПУ, 1993. С. 360-362.

31. Працьовитий М.В. Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова. Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. К.: Ін-т математики АН України, 1994. С. 245-254.

32. Працьовитий М.В. Про означення фрактала та фрактальний підхід в дослідженнях розподілів ймовірностей. Фрактальний аналіз та суміжні питання. К.: ІМ НАН України –НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998. № 1. С. 5-24.

33. Працьовитий М.В. Самоподібні і фрактальні властивості випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова. VII Міжнародна наукова конференція імені академіка М.Кравчука (Київ, 14-16 травня 1998 р.). Київ, 1998. С. 410-417.

34. Працьовитий М.В. Фрактальні властивості канторівських розподілів випадкових величин, Q-цифри поліосновного представлення яких утворюють ланцюг Маркова. Матеріали III Всеукраїнської наукової конференції "Фундаментальна та професійна підготовка фахівців з фізики". К.: НПУ, 1998. С. 288-291.

35. Рамський Ю.С., Торбін Г.М., Працьовитий М.В. Використання нових інформаційних технологій при вивченні фрактальних об'єктів. Проблеми інформатизації освіти: Зб. наук. праць. Київ : УДПУ, 1994. С. 20-31.

36. Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль: підручники і посібники, 2004. 240 с.

37. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. 2-ге вид., допов. і перероб. Київ: Вища шк., 2006. 582 с.

38. Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. К. : “Наукова думка”, 1992. 207 с.

39. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.

40. Халмош П. Теория меры. М. : Изд-во иностр. лит., 1953. 292 с.

41. Школьний О. В. Вивчення елементів теорії фракталів у школі. Математика в школі. 2015. №27. С.42-48.

42. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск : НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 528 с.

43. Besicovitch A.S. On linear sets of points of fractals dimensions. Math. Ann. 1929. 101, №1. P. 161-193.

44. Besicovitch A.S. Sets of fractional dimension. 2: On the sum of digits of real numbers represented in dyadic system. Math. Ann. 1934. 110, №3. P. 321-329.

45. Besicovitch A.S. Sets of fractional dimension. 2: On dimension numbers of some continuous curves, H.D. Ursell J. London Math. Soc. 1937. 1. P. 18-25.

46. Falconer K. Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications. University of st. Andrews. UK. 2003. 367 p.

47. Hutchinson J.E. Fractals and self similarity. Indiana Univ. Math. J. 1981. 30. P. 713-747.

48. Kinney J.R. The dimension of some sets defined in terms of f-expansion. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und venw. Geb. 1965. № 4. P. 293-315.

49. Kinney J.R. The dimension of some sets defined in terms of f -expansion. *Wahrscheinlichkeitstheor und verw. Geb.* 1965/6. № 4. P. 143-208.

50. Mandelbrot B.B. *Fractals: Form, Chance and Dimension*. San-Francisko: Freeman, 1977. 366 p.

51. Moran P.A. Additive functions of interval and Hausdorff measure. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1946. 42. P. 15-23.