

Сліпий провидець: як геніальний Ейлер створив мову сучасної математики та найелегантнішу формулу.



Я довго думав: що це таке Ейлер намотав собі на голову? Нарешті здогадався: це – Піфагорові штани! Великі люди можуть дозволити собі такі жарти. Математичні жарти! Чи це через неувважність? Але куди художник дивився!? (На фото портрет Леонарда Ейлера роботи Якоба Емануеля Гандмана, 1753 р., художній музей Базеля)

1.1 Створення алфавіту математичної науки.

Леонард Ейлер (1707–1783) – один із найвеличніших математиків в історії людства. Народився 15 квітня 1707 року в Базелі в родині пастора, став учнем Йоганна Бернуллі й уже в юності виявив феноменальні

здібності. Він – найпродуктивніший учений в історії: повне зібрання творів (*Opera Omnia*) налічує понад 80 томів. За оцінками сучасників, він є автором приблизно кожної четвертої математичної праці, опублікованої в XVIII столітті.

Працюючи в Санкт-Петербурзькій та Берлінській академіях наук, Ейлер зробив фундаментальні відкриття майже в усіх галузях: від небесної механіки й оптики до теорії музики та кораблебудування. Але справжнім тріумфом став математичний аналіз. Саме Ейлер своєю нотацією та системним підходом назавжди змінив науковий світ.

На рис. 1 представлено титульний аркуш праці «Вступ до аналізу нескінченно малих» (1748), де Ейлер вперше систематично виклав основи сучасної математичної мови. Саме він став справжнім «лінгвістом» математики: до нього тексти нагадували суміш складних геометричних описів та розрізнених скорочень, що значно гальмувало обмін ідеями. Ейлер здійснив повну ревізію та стандартизацію знаків, якими ми користуємося сьогодні:

- e – основа натуральних логарифмів (з'явилася в листі до Гольдбаха 1731 р., закріпилась після «Механіки» 1736 р.);
- $f(x)$ – запис функції (з 1734 р.);
- π – хоча символ запропонував Вільям Джонс у 1706 р., саме авторитет Ейлера (з 1737 р.) зробив його світовим стандартом;
- $\sum$ – знак суми (з «Диференціального числення» 1755 р.);
- i – уявна одиниця (запропонована 1777 р., опублікована 1794 р.);
- сучасний запис $\sin$, $\cos$, $\tan$ та скінченних різниць Δ .

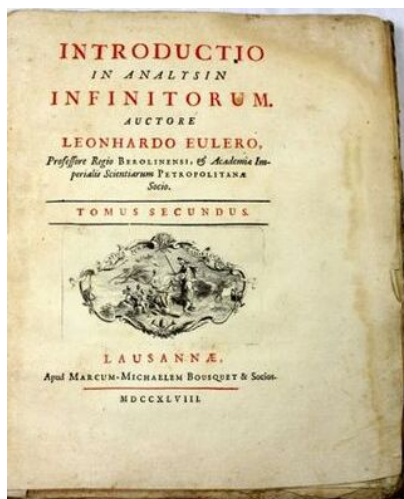


Рис. 1. Титульний аркуш «Вступу до аналізу».

Без цього лаконічного «алфавіту» сучасна наука була б захаращена громіздкими словесними конструкціями, а складні розрахунки в авіації, програмуванні чи квантовій фізиці були б фізично неможливими для запису.

На рис. 2 візуалізовано хронологію появи ключових символів, які Ейлер подарував науковому світу.

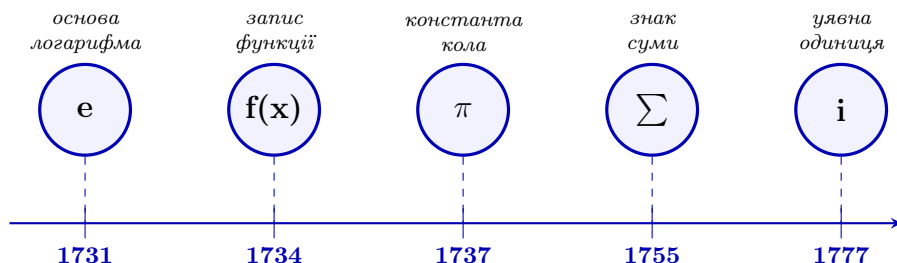


Рис. 2. Хронологія стандартизації основних математичних символів.

1.2 Функція – головний герой.

До Ейлера математика була переважно наукою про геометричні об'єкти, а аналіз – набором методів для знаходження дотичних чи площ. Ейлер здійснив радикальний перехід до *алгебраїчного аналізу*. У фундаментальній праці «Вступ до аналізу нескінченно малих» (1748) він проголосив: об'єктом дослідження є не крива, а **функція** – аналітичний вираз, що описує закон зміни величини.

Він показав, що практично будь-яку «пристойну» (тобто аналітичну – таку, що не має розривів і є нескінченно диференційовною у певній області) функцію можна подати у вигляді степеневого ряду:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \quad (1)$$

Завдяки цій уніфікації Ейлер зміг розшифрувати «геном» основних функцій, продемонструвавши, що вони є лише різними проявами єдиного аналітичного закону.

Експонента та логарифм.

Ейлер визначив число e як основу системи, в якій похідна функції дорівнює самій функції. Для знаходження її аналітичного вигляду він скористався визначенням через другу чудову границю:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (2)$$

Геній Ейлера полягав у тому, що він застосував до цього виразу біном Ньютона для нескінченно великого показника n :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{x}{n}\right)^3 + \dots \quad (3)$$

Він зауважив, що при прямуванні n до нескінченності множники типу $\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \dots, \frac{n-k+1}{n}$ прямують до одиниці для будь-якого фіксованого k . Це дозволило йому перетворити складну границю на елегантний нескінченний ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (4)$$

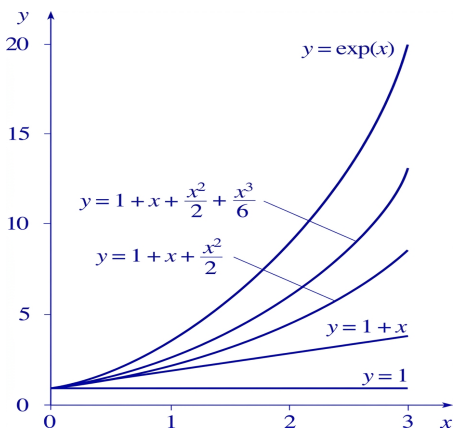


Рис. 3. Наближення експоненти.

На рис. 3 візуалізовано процес того, як степеневий ряд Ейлера поступово «відтворює» графік функції: додавання кожного наступного члена робить наближення все точнішим, перетворюючи абстрактну суму на реальну криву.

Це представлення зробило експоненту надзвичайно зручною для обчислень і стало «майстер-ключем» до всього аналізу, дозволивши згодом пов'язати процеси росту з тригонометричним обертанням.

Ще одним яскравим прикладом «алгебраїзації» аналізу стало використання ряду для логарифма. Цей розклад (відомий як *ряд Меркатора*)

був відкритий ще у 1668 році, проте саме Ейлер перетворив його з геометричного способу обчислення площі під гіперболою на універсальний інструмент аналізу.

На рис. 4 візуалізовано процес наближення функції $\ln(1+x)$ її степеневими розкладами різних степенів.

Ейлер виводив його максимально прозоро, виходячи з представлення дробу $\frac{1}{1+t}$ у вигляді нескінченної геометричної прогресії:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \dots \quad (5)$$

Проінтегрувавши обидві частини цього рівняння від 0 до x , Ейлер отримав розклад для натурального логарифма у сучасному вигляді:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{при } |x| < 1 \quad (6)$$

Це стало справжнім проривом для навігації та астрономії XVIII століття, оскільки дозволило створювати дуже точні логарифмічні таблиці.

Приклад 1.1. Для надскладного завдання (у часи Ейлера) – обчислення $\ln 2$ застосуємо ряд (6) при $x = 1$:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \quad (7)$$

Хоча отриманий знакозмінний гармонічний ряд збігається досить повільно, сам факт того, що трансцендентне число можна виразити через нескінченну суму простих дробів, став сенсацією.

Успіх із логарифмом відкрив шлях до аналогічного обчислення будь-яких значень $\sin x$, $\cos x$ та інших функцій з будь-якою кількістю знаків після коми, що було критично важливо для морської навігації, де помилка в розрахунках могла призвести до відхилення корабля на сотні миль.

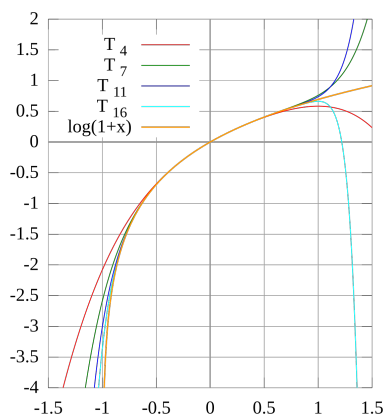


Рис. 4. Ряд Меркатора для $\ln(1+x)$.

Тригонометричні функції.

До Ейлера $\sin x$ і $\cos x$ вважалися метричними співвідношеннями в трикутнику або відрізками в колі. Ейлер здійснив перехід до **аналітичної тригонометрії**, представивши їх як нескінченні поліноми.

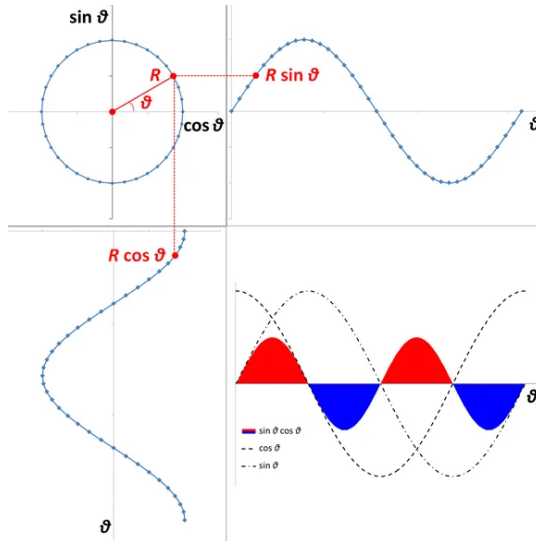


Рис. 5. Геометрія кола та періодичні функції.

На рис. 5 продемонстровано фундаментальний зв'язок між геометричними проекціями в колі та їхнім функціональним представленням у вигляді хвиль. Ейлер зрозумів, що ці «рухи» вздовж осей можна описати не через лінійку, а через чисті числові ряди.

Для виводу цих рядів він скористався властивостями симетрії та логікою, подібною до виводу експоненти. Оскільки косинус є **парною** функцією ($\cos(-x) = \cos x$), його розклад повинен містити лише парні степені x . Синус, як **непарна** функція ($\sin(-x) = -\sin x$), має складатися лише з непарних степенів.

Ейлер припустив, що ці функції мають вигляд:

$$\cos x = 1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + \dots \quad (8)$$

$$\sin x = x + Dx^3 + Ex^5 + Fx^7 + \dots \quad (9)$$

Коефіцієнти він знайшов, аналізуючи формулу Муавра (45) для кратних кутів ($\sin(nx)$ та $\cos(nx)$) при нескінченно великому n . Це дозволило йому отримати знамениті розклади:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (10)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (11)$$

Ці формули «відірвали» тригонометрію від креслень. Тепер $\sin x$ став не просто «протилежним катетом», а числовим законом, який можна обчислити для будь-якого значення x , навіть якщо воно не відповідає жодному куту в реальному трикутнику. Це відкрило шлях до математичного опису будь-яких коливань та хвиль у природі.

Синтез експоненти та тригонометрії через комплексну змінну.

Найвеличнішим досягненням Ейлера стало поєднання у комплексному просторі раніше непов'язаних експоненціальних та тригонометричних функцій за допомогою формули (42).

Це перетворило складні тригонометричні перетворення на прості алгебраїчні маніпуляції з показниками степеня.

На рис. 6 наочно продемонстровано цей синтез: комплексна експонента постає як тривимірна спіраль (Helix), що поєднує в собі обертання по колу та гармонійні коливання синуса й косинуса, які є її проекціями на відповідні площини.

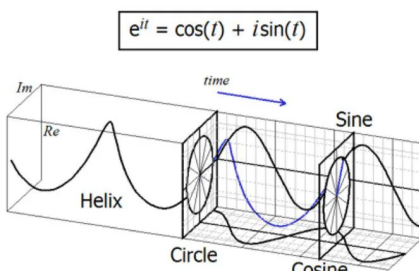


Рис. 6. Синтез Ейлера.

Функція як нескінченний добуток.

Ейлер знайшов дивовижне представлення для тригонометричних функцій (28), яке дозволило розглядати їх не як геометричні відношення, а як аналітичні об'єкти з нескінченною кількістю коренів. Це дозволило йому

згодом розв'язати Базельську задачу (25), представивши $\sin x$ через його нулі на числовій прямій.

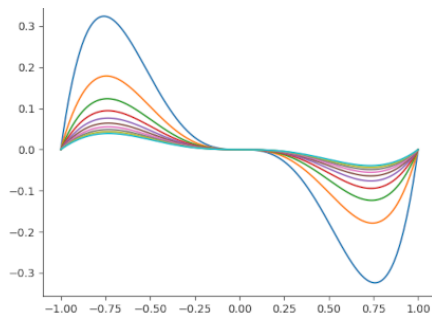


Рис. 7. Згасання похибки добутку.

Саме цей розклад синуса дозволив Ейлеру перекинути місток від тригонометрії до теорії нескінченних сум та Дзета-функції.

На рис. 7 візуалізовано процес збіжності цього добутку: графік показує різницю (похибку) між точною функцією синуса та її наближенням нескінченним добутком для різних значень N . Чітко видно, як зі збільшенням кількості множників похибка стрімко прямує до нуля, «притискаючи» математичну модель до реального графіка функції.

Неявні функції та диференціальні рівняння.

Запровадивши поняття неявної функції $F(x, y) = 0$ та чітко розрізнивши алгебраїчні та трансцендентні залежності, Ейлер створив математичний апарат, здатний описувати динаміку реального світу. Його підхід дозволив розв'язувати диференціальні рівняння виду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (12)$$

розглядаючи їх як співвідношення між змінними величинами та їхніми приростами. Таким чином, математика остаточно перетворилася з «науки про фігури» на «науку про функції», ставши універсальним інструментом фізики та інженерії.

1.3 Приборкання нескінченності.

Леонард Ейлер володів унікальною, майже містичною інтуїцією в роботі з нескінченними процесами. У XVIII столітті поняття границі та збіжності ще не мали суворого логічного обґрунтування, проте Ейлер, оперуючи нескінченно великими та малими величинами як звичайними

числами, спромігся отримати результати, які пізніше підтвердилися з абсолютною строгістю. Він перетворив нескінченні ряди з допоміжного способу наближених обчислень (яким вони були за часів Лейбніца, чий шлях ми досліджували у праці *«Від механічного калькулятора до теорії монад: універсальний розум Лейбніца в інтегруванні світу ідей (From the Mechanical Calculator to the Theory of Monads: Leibniz's Universal Mind in Integrating the World of Ideas)»*) на фундаментальну мову математичного аналізу.

Перетворення Ейлера.

Ейлер розробив унікальний метод перетворення рядів, який став одним із перших інструментів «чисельного прискорення» в історії. Це перетворення дозволяє замінити повільно збіжний знакозмінний ряд новим рядом, який наближається до суми експоненціально швидко.

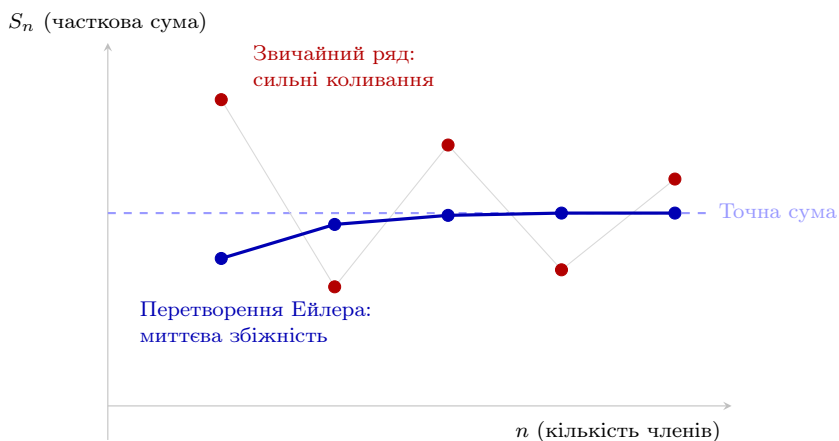


Рис. 8. Порівняння швидкості збіжності.

На рис. 8 наочно продемонстровано ефект такого прискорення: там, де звичайний знакозмінний ряд демонструє широкі амплітудні коливання, метод Ейлера миттєво «заспокоює» процес, досягаючи результату за лічені кроки.

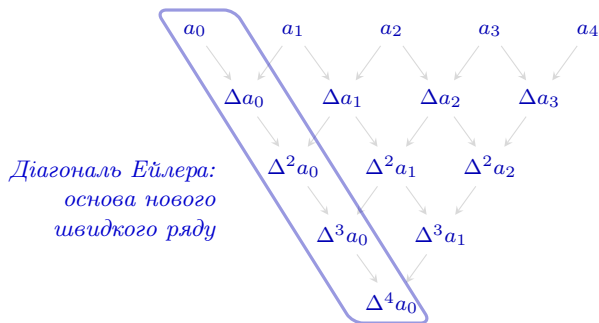


Рис. 9. Структура скінченних різниць.

Ця дивовижна ефективність не була випадковою знахідкою – вона впливала з особливого стилю мислення Ейлера, який умів бачити за числами приховані структури. На рис. 9 показано, як Ейлер «розкладав» числа на шари змін, виявляючи внутрішню логіку, приховану від звичайного погляду. Кожен елемент на виділеній діагоналі цієї схеми відповідає значенню внутрішньої суми для певного n , яке вчений згодом послідовно «зважає» за допомогою степенів двійки.

Щоб збагнути механізм такої трансформації, слід зазирнути в аналітичну «кухню» вченого. Ейлер застосовував надзвичайно сміливий для XVIII століття підхід: він почав працювати з математичними «операторами» як зі звичайними числами, перетворивши самі дії на об'єкти алгебраїчних маніпуляцій. Наприклад, для знакозмінного ряду $S = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$ його логіка виглядала так (загальна схема на рис. 10):

- **Крок 1. Оператор зсуву E .** Нехай E перетворює a_k на наступний член a_{k+1} ($Ea_k = a_{k+1}$). Тоді весь ряд можна записати через перший член a_0 :

$$S = a_0 - Ea_0 + E^2a_0 - E^3a_0 + \dots = (1 - E + E^2 - E^3 + \dots)a_0 \quad (13)$$

- **Крок 2. Геометрична прогресія.** Вираз у дужках ми можемо згорнути за формальною формулою суми геометричної прогресії зі знаменником $-E$:

$$S = \frac{1}{1 + E}a_0 \quad (14)$$

- **Крок 3. Трюк Ейлера.** Щоб отримати швидку збіжність, Ейлер виділяє у знаменнику двійку, готуючи вираз до нового розгортання:

$$S = \frac{1}{2 - (1 - E)} a_0 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1-E}{2}} \right) a_0 \quad (15)$$

- **Крок 4. Повернення до нескінченного ряду.** Тепер дріб у дужках знову розгортається у геометричну прогресію, але вже за «новим» знаменником $q = \frac{1-E}{2}$:

$$S = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{1-E}{2} \right) + \left(\frac{1-E}{2} \right)^2 + \dots \right] a_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-E)^n}{2^{n+1}} a_0 \quad (16)$$

- **Крок 5. Біном Ньютона.** Залишилося розкрити дужки $(1 - E)^n$ та застосувати результат до a_0 . Це перетворює операторну конструкцію на звичну суму через біноміальні коефіцієнти:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k E^k a_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k a_k \quad (17)$$

Цей п'ятикроковий аналітичний маневр, візуалізований на рис. 10, наочно ілюструє перехід від традиційного додавання членів ряду до інтелектуального маніпулювання його структурою. Оператор зсуву E тут виступає у ролі «інструмента-маніпулятора», який дозволяє Ейлеру переупакувати інформацію ряду в нову, набагато ефективнішу форму. Саме такий підхід дозволив вченому випередити час і створити методи обчислень, що не втратили актуальності й сьогодні.

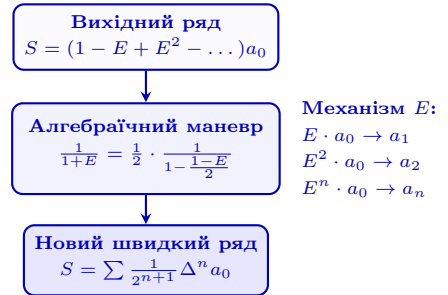


Рис. 10. Логіка перетворення.

Приклад 1.2. Застосуємо це перетворення до «парадоксального» розбіжного ряду Гранді: $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, де всі $a_k = 1$. Для будь-якого $n > 0$ внутрішня сума перетворюється на розклад бінома $(1 - 1)^n$, що дорівнює

нулю:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \cdot 1 = (1-1)^n = 0 \quad (18)$$

Єдиний ненульовий член виникає лише при $n = 0$:

$$S = \frac{1}{2^{0+1}} \cdot \binom{0}{0} (-1)^0 \cdot 1 = \frac{1}{2} \quad (19)$$

Таким чином, формула миттєво видає чітке середнє значення $1/2$.

Формула Ейлера–Маклорена.

Один із його найпотужніших винаходів, що став «містком» між дискретним додаванням та неперервним інтегруванням:

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_1^n f(x) dx + \frac{f(1) + f(n)}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} \Delta f^{(2k-1)} + R_m, \quad (20)$$

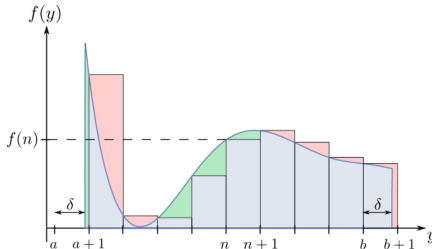


Рис. 11. Зв'язок суми та інтеграла.

На рис. 11 наочно продемонстровано геометричну проблему, яку розв'язує ця формула. Сума значень функції (зображена прямокутниками) лише приблизно дорівнює площі під синьою кривою (інтегралу). Ми бачимо, що в певних місцях інтеграл дає завищений

результат (*зелені зони*), а в інших – занижений (*червоні зони*).

У формулі (20) **інтеграл** дає основне наближення суми, другий доданок – **середнє значень** на кінцях відрізка – коригує похибку країв, третій – **сума різниць похідних** $f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(1)$ із числами Бернуллі (B_{2k}) – враховує найменші «вигини» кривої, а R_m є **залишком**. Ця формула дозволила Ейлеру замінити тижні нудної арифметики на хвилини аналітичної роботи, досягаючи ювелірної точності в астрономічних і геодезичних розрахунках.

Приклад 1.3. Розглянемо обчислення суми першої тисячі членів ряду обернених квадратів: $\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^2}$ і практичну потужність формули Ейлера–

Маклорена (20) для цього. У той час математики лише здогадувалися, до якого числа прямує цей ряд, а безпосереднє додавання тисячі дробів було надзвичайно виснажливим. Ейлер зміг отримати результат за кілька хвилин:

1. **Головне наближення (інтеграл):** $\int_1^{1000} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{1000} = 1 - \frac{1}{1000} = 0,999$.
2. **Крайова поправка:** $\frac{f(1)+f(1000)}{2} = \frac{1+0,000001}{2} \approx 0,5$.
3. **Корекція «вигину» (через похідну $f'(x) = -2/x^3$):** $\frac{B_2}{2!}(f'(1000) - f'(1)) \approx \frac{1}{12}(0 + 2) = 0,1666\dots$

Сума цих трьох компонентів дає $\approx 1,6656$. Хоча це лише перші члени формули, отриманий результат уже неймовірно близький до реально-го значення суми (яка становить приблизно 1,6439...). Використання ще кількох доданків дозволило Ейлеру обчислити це значення з точністю до 20 знаків після коми – демонстрація сили інтелектуального алгоритму, який задовго до появи ЕОМ дозволив підкорити нескінченність, замінивши мільярди механічних операцій декількома точними формулами.

1.4 Гармонічний ряд і стала Ейлера-Маскероні.

На яку відстань за край столу можна висунути конструкцію з однакових цеглин, що тримається лише за рахунок власної ваги? (рис.12)

На перший погляд здається, що така конструкція впаде вже після другої чи третьої цеглини. Проте математика вражає: використовуючи достатню кількість блоків, можна отримати будь-яку відстань – хоч кілометр, хоч довжиною в галактику!

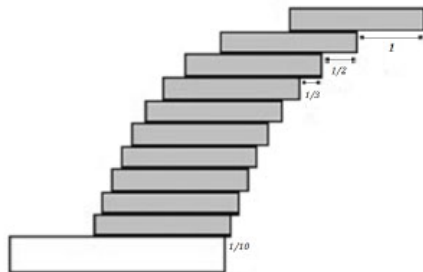


Рис. 12. Укладання блоків.

Секрет цього парадокса криється в об'єкті, який Ейлер досліджував у своїй «лабораторії рядів», – гармонічному ряді. Його назва має вишукане походження з античної

музичної теорії: довжини гармонік струни, що коливається, пропорційні членам цього ряду: $1, 1/2, 1/3, 1/4 \dots$.

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}. \quad (21)$$

Хоча на перший погляд здається, що сума має бути скінченною, цей ряд розбігається (прямує до нескінченності). Першим це довів ще у XIV столітті французький мислитель Микола Орем (бл. 1320–1382). Його праці заклали основу для вивчення нескінченних послідовностей у Європі, вплинувши на пізніших титанів науки, зокрема на Ньютона, про внесок якого ми детально писали у праці *«Британський батько математичного аналізу: біном Ньютона, гравітаційна взаємодія і дисперсія світла (The British Father of Mathematical Analysis: Newton's Binomial Theorem, Gravity, and the Decomposition of Light into Colors)»*.

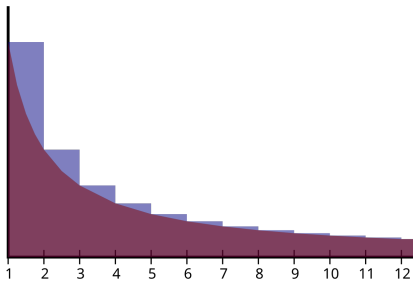


Рис. 13. Стала γ як площа, що залишаються між східчастою діаграмою ряду та гладкою кривою $y = 1/x$ (рис. 13).

Так з'явилася **стала Ейлера-Маскероні**:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0,5772156649 \dots \quad (22)$$

Ейлер також знайшов вражаючі інтегральні подання для цієї величини:

$$\gamma = - \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \quad (23)$$

Приклад 1.4. Наскільки повільно зростає гармонічний ряд:

- Щоб висунути міст за край столу лише на **5 довжин** цеглини, знадобиться близько **272 блоків**.
- На **50 довжин** – кількість необхідних цеглин зростає до приголомшливих $1,5 \cdot 10^{43}$ **одиниць**.

Для порівняння: сукупна маса такої кількості цеглин уже значно перевищувала б масу планети Земля!

Сьогодні стала Ейлера зустрічається всюди: від теорії чисел до квантової фізики. Проте вона приховує таємницю, яка не піддалася навіть Ейлеру. На відміну від e та π , математики досі не знають, чи є γ раціональним чи ірраціональним числом. Це залишається однією з найдавніших відкритих проблем, нагадуючи нам, що навіть у фундаменті аналізу, закладеному Ейлером, ще існують непідкорені вершини.

1.5 Дзета-функція та Базельська сенсація.

Дзета-функція визначається для $s > 1$ як

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \quad (24)$$

У 1735 році 28-річний Ейлер розв'язав «Базельську задачу» – знайти точну суму ряду обернених квадратів, що відповідає значенню $\zeta(2)$.

Ця проблема залишалася відкритою з 1644 року і не піддавалася навіть вчителю Ейлера Йоганну Бернуллі та його брату Якобу. Результат Ейлера став справжнім тріумфом аналітичного методу:

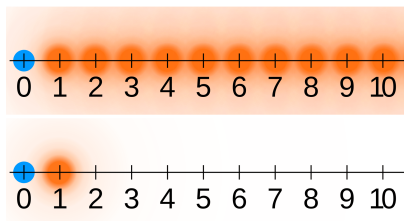


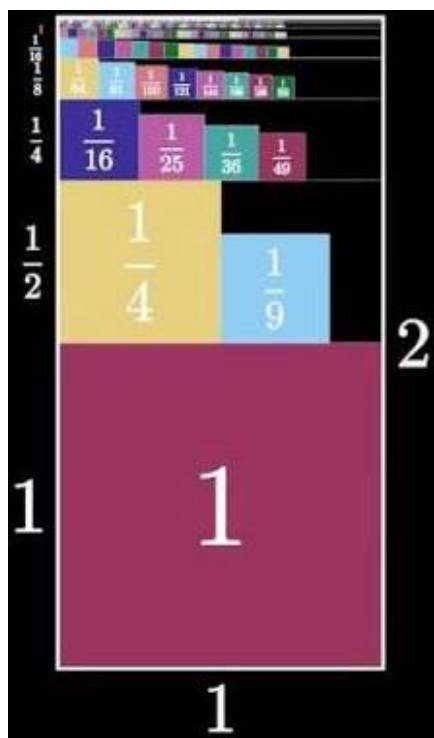
Рис. 14. Фізична аналогія.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (25)$$

На рис. 14 представлено дивовижну «світлову» аналогію цього результату. Уявіть нескінченний ряд однакових ліхтарів, розташованих на чи-

словій прямій у точках $n = 1, 2, 3, \dots$. Згідно з законом зворотних квадратів, яскравість кожного джерела для спостерігача в точці 0 зменшується як $1/n^2$.

Верхня частина рисунка показує сумарну яскравість від усіх таких ліхтарів, а нижня – яскравість лише одного ліхтаря на відстані 1. Результат Ейлера (25) доводить, що вся нескінченна гірлянда вогнів світитиме лише в $\pi^2/6 \approx 1,645$ рази яскравіше за один перший ліхтар. Поява числа π у такому контексті стала справжнім одкровенням, продемонструвавши прихований зв'язок між арифметикою та геометрією Всесвіту.



ми, він згрупував їх попарно:

$$\left(1 - \frac{x}{n\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) = \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \quad (27)$$

Це дозволило йому записати $\frac{\sin x}{x}$ у вигляді дивовижної нескінченної конструкції:

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \quad (28)$$

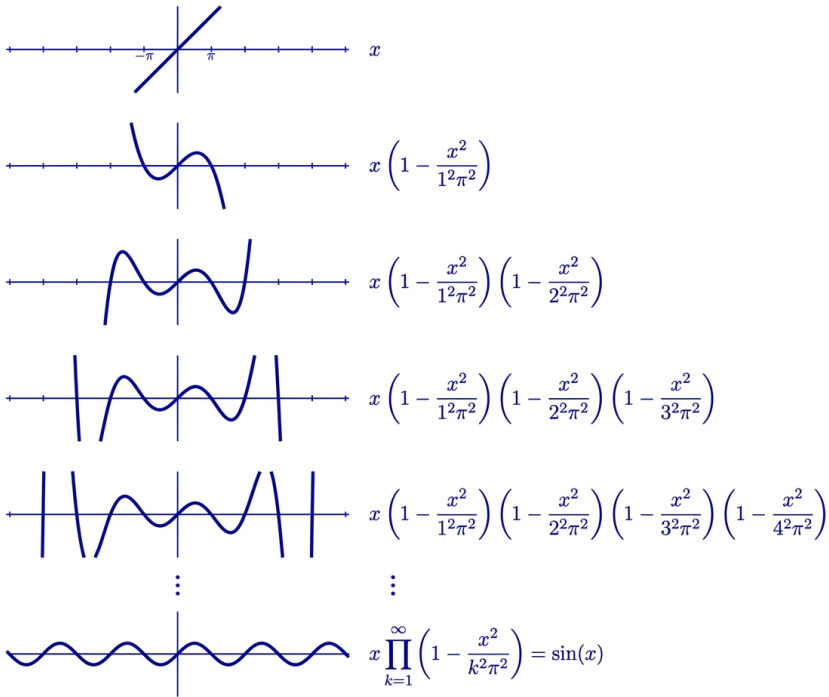


Рис. 16. Покрокове формування графіка синуса.

На рис. 16 візуалізовано цей процес: ми бачимо, як множення послідовних парабол «вигинає» графік, поступово перетворюючи його на хвилю синуса з відповідними коренями.

Порівнявши коефіцієнти при x^2 у ряді й у добутку, Ейлер одразу отри-

мав:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (29)$$

Поява π в сумі обернених квадратів здавалася сучасникам магією. Використовуючи той самий метод, вчений обчислив і вищі парні значення:

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}. \quad (30)$$

Загальна формула для значень **Дзета-функції** $\zeta(2k)$ через числа Бернуллі стала вінцем цього етапу досліджень Ейлера:

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} B_{2k} (2\pi)^{2k}}{2 (2k)!}. \quad (31)$$

Цей результат перетворив розрізнені суми на цілісний математичний об'єкт, який через століття Бернгард Ріман розширить на комплексну площину, заклавши фундамент для найважливішої нерозв'язаної задачі сучасності – гіпотези Рімана.

1.6 Число Ейлера e – константа росту.

Хоча наближення e зустрічалися ще в Непера та Якоба Бернуллі, саме Ейлер дав константі ім'я, визначив її природу й зробив центром аналізу:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \quad (32)$$

На рис. 17 наочно продемонстровано «магію» експоненти: у будь-якій точці кривої крутизна її підйому (нахил дотичної) чисельно збігається з висотою графіка над віссю x . Як ми вже зазначали, Ейлер першим зрозумів, що функція $f(x) = e^x$ є унікальною саме завдяки цій властивості.

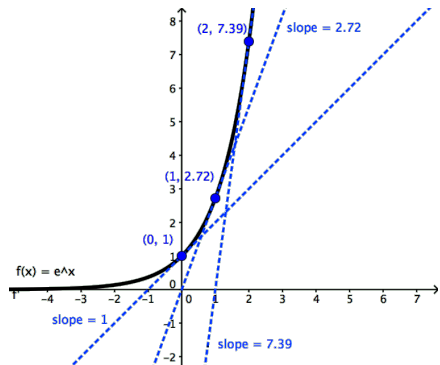


Рис. 17. Властивість експоненти.

Мовою аналізу це означає:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \int e^x dx = e^x + C \quad (33)$$

Ця особливість робить e «природною» основою математики. Будь-який процес у природі, де швидкість росту пропорційна поточному стану – від розмноження бактерій та поширення вірусів до зростання капіталу за складними відсотками – описується саме через число Ейлера. Таким чином, константа e виступає універсальним математичним кодом самого життя та його розвитку.

Приклад 1.5. Найкраще зрозуміти природу числа e можна на прикладі нарахування відсотків. Уявіть, що ви поклали \$100 під 100% річних.

- Якщо відсотки нараховуються **один раз на рік**, ви отримаєте \$200.
- Якщо **щоквартально**, капітал зростатиме за принципом «відсотки на відсотки», що дасть уже \$244,14.
- Якщо ж робити це **щомиті** (неперервно), сума не зростатиме нескінченно, вона наблизиться до збільшення в $e \approx 2,718$ разів - фундаментальної межі, яку встановив Всесвіт (рис. 18).

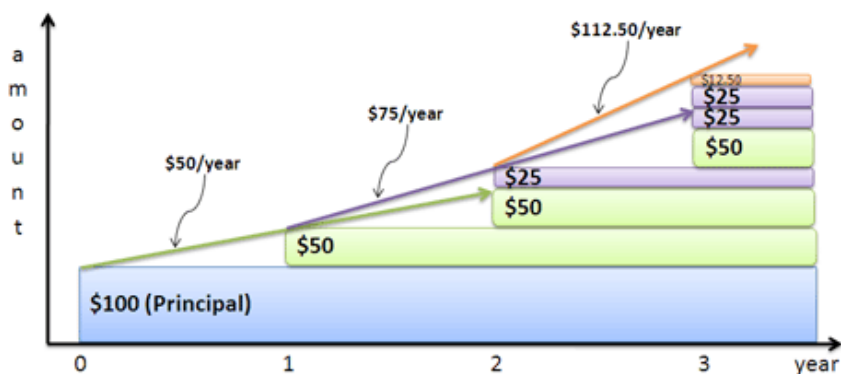


Рис. 18. Візуалізація траєкторії складних відсотків.

Доведення ірраціональності e .

Ейлер став першим, хто довів ірраціональність e у 1737 році (опубліковано 1744), спираючись на дивовижний розклад цього числа у нескінченний ланцюговий дріб (рис. 19).

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}$$

Найбільшим сюрпризом для вченого стало те, що за ірраціональною природою константи прихована завожуюча внутрішня гармонія. На відміну від числа π , чий розклад у ланцюговий дріб виглядає хаотичним, нескінченна структура для e вибудовує строгий ритм парних чисел, розділених одиницями.

Рис. 19. Ланцюговий дріб e .

У компактному записі $[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots]$ цей «математичний пульс» Всесвіту проявляється як послідовність блоків **1**, **2n**, **1**. Оскільки цей дріб ніколи не закінчується, Ейлер зробив логічний висновок: число e не може бути раціональним. Саме це відкриття стало для нього першим кроком до об'єднання процесів росту та обертання у комплексній площині. Проте сьогодні більш вживаним є аналітичне доведення, що спирається на введений Ейлером ряд: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Доведення. Припустимо супротивне: нехай e є раціональним числом, тобто $e = \frac{p}{q}$, де $p, q \in \mathbb{N}$. Оскільки $2 < e < 3$, то e не є цілим, отже знаменник $q \geq 2$.

Розглянемо число x , яке утворюється шляхом множення факторіала знаменника на різницю між числом e та частковою сумою його ряду до q -го члена:

$$x = q! \left(e - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} \right) = q! \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} \right) = q! \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (34)$$

1. Чому x має бути цілим?

Підставимо припущення $e = p/q$ у перше представлення x формули 34:

$$x = q! \cdot \frac{p}{q} - q! \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} = \underbrace{(q-1)! \cdot p}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{\sum_{n=0}^q \frac{q!}{n!}}_{\in \mathbb{Z}} \quad (35)$$

Оскільки $q!/n!$ для всіх $n \leq q$ є цілим числом, то x як різниця двох цілих чисел також має бути **цілим**.

2. Оцінка величини x .

З іншого боку, зважаючи на розклад e у нескінченний ряд (друге представлення x у формулі 34), вираз у дужках є залишком («хвостом») цього ряду від члена $q+1$ до нескінченності (третій вираз x у формулі 34):

$$x = q! \left(\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \dots \right) = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots \quad (36)$$

Очевидно, що $x > 0$, оскільки всі доданки додатні. Оцінимо суму зверху, замінивши кожен множник у знаменниках (крім першого) на $(q+1)$:

$$x < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \dots \quad (37)$$

Перед нами нескінченна геометрична прогресія з першим членом $a = \frac{1}{q+1}$ та знаменником $r = \frac{1}{q+1}$. Її сума дорівнює:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1/(q+1)}{1-1/(q+1)} = \frac{1}{q} \quad (38)$$

Отже, ми отримали, що $0 < x < \frac{1}{q}$, а це суперечність: число x одночасно має бути цілим і знаходитися в інтервалі $(0, 1)$. Отже, припущення про раціональність e було хибним, що й доводить ірраціональність числа Ейлера. $\square$



Рис. 20. Геометрична суперечність: $x \in \mathbb{Z}$ та $x \in (0, 1/q) \subset (0, 1)$.

1.7 Уявна одиниця i .

Починаючи з епохи Відродження (Кардано, Бомбеллі), математики стикалися з квадратними коренями з від'ємних чисел під час розв'язання кубічних рівнянь, але називали їх «софістичними», «неможливими» або «уявними». Ейлер став першим, хто припинив ставитися до них як до прикрої аномалії та побудував на їхній основі логічну замкнену систему.

Його внесок у «легалізацію» комплексного світу складався з кількох фундаментальних кроків:

- **Введення символу i :** Протягом тривалого часу вчені писали $\sqrt{-1}$, що призводило до логічних помилок (наприклад, чи дорівнює $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$?). У 1777 році Ейлер ввів символ i (від лат. *imaginaris*) і чітко визначив його головну властивість: $i^2 = -1$. Це просте позначення миттєво зробило алгебраїчні маніпуляції з комплексними числами прозорими та безпечними.
- **Алгебраїчна форма та дії:** Ейлер закріпив запис комплексного числа у вигляді $z = a + bi$, де a та b – дійсні числа (див. рис. 21). Він показав, що над такими об'єктами можна виконувати всі арифметичні операції, і результат завжди залишатиметься у формі $a + bi$. Це була практична демонстрація ідеї *алгебраїчної замкненості*.

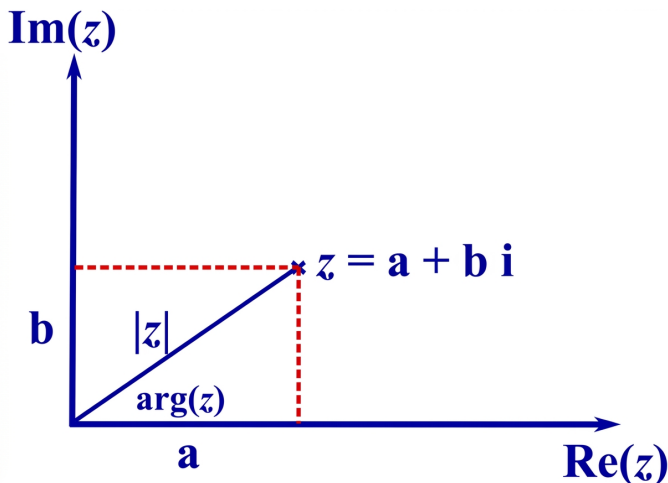


Рис. 21. Число $z = a + bi$ на комплексній площині.

- **Піднесення до степеня та корені:** Використовуючи свою формулу $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, Ейлер навчив світ добувати корені будь-якого степеня з комплексних чисел, що стало основою для теорії Галуа та сучасної цифрової обробки сигналів. Він показав, що корінь n -го степеня з $z = re^{i\varphi}$ має рівно n значень ($k = 0, 1, \dots, n-1$), які на комплексній площині розташовані симетрично на колі радіуса $\sqrt[n]{r}$ (див. рис. 22):

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (39)$$

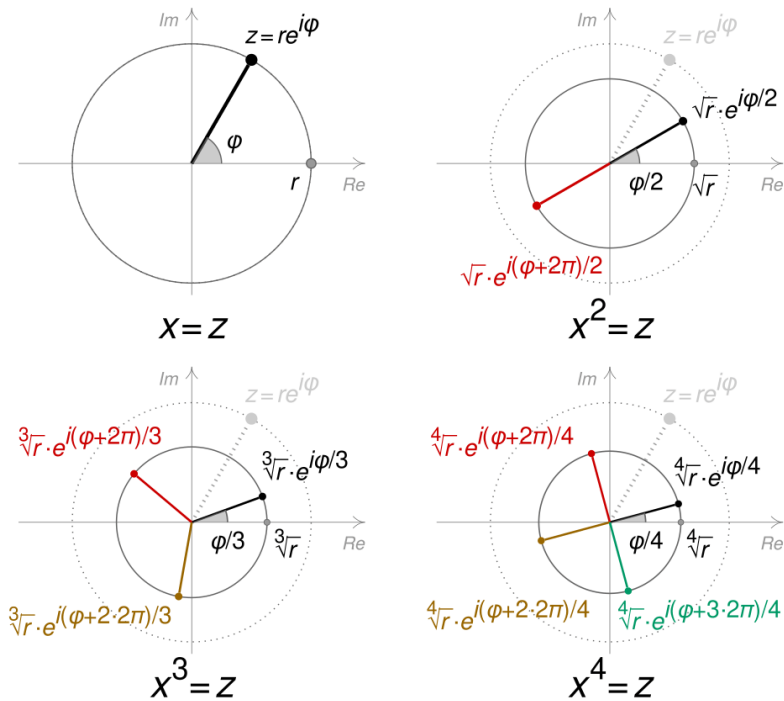


Рис. 22. Корені степеня $n = 1, 2, 3, 4$ з комплексного числа $z = re^{i\varphi}$.

- **Геометризація аналізу:** Хоча строге геометричне тлумачення комплексної площини з'явилося пізніше (Вессель, Арган, Гаусс), саме Ейлер першим почав розглядати комплексне число як пару значень (r, φ) – модуль і аргумент. Це перетворило алгебру на інструмент для вивчення поворотів та розтягувань у просторі.

Ейлер довів, що комплексні числа не лише не суперечать логіці, а й дозволяють розв'язувати задачі, які в дійсних числах не мають розв'язку. Сьогодні апарат комплексних чисел є мовою, якою розмовляє вся квантова механіка (де хвильова функція ψ є комплексною за своєю природою), електротехніка (метод комплексних амплітуд для аналізу змінних струмів) та аеродинаміка (опис обтікання крила літака). Ейлер перетворив «уявний» об'єкт на найреальніший інструмент прогресу.

1.8 Найелегантніша формула математики.

У 1988 році читачі журналу *The Mathematical Intelligencer* визнали формулу Ейлера «найкрасивішою формулою в математиці». Один із найвидатніших фізиків світу, Річард Фейнман, у своїх славетних лекціях з фізики назвав рівняння Ейлера «найдивовижнішою формулою в математиці». Ще один блискучий математик, сер Майкл Атія, порівняв цю формулу з фразою Гамлета: «Вона є математичним аналогом вислову «бути чи не бути» – дуже коротка, дуже стисла, але водночас надзвичайно глибока». Це відкриття стало тріумфом аналітичної думки Ейлера, який зумів побачити глибоку внутрішню єдність там, де інші бачили лише розрізнені дисципліни: арифметику, геометрію та аналіз.

Фундаментом цього синтезу стала розроблена Ейлером техніка нескінченних рядів. Він розглянув степеневі розклади для експоненти та тригонометричних функцій (згадані нами раніше), які дозволяють обчислити значення цих функцій через нескінченне додавання простих дробів (рис. 23):

$$\begin{aligned}
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
 \cos x + \sin x &= 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
 e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots
 \end{aligned}$$

Рис. 23. Степеневі розклади для експоненти, косинуса та синуса.

Ейлер здійснив сміливий крок, підставивши уявний аргумент ix замість дійсного x у розклад експоненти:

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots \quad (40)$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \dots \quad (41)$$

Згрупувавши окремо дійсні та уявні частини, він отримав фундаментальне співвідношення, відоме як **формула Ейлера** (рис. 24):

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (42)$$

Найвідомішим наслідком цієї рівності став частковий випадок при $x = \pi$, що дає **тотожність Ейлера**:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (43)$$

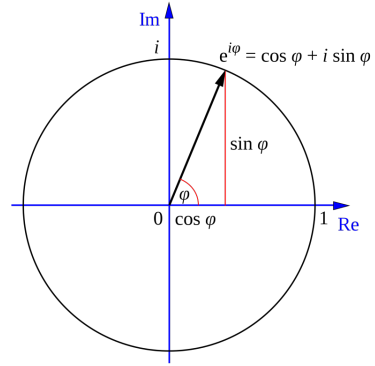


Рис. 24. Формула Ейлера на одиничному колі.

Цей лаконічний вираз об'єднує п'ять фундаментальних констант математики (рис. 25), кожна з яких уособлює цілий розділ науки: 0 та 1 (арифметика), i (алгебра), π (геометрія) та e (аналіз).

Формула (42) радикально спростила математичний світ, дозволивши замінити громіздкі тригонометричні перетворення на прості дії з показниками степенів. З неї безпосередньо випливають вирази для тригонометричних функцій через експоненту:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (44)$$

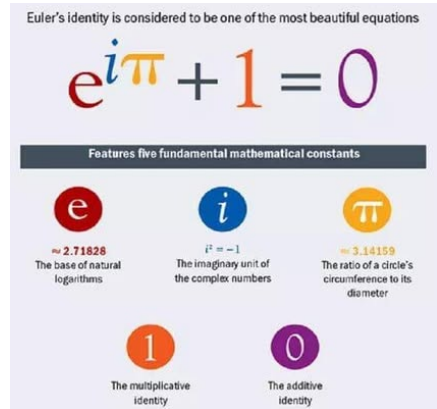


Рис. 25. Тотожність Ейлера з п'яти фундаментальних констант.

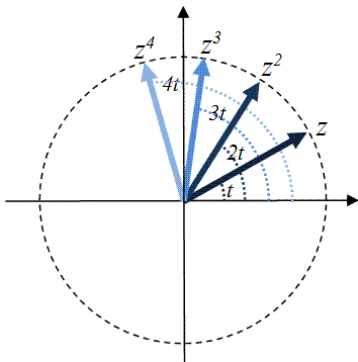


Рис. 26. Геометрична інтерпретація формули Муавра.

У сучасному ж аналізі ми бачимо елегантний ланцюжок рівностей:

$$(\cos x + i \sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx), \quad (46)$$

який перетворює складне доведення на очевидну властивість степеня.

Приклад 1.6. Щоб знайти $\cos 3x$, скористаємося формулою Муавра:

$$\cos 3x + i \sin 3x = (\cos x + i \sin x)^3 \quad (47)$$

Розкриємо праву частину за формулою бінома Ньютона $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, де $a = \cos x$, а $b = i \sin x$:

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x + 3i^2 \cos x \sin^2 x + i^3 \sin^3 x \quad (48)$$

Враховуючи властивості уявної одиниці ($i^2 = -1$ та $i^3 = -i$), згрупуємо дійсні та уявні доданки:

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \underbrace{(\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x)}_{\text{Re}} + i \underbrace{(3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x)}_{\text{Im}} \quad (49)$$

Прирівнюючи дійсні частини лівої та правої сторін, отримуємо:

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x \quad (50)$$

Одночасно одним із потужних застосувань і важливою основою для виводу формули Ейлера є **формула Муавра** для піднесення комплексного числа до степеня n (рис. 26):

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx) \quad (45)$$

Саме аналіз цієї закономірності для нескінченно великих показників n дозволив Ейлеру побачити зв'язок між тригонометрією та процесами експоненціального росту.

Щоб виразити результат лише через косинус, застосуємо основну тотожність $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos^3 x - 3 \cos x(1 - \cos^2 x) \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x\end{aligned}\tag{51}$$

Таким чином, Ейлер зміг витягнути на світло невидимі зв'язки Всесвіту, об'єднавши їх в одну найелегантнішу формулу: сьогодні будь-яке гармонійне коливання – від звуку голосу до радіохвиль та квантових станів частинок – описується ейлерівською експонентою $Ae^{i(\omega t + \varphi)}$. Зокрема, дійсне та уявне значення цієї експоненти задають взаємопов'язані синусоїдальні й косинусоїдальні гармоніки (як на рис. 27), які описують фізичні процеси з зсувом фаз на $\pi/2$ (наприклад, коливання напруги та струму в LC-контурі).

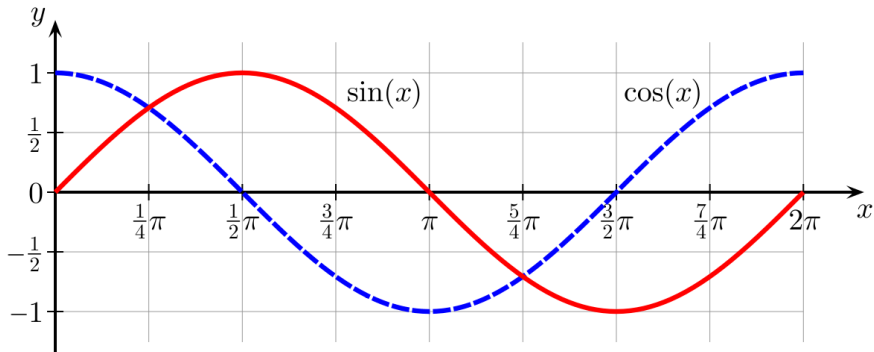


Рис. 27. Класичний LC-контур з гармонічними коливаннями.

1.9 Логарифми та велика суперечка.

Леонард Ейлер поставив крапку в інтелектуальній дуелі, що тривала понад пів століття між двома титанами — Готфрідом Лейбніцом та Йоганном Бернуллі. Суперечка точилася навколо питання: чому дорівнює логарифм від'ємного числа?

Лейбніц стверджував, що логарифми від'ємних чисел не існують, оскільки логарифмічна функція зростає повільніше за будь-який степінь.

Натомість Бернуллі, спираючись на правила диференціювання, доводив, що $\ln(-x) = \ln(x)$. Його аргумент був логічним: оскільки $d(\ln(-x)) = \frac{-1}{-x} dx = \frac{1}{x} dx = d(\ln x)$, то після інтегрування функції вони мають бути рівними.

У 1749 році Ейлер опублікував працю «Дослідження про справжні корені рівнянь», де показав, що обидва вчені помилялися, оскільки розглядали логарифм як однозначну функцію на дійсній прямій. Використовуючи свою фундаментальну формулу $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, Ейлер вивів загальну теорію багатозначності комплексного логарифма (рис. 28):

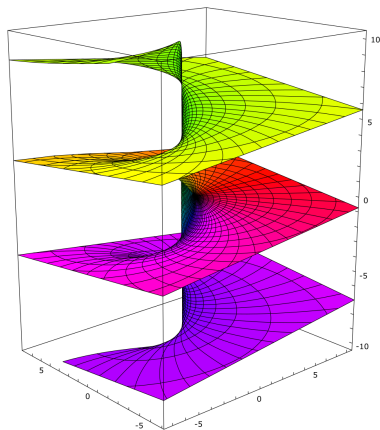


Рис. 28. Багатозначність комплексного логарифма.

- **Багатозначність логарифма:** Якщо будь-яке число $z \neq 0$ представити у показниковій формі:

$$z = r e^{i(\varphi + 2k\pi)}, \quad (52)$$

де $r = |z|$, φ – аргумент числа, а $k \in \mathbb{Z}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то логарифм комплексного числа визначається як:

$$\text{Ln}(z) = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi). \quad (53)$$

- **Логарифм від’ємної одиниці:** Для числа -1 модуль $r = 1$, а аргумент $\varphi = \pi$. Отже, логарифм від’ємної одиниці має нескінченну кількість значень, жодне з яких не є дійсним:

$$\text{Ln}(-1) = i(\pi + 2k\pi). \quad (54)$$

Головне значення ($k = 0$) дорівнює $i\pi$. Це пояснило помилку Бернуллі: хоча похідні $\ln(x)$ та $\ln(-x)$ однакові, самі функції відрізняються на комплексну константу інтегрування $C = i\pi$.

- **Логарифм уявної одиниці:** Аналогічно, Ейлер показав, що логарифми суто уявних чисел також є комплексними:

$$\text{Ln}(i) = i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right). \quad (55)$$

Це відкриття мало колосальні наслідки. Ейлер продемонстрував, що комплексні числа не є «математичною аномалією», а складають цілісну, логічно замкнену систему. Він фактично створив *аналітичний фундамент комплексного світу*, де логарифмування, піднесення до степеня та тригонометрія злилися в єдине ціле. Наприклад, він зміг обчислити навіть таке екзотичне значення, як «уявна одиниця в степені уявної одиниці»:

$$i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2} \approx 0,207879... \quad (56)$$

Той факт, що уявне число в уявному степені може дати цілком реальне дійсне число, став справжнім тріумфом ейлерівського аналізу, розширивши межі математичного світу до нескінченності.

1.10 Гамма-функція: інтерполяція неможливого.

Однією з найскладніших задач математики XVIII століття була проблема «інтерполяції факторіала» (рис. 29).

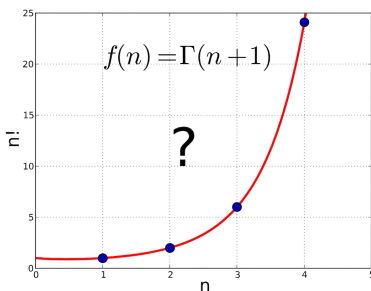


Рис. 29. Інтерполяція факторіала: пошук кривої.

Факторіал ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$) за своєю природою є дискретною функцією. Математики (зокрема Даніель Бернуллі та Христіан Гольдбах) задалися питанням: чи можна знайти плавну криву, яка проходить через точки факторіала і дозволяє обчислити, наприклад, $(\frac{1}{2})!$ або $(2,5)!$?

У 1729 році в листах до Гольдбаха Ейлер представив розв'язок, запропонувавши замінити дискретний добуток визначеним інтегралом:

$$I(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^s dt \quad (57)$$

Для того, щоб перевірити, чи притаманна цьому інтегралу властивість факторіала, застосуємо інтегрування частинами ($\int u dv = uv - \int v du$), де $u = t^s$, а $dv = e^{-t} dt$:

$$I(s) = \underbrace{[-t^s e^{-t}]_0^\infty}_0 + \int_0^\infty s t^{s-1} e^{-t} dt = s \cdot I(s-1) \quad (58)$$

Ми отримали рекурсію $I(s) = s \cdot I(s-1)$, яка повністю повторює закон факторіала. Обчисливши базове значення для $s = 0$:

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1 = 0! \quad (59)$$

Звідси за індукцією стає зрозуміло, що для цілих n : $I(n) = n!$. Побудована таким чином неперервна функція (рис. 30) поширює закон факторіала на довільні дійсні числа: гладка крива інтерполяції факторіала при $x > 0$ та вертикальні асимптоти (пунктирні лінії) у точках $x = 0, -1, -2, -3, -4$, де функція прямує до нескінченності.

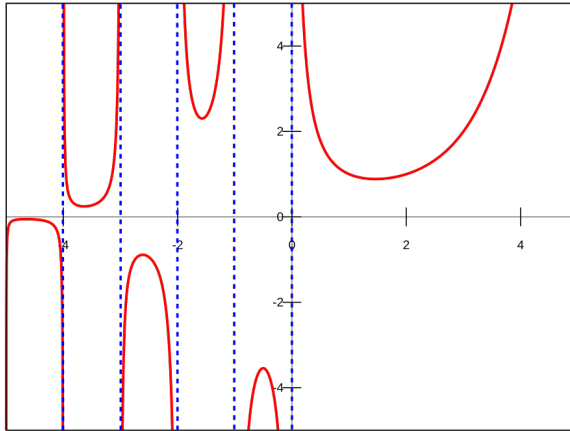


Рис. 30. Графік Гамма-функції $\Gamma(x)$ на дійсній осі.

Означення та дивовижні властивості.

Ейлер визначив функцію $\Gamma(z)$, яку сьогодні називають інтегралом Ейлера другого роду. Важливо зауважити зміну змінної $z = s + 1$:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \implies \Gamma(n+1) = n!. \quad (60)$$

Вихід у комплексну область відкриває повну геометрію цієї функції (рис. 31): вона є голоморфною по всій комплексній площині, за винятком точок $z = 0, -1, -2, \dots$, де має прості полюси.

Ця функція приховує в собі дивовижні зв'язки:

- **Зв'язок із числом π :** Одним із найвражаючих результатів стало обчислення $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. Через заміну змінних цей інтеграл зводиться до інтеграла Гаусса, що дає:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \implies \left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}. \quad (61)$$

- **Формула доповнення:** Ейлер знайшов місток між Гамма-функцією та тригонометрією:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (62)$$

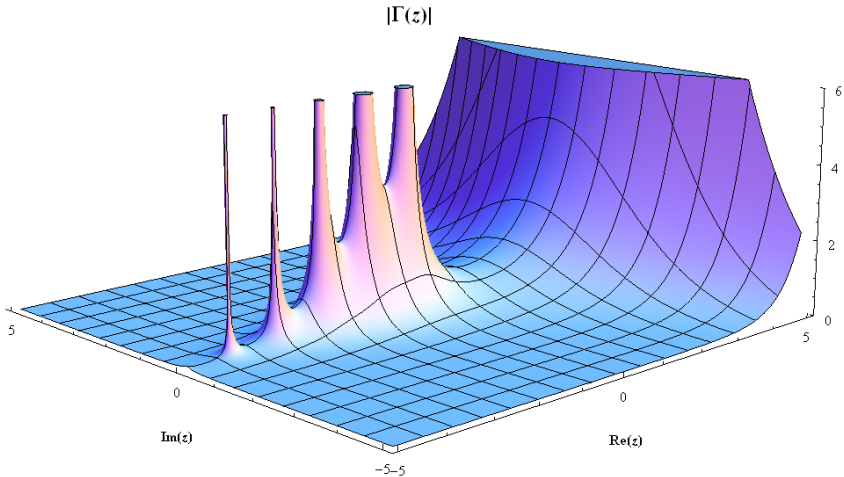


Рис. 31. Модуль Гамма-функції $|\Gamma(z)|$ у комплексній площині.

Саме формула (62) стала ключем для Бернгарда Рімана у доведенні функціонального рівняння Дзета-функції, встановивши симетрію, на якій базується знаменита **гіпотеза Рімана**.

На рис. 31 представлено «рельєф» Гамма-функції у комплексному просторі. Ейлер зміг побачити цей нескінченний ландшафт очима розуму задовго до появи сучасної комп'ютерної графіки. Проте вчений не зупинився на одному типі інтегралів. Поряд із Гамма-функцією він дослідив її «дзеркального партнера» – **інтеграл першого роду**, відомий як **Бета-функція**:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (63)$$

Те, що у XVIII столітті здавалося сучасникам лише витонченими «іграми з нескінченністю», через двісті років перетворилося на фундамент сучасної технологічної цивілізації:

1. **Квантова фізика.** У 1968 році Габріеле Венеціано використав Бета-функцію для опису взаємодії частинок, що започаткувало *теорію струн*. Її геометричним втіленням є многовиди Калабі-Яу (рис. 32).

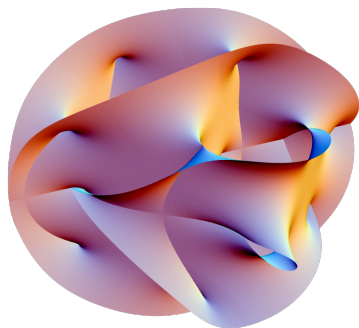


Рис. 32. Многовид Калабі-Яу.

2. **Статистика та ІТ.** Гамма-розподіл (рис. 33), побудований на інтегралах Ейлера, є базовим для моделювання черг, аналізу надійності систем та трафіку в мережах.

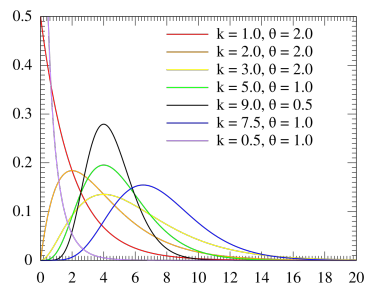


Рис. 33. Гамма-розподіл.

3. **Аналітичне продовження.** Ейлер навчив науку «виходити за межі» дискретного, перетворивши цифри на неперервний ландшафт, що дозволило вивчати об'єкти, які раніше вважалися неможливими.

1.11 «Конституція» аналізу та варіаційне числення.

Ейлер створив фундаментальну «трилогію», яка на два століття вперед визначила канон математичної освіти. Цей грандіозний цикл праць став справжньою «Конституцією» для всіх майбутніх математиків:

1. «Вступ до аналізу нескінченно малих» (1748) – теорія функцій, ряди, комплексні числа;
2. «Основи диференціального числення» (1755) – теорія похідних та пошук екстремумів функцій;
3. «Основи інтегрального числення» (1768–1770) – фактично створення теорії диференціальних рівнянь і основ варіаційного числення.

Якщо диференціальне числення Ейлера вчило знаходити найкращі *точки* (мінімуму чи максимуму), то створене ним варіаційне числення дозволило знаходити найкращі *шляхи*. Це був вихід на новий рівень абстракції: від пошуку екстремумів функцій до пошуку екстремумів функціоналів.

Цю концепцію можна проілюструвати витонченою математичною метафорою (рис. 34): якщо окремі миті щастя — це лише точки на графіку, то саме життя постає як «функціонал» — складний інтегральний підсумок усього шляху від народження до смерті. Варіаційне числення Ейлера навчило науку працювати саме з такими цілісними об'єктами.

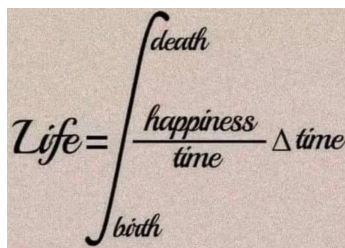

$$\text{Life} = \int_{\text{birth}}^{\text{death}} \frac{\text{happiness}}{\text{time}} \Delta \text{time}$$

Рис. 34. Метафора функціонала.

У 1744 році Ейлер опублікував працю, в якій заклав основи цього методу. Пізніше, завдяки вдосконаленням 19-річного Жозефа-Луї Лагранжа, цей напрям отримав назву **варіаційного числення**.

Функціонал — це відображення, що кожній функції ставить у відповідність число (наприклад, довжину кривої або час руху по ній):

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (64)$$

Необхідна умова пошуку таких шляхів – рівняння Ейлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (65)$$

Ідея доведення. Ейлер і Лагранж використали метод «варіацій»: якщо ми трохи відхилимося від оптимальної кривої ($y + \epsilon \eta$), то значення функціонала має змінитися. Умова того, що перша похідна за цим відхиленням дорівнює нулю ($\frac{dJ}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} = 0$), і приводить нас до рівняння (65). $\square$

Практична сила цього методу була продемонстрована на класичних задачах, які раніше здавалися нездоланими.

Приклад 1.7 (Задача про брахістохрону). Потрібно знайти криву найшвидшого спуску між двома точками під дією гравітації. Час спуску виражається функціоналом:

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad (66)$$

Застосувавши рівняння (65), Ейлер довів, що цією кривою є не пряма, а **циклоїда** – траєкторія, яку описує точка на колі, що котиться по прямій.

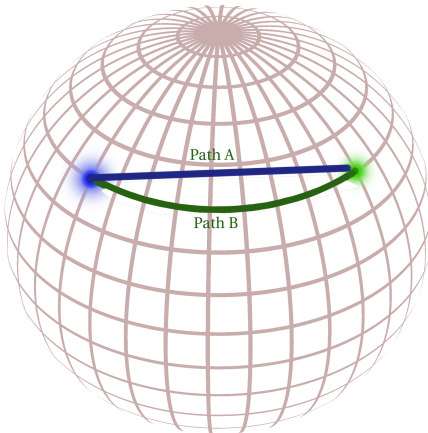


Рис. 35. Геодезична лінія – Path A на сфері.

Геодезичні лінії – задача про пошук найкоротшої кривої на викривленій поверхні. Для площини функціонал довжини має вигляд:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (67)$$

Рівняння Ейлера для цього випадку спрощується до $y'' = 0$, що дає пряму лінію. Проте справжня сила аналітичного методу проявляється на складних поверхнях.

На рис. 35 продемонстровано випадок для сфери: на відміну від

площини, на поверхні кулі найкоротшими шляхами є геодезичні лінії – «прямі» на викривлених поверхнях (*Path A*).

Метод Ейлера дозволяє знайти такі оптимальні траєкторії для будь-яких об'єктів – від глобуса (що є критично важливим для авіанавігації) до викривленого простору-часу, що згодом стало математичним фундаментом загальної теорії відносності Альберта Ейнштейна.

Створенням варіаційного числення Ейлер завершив побудову «Конституції аналізу». Він показав, що Всесвіт підпорядковується принципу найменшої дії, а математика є мовою, що дозволяє кількісно виразити цю економію зусиль.

1.12 Диференціальні рівняння, чисельні методи та вихід у фізику.

Аналіз Ейлера ніколи не залишався чистою теорією – він був створений для підкорення реального світу. Ейлер розробив методи розв'язання лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, систематично дослідив рівняння Ейлера–Коші та заклав основи гідродинаміки. Проте його найважливішим практичним внеском став вихід за межі точних формул.

Розуміючи, що далеко не кожне рівняння можна розв'язати аналітично, Ейлер заклав фундамент сучасних наближених обчислень. Він запропонував найпростіший і водночас фундаментальний чисельний метод розв'язання диференціальних рівнянь – **метод ламаних**, або **метод Ейлера** (рис. 36):

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad (68)$$

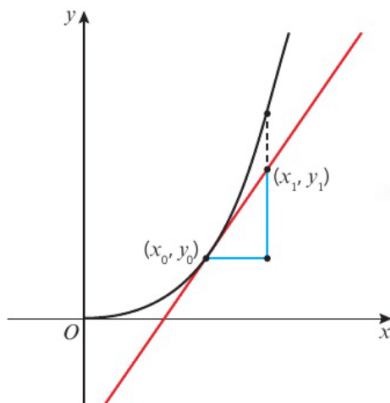


Рис. 36. Метод Ейлера.

На рис. 36 наочно продемонстровано логіку цього підходу: ми рухаємося від відомої точки (x_0, y_0) вздовж дотичної (червона лінія) коротким кроком h , отримуючи наближене значення (x_1, y_1) . Сьогодні цей алгоритм є «прадідусем» усіх комп'ютерних симуляцій – від прогнозів погоди

до розрахунку траєкторій космічних апаратів.

Для підвищення точності Ейлер згодом розробив **метод трапецій** (покращений метод Ейлера), де використовується допоміжне значення $y_{n+1}^* = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)] \quad (69)$$

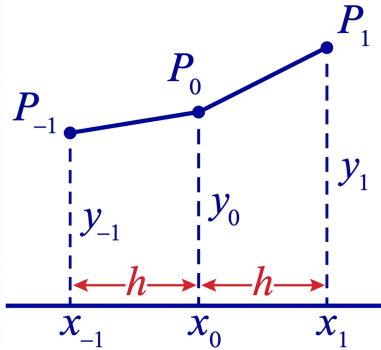


Рис. 37. Метод трапецій

На рис. 37 продемонстровано ідею цього вдосконалення: замість того, щоб «сліпо» рухатися за дотичною лише з однієї точки, ми враховуємо нахили в обох кінцях часового кроку h . Геометрично це означає, що крива наближається відрізками, які з'єднують точки P_i , утворюючи під графіком фігури, максимально наближені до трапецій.

Крім розв'язання рівнянь, Ейлер потребував інструментів для наближеного обчислення нескінченних сум та інтегралів. Тут на допомогу прийшла вже згадана нами раніше **формула Ейлера–Маклорена** (20). Вона стала універсальним засобом, пов'язавши дискретне додавання з неперервним аналізом.

Рівняння Ейлера–Коші.

Ще одним тріумфом Ейлера у побудові математичної системи став метод розв'язання особливого класу лінійних диференціальних рівнянь, де степінь незалежної змінної x відповідає порядку похідної:

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \quad (70)$$

Його геніальна здогадка полягала в тому, що розв'язок таких «пропорційних» конструкцій слід шукати не через експоненту, а у вигляді степеневої функції $y = x^r$. Це дозволило перетворити диференціальну задачу на розв'язання звичайного алгебраїчного (характеристичного) рівняння,

типи коренів якого визначають характер поведінки системи (рис. 38).

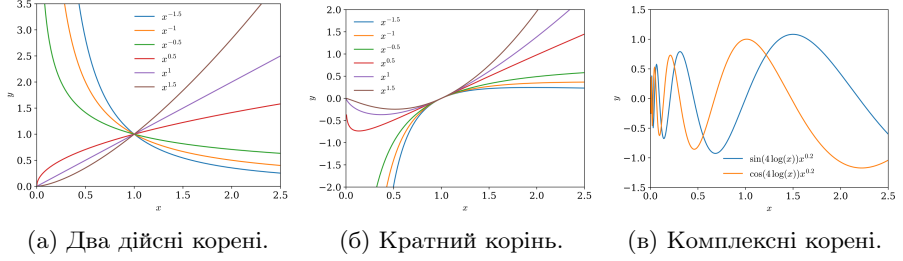


Рис. 38. Типові криві розв'язків рівняння Ейлера-Коші.

Приклад 1.8. Розв'язати $x^2y'' + xy' - y = 0$.

Підставляємо $y = x^r$:

$$y' = rx^{r-1} \quad (71)$$

$$y'' = r(r-1)x^{r-2} \quad (72)$$

Отримуємо:

$$x^2 \cdot r(r-1)x^{r-2} + x \cdot rx^{r-1} - x^r = 0 \quad (73)$$

Скорочуючи на x^r :

$$r(r-1) + r - 1 = 0 \Rightarrow r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 \quad (74)$$

Загальний розв'язок:

$$y = C_1x + C_2x^{-1} \quad (75)$$

Метод варіації довільних сталих: математика небесних збурень.

Ейлер першим застосував ідеї «варіації параметрів», розв'язуючи фундаментальні задачі небесної механіки (зокрема, теорію руху Місяця). Він зрозумів, що для опису реального руху небесних тіл «застиглі» константи ідеальної траєкторії мають стати «живими» функціями, що змінюються під гравітаційним впливом інших планет.

Для рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ з відомим загальним розв'язком однорідного рівняння $y_0 = C_1y_1 + C_2y_2$, розв'язок неоднорідного рівняння

шукається у вигляді:

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \quad (76)$$

де функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ визначаються із системи, що враховує зовнішню силу $f(x)$:

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x) \end{cases} \quad (77)$$

На рис. 39 продемонстровано фізичну суть цього методу: чорна лінія (*Osculating orbit*) – це ідеальний еліпс, яким би рухалася планета за відсутності сторонніх тіл. Проте через «збурюючий об'єкт» (*Perturbing object*) реальна траєкторія (червона лінія) постійно відхиляється. Метод Ейлера дозволяє математично «коригувати» параметри орбіти в кожній точці, що стало фундаментом для сучасної небесної механіки та точних розрахунків космічних траєкторій.

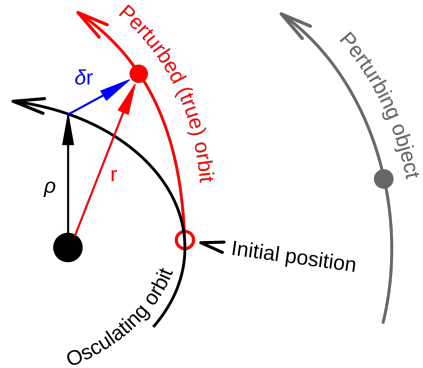


Рис. 39. Стала та збурена орбіти.

Метод Ейлера для диференціальних рівнянь.

Ейлер розробив один з перших чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь.

Для задачі Коші $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, наближений розв'язок:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \quad (78)$$

де h – крок інтегрування, $x_n = x_0 + nh$.

Приклад 1.9. Розв'язати $y' = y$, $y(0) = 1$ методом Ейлера з кроком $h = 0.1$.

Маємо $f(x, y) = y$, тому:

$$y_0 = 1 \quad (79)$$

$$y_1 = y_0 + 0.1 \cdot y_0 = 1 + 0.1 = 1.1 \quad (80)$$

$$y_2 = y_1 + 0.1 \cdot y_1 = 1.1 + 0.11 = 1.21 \quad (81)$$

$$y_3 = y_2 + 0.1 \cdot y_2 = 1.21 + 0.121 = 1.331 \quad (82)$$

Точний розв'язок: $y(x) = e^x$, $y(0.3) = e^{0.3} \approx 1.3499$

Інтеграл Ейлера-Пуассона: міра випадковості.

Одним із найбільш значущих результатів Ейлера в аналізі став розрахунок площі під дзвоноподібною кривою $y = e^{-x^2}$. Цей результат, відомий сьогодні як **інтеграл Гаусса** або **Ейлера–Пуассона**, став фундаментом для всієї сучасної теорії ймовірностей, статистики та квантової механіки. Без нього було б неможливо описати ні розподіл людського зросту, ні рух атомів, ні похибки в артилерійській стрільбі.

Ейлер першим знайшов значення цього інтеграла, пов'язавши його зі своєю Гамма-функцією ($\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$). Сьогодні найбільш елегантним вважається метод «квадрата інтеграла», який дозволяє обчислити значення $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ через перехід у тривимірний простір:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad (83)$$

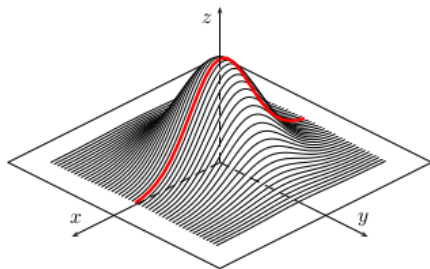


Рис. 40. Поверхня $e^{-(x^2+y^2)}$.

На рис. 40 продемонстровано елегантну логіку обчислення: замість того, щоб шукати площу під однією кривою (червона лінія на графіку), ми розглядаємо об'єм під усією поверхнею, що утворюється при її обертанні. Оскільки цей «математичний пагорб» має ідеальну осьову симетрію, перейшовши до полярних координат

$(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$, де площа елементарного сектора дорівнює $r dr d\theta$, отримуємо:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr \quad (84)$$

Зробивши заміну $u = r^2$, Ейлер отримав лаконічний і приголомшливий результат:

$$I^2 = \pi \int_0^\infty e^{-u} du = \pi \cdot 1 = \pi \implies \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (85)$$

Поява кореня з числа π у самому серці аналізу стала ще одним доказом того, що Ейлер бачив приховану гармонію Всесвіту: за хаосом випадкових подій завжди стоїть суворий математичний ландшафт. Сьогодні цей інтеграл є незамінним у **квантовій механіці** (рис. 41). Кожного разу, коли фі-

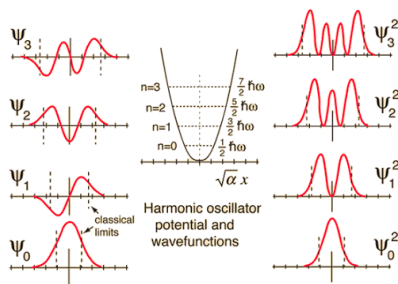


Рис. 41. Квантові стани.

зики описують стан частинки в силовому полі, вони звертаються до функцій ψ_n , де базовий стан (ψ_0) є саме тією Гауссовою кривою, площу під якою першим знайшов Ейлер. Виявилось, що число π керує не лише колом на папері, а ймовірністю перебування електронів у просторі. Ейлер фактично описав «геометрію ймовірності» самого мікросвіту задовго до того, як наука змогла в нього зазирнути.

Результат (85) не залишився просто поодиноким математичним фактом – він став фундаментом для цілої родини інтегралів, що сьогодні є справжніми «робочими конячками» теоретичної фізики:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (86) \quad \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!} \sqrt{\pi} \quad (87)$$

Узагальнена форма (86) дозволила вченим наступних поколінь описувати будь-які статистичні розподіли, а формула для парних моментів (87) стала незамінною у розрахунках середніх енергій частинок. Ці результати

Ейлера фактично стали підґрунтям для робіт Максвелла, Больцмана та Шредінгера, з'єднавши аналіз XVIII століття з квантовим та термодинамічним баченням світу.

Обертання твердого тіла та кути Ейлера.

Ейлер зробив крок далі від Ньютона, навчивши науку описувати рух не лише матеріальних точок, а й реальних об'ємних об'єктів. Він вивів систему динамічних рівнянь обертання твердого тіла навколо нерухомої точки:

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = M_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = M_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = M_3 \end{cases} \quad (88)$$

де I_1, I_2, I_3 – головні моменти інерції, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – кутові швидкості, а M_1, M_2, M_3 – моменти зовнішніх сил.

Рівняння (88) пояснюють усе: від «танцю» дзиги на підлозі до стабілізації складних супутників на орбіті та безперервної роботи гіроскопів у сучасних смартфонах.

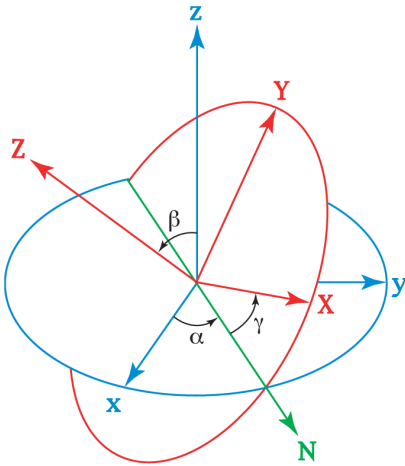


Рис. 42. Кути Ейлера.

Щоб описати положення об'єкта, що обертається (наприклад, літака чи планети), Ейлер увів систему трьох кутів (φ, θ, ψ) , які сьогодні знає кожен інженер та розробник комп'ютерних ігор. Ці кути описують послідовні повороти навколо осей: **прецесію**, **нутацію** та **власне обертання**.

Матриця повороту, побудована на цих кутах, дозволяє обчислити орієнтацію тіла в 3D-просторі:

$$R(\varphi, \theta, \psi) = R_z(\varphi)R_x(\theta)R_z(\psi) \quad (89)$$

На рис. 42 візуалізовано систему координат і кути Ейлера в ній. Без них була б неможливою сучасна 3D-графіка, робототехніка та авіаційна навігація.

Рівняння ідеальної рідини: математика потоку.

Ейлер фактично став батьком сучасної гідродинаміки, запропонувавши розглядати рух рідини або газу не як зіткнення окремих часток, а як суцільне поле швидкостей та тиску:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} \quad (90)$$

На рис. 43 продемонстровано практичне застосування цього апарату в аеродинаміці: лінії описують рух ідеальної рідини навколо профілю крила літака. Рівняння (90) дозволяє розрахувати, як змінюється тиск і швидкість у кожній точці простору, що є критично важливим для створення підйомної сили. Навіть через 250 років кожного разу, коли злітає пасажирський лайнер або прогнозується рух глобальних циклонів в атмосфері, вчені та інженери використовують мову векторних полів, створену цим геніальним швейцарським вченим.

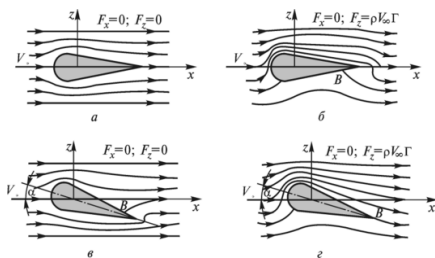


Рис. 43. Обтікання профілю крила.

Леонард Ейлер не просто розв'язав задачі XVIII століття – він дав математиці мову, якою вона розмовляє досі. Сліпий провидець, який диктував формули з цілковитої темряви, побачив те, що інші не помічали навіть при повному світлі: дивовижну єдність експоненти й тригонометрії, аналізу та фізичної реальності, дискретного й неперервного.

Його спадщина – це не застигли формули в підручниках, а живий фундамент, на якому стоїть сучасна цивілізація. І варто пам'ятати: найелегантніша формула світу – не просто щаслива випадковість. Це наслідок того, що хтось одного разу наважився підпорядкувати нескінченність законам арифметики, і виявилось, що Всесвіт із цим погодився.