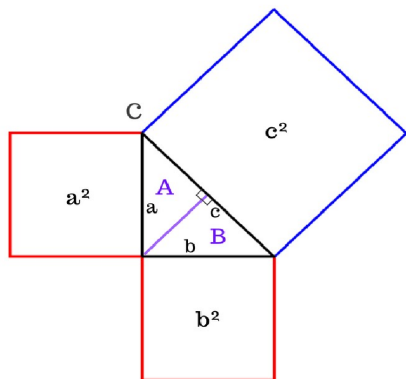


Піфагор — архітектор числового порядку: гармонія сфер і математика прямокутних трикутників



*Піфагорові штани рівні на всі боки:
сміх сміхом , а практичне доведення є!*

Після того, як Піфагор став олімпійським чемпіоном із кулачного бою, його опоненти передумали вступати з ним у наукові дискусії.

— Та що цей качок може знати про математику! — казали вони.

1.1 Самоський мудрець

Піфагор із Самоса — одна з найдивовижніших постатей в історії не лише математики. Його картина гармонійного й керованого числами світу — сплав наукового й містичного світогляду — мала глибокий вплив на всю західну культуру. Піфагор був засновником політичної та релігійної секти (першої групи такого роду, про яку нам відомо), яка мала величезний вплив у різних регіонах Греції. Йому приписують одне з найважливіших відкриттів давнини: рівність суми квадратів катетів і квадрата гіпотенузи в прямокутному трикутнику. Цей справжній геометричний скарб не лише має численні практичні наслідки, але й знаменує, серед іншого, народження математики як незалежної точної дисципліни.

Жив самоський мудрець приблизно між 570 і 490 роками до н. е., і ми цілком можемо вважати достовірними деякі відомості про його життя. Існують достатні докази того, що він розпочав публічну діяльність у віці десь 40 років, коли йому довелося покинути Самос (острів в Егейському морі поблизу Малої Азії), щоб уникнути гніву правителя Полікрата. Близько 530 року до н. е. він оселився в грецькій колонії Кротон у Великій Греції (Великою Грецією називалося колонізоване греками узбережжя Південної Італії), де заснував релігійну секту й почав активну політичну діяльність, поширивши свій вплив на весь південь Апенін.

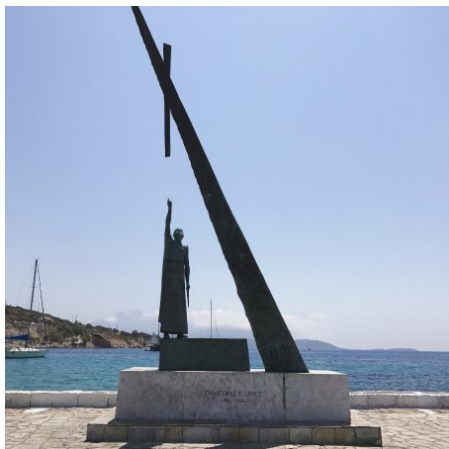


Рис. 1. Піфагор із високо піднятою рукою.

Деякі дослідники визнають його засновником таких дисциплін, як математика, астрономія, політологія й філософія. Йому приписують численні відкриття в найрізноманітніших галузях та вважають винахідником майже всіх наук, тож саме ім'я Піфагора стало символом науки й прогресу. Ми можемо знайти сліди його діяльності також у музиці, риторичі, практиці вродження, медицині й релігії.

Піфагору приписують висловлювання «Усе є число». Властивості чисел, особливо в їхніх комбінаціях, вражали піфагорійців настільки, що зрештою вони більшу частину своєї наукової діяльності присвятили дослідженням аналогій між числами та речами. Формули на кшталт цієї:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2, \quad (1)$$

яка показує, що квадрат числа може бути представлений сумою послідовних непарних чисел, здавалися піфагорійцям виявом божественного провидіння.

1.2 Гномон

«Гномон» грецькою означає «вказівник». Таку назву мав вертикальний стовп, за тінню якого визначали висоту сонця. Разом зі своєю тінню такий стовп утворював подібність літери «L», але в грецькому алфавіті такої не було, зате була велика літера «гамма», яка виглядає точнісінько як наша «Г».

Візьмемо квадратну таблицю й заповнимо її одиницями, як на рисунку нижче ліворуч:

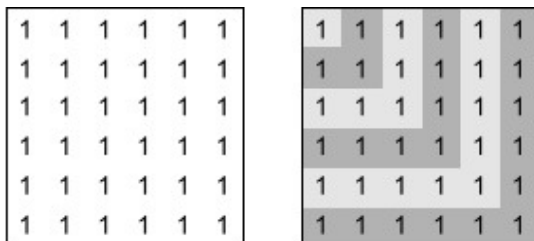


Рис. 2. Побудова гномона.

З одного боку, очевидно, що сума чисел у всій таблиці дорівнює квадрату її розмірності. З іншого боку, таблицю можна розбити на гномоподібні фрагменти (рис. вище праворуч) і зробити суму чисел у них. Кожен такий фрагмент містить непарне число одиниць: 1, 3, 5, 7, ...

Відповідно, виходить формула, яка в сучасних алгебраїчних позначеннях записується як

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (2)$$

Звісно, це частковий випадок арифметичної прогресії, але виведений цілком точно.

Ось ще один приклад. Візьмемо ту ж саму квадратну таблицю з одиниць і доповнимо її одним гномоном до розмірності, на одиницю більше за початкову:

Як видно, звідси впливає формула

$$(n + 1)^2 = n^2 + n + (n + 1) = n^2 + 2n + 1, \quad (3)$$

яка і сьогодні дуже корисна для усного рахунку.

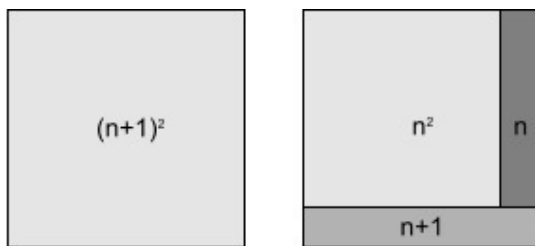


Рис. 3. Квадрат суми.

Ще одним застосуванням грецького «принципу гномона» є виведення формули для суми квадратів натуральних чисел.

Заповнимо квадратну таблицю за наступним принципом: усі рядки в ній будуть однаковими, а в кожному рядку зліва направо записані послідовно зростаючі натуральні числа (як на рисунку нижче).

1	2	3		k		n
1	2	3		k		n
1	2	3		k		n
				⋮		⋮
1	2	3	⋯	k		n
				⋮		⋮
1	2	3	⋯	k	⋯	n

Рис. 4. Сума квадратів.

Сума чисел у одному рядку утворює арифметичну прогресію і може бути легко знайдена:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (4)$$

Відповідно, суму чисел у всій таблиці можна знайти, помноживши це число на кількість рядків. Вона дорівнює

$$\frac{n^2(n+1)}{2} \quad (5)$$

З іншого боку, цю суму можна знайти, підсумовуючи не по рядках, а по гномонах. Підсумовуючи числа в k -му гномоні (як на рисунку вище), отримуємо

$$[1 + 2 + \dots + (k-1)] + [k + k + \dots + k] \quad (6)$$

Перша квадратна дужка — це знову арифметична прогресія. Друга квадратна дужка містить рівно k доданків і спрощується очевидним чином. Усього, k -й гномон містить усередині себе

$$\frac{k(k-1)}{2} + k^2 = \frac{3}{2}k^2 - \frac{1}{2}k \quad (7)$$

Підсумовуючи це за k від 1 до n і прирівнюючи до загальної суми, отримуємо

$$\frac{3}{2} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n^2(n+1)}{2} \quad (8)$$

Другий доданок ліворуч знову утворює суму арифметичної прогресії (ту ж саму, що й сума чисел по рядку). Звідси вже легко виразити суму квадратів:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (9)$$

Цікава інтерпретація цієї формули греками. Тодішні математики сприймали її не так, як ми; у наших сучасних позначеннях це сприйняття можна виразити так:

$$1 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 1 + 3 \times 3 \times 1 + \dots + n \times n \times 1 = n \times \frac{n+1}{2} \times \frac{2n+1}{3} \quad (10)$$

Кожен доданок ліворуч інтерпретується як об'єм квадратної плити з одиничною висотою й послідовно зростаючою довжиною сторони. Разом ці плити утворюють сходинчасту піраміду. На рисунку нижче справа показано об'єм еквівалентного прямокутного паралелепіпеда.

Існувало й інше доведення формули, через розрізання піраміди на фрагменти та складання їх у паралелепіпед. Але цей підхід значно складніший.

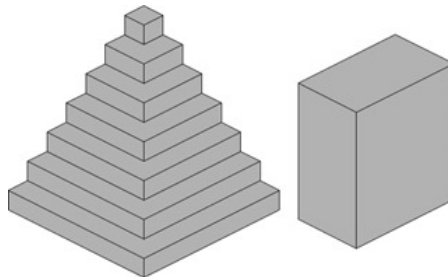


Рис. 5. Сходинчаста піраміда та еквівалентний їй паралелепіпед.

1.3 Дерево Піфагора

Називається воно так, бо кожна трійка попарно дотичних квадратів обмежує прямокутний трикутник і утворює картинку, якою часто ілюструють теорему Піфагора, «піфагоріві штани рівні на всі боки».

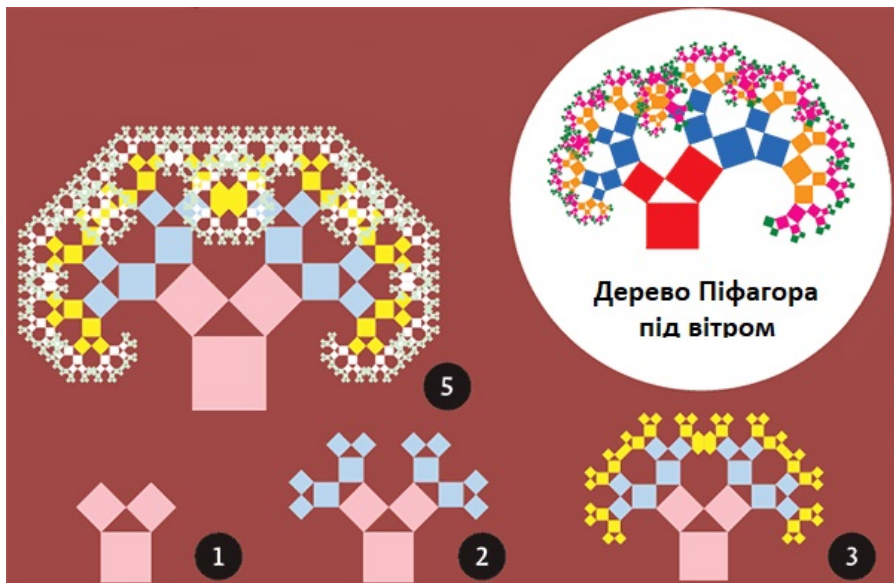


Рис. 6. Дерево Піфагора.

Добре видно, що розповсюдження дерева на площину обмежене. Якщо початковий квадрат одиничний, то дерево поміститься в прямокутник 6×4 . Отже, його площа не перевищуватиме 24.

З іншого боку, квадратів щоразу стає в два рази більше, проте їхні лінійні розміри у $\sqrt{2}$ разів менші. Тому на кожному кроці додається площа, яка дорівнює площі початкової конфігурації, тобто 2. Тоді виходить площа дерева мала би бути нескінченною! Але насправді суперечності тут немає, бо досить швидко квадратики починають перекриватися, і площа зростає не так швидко.

Якщо змінювати кути при основі трикутника, то будуть утворюватися дещо інші форми дерева. А при куті 60° усі три квадрати виявляться рівними, а дерево перетвориться на періодичний візерунок на площині:

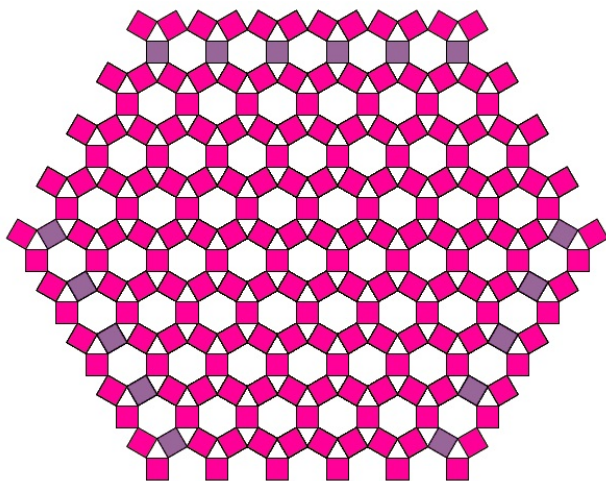


Рис. 7. Періодичний візерунок дерева Піфагора.

Можна навіть замінити квадрати на прямокутники. Тоді дерево буде більше схоже на справжні дерева. А за певної художньої обробки отримуються досить реалістичні зображення:

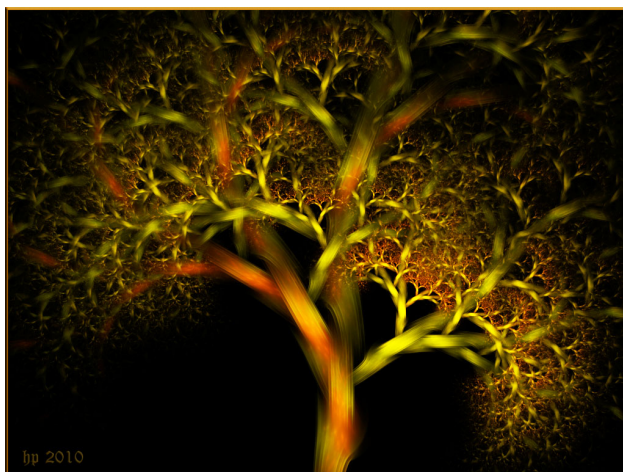


Рис. 8. Художня інтерпретація дерева Піфагора.

Відео (майже 8 хвилин): Греки, Піфагор і його теорема:
<https://youtu.be/nhC7cikM8Yc>

1.4 Віслучий міст

24.07.2025 був День теореми Піфагора. Він відзначається лише тоді, коли сума квадратів дати й місяця дорівнює квадрату року:

$$24^2 + 07^2 = 576 + 49 = 625 = 25^2 \quad (11)$$

Наступний такий день буде 24.10.2026 (перевірте самостійно).

Теорему Піфагора називали «віслучим мостом» у Середньовіччі через труднощі, з якими стикалися учні при її освоєнні. Ті, хто не розумів доказів і заучував теорему напам'ять, порівнювалися з віслуками — впертими й повільними. Сам процес доведення сприймався як міст, який потрібно подолати, і для деяких він був настільки складним, що став «віслучим», символізуючи труднощі переходу до розуміння геометричних ідей.

Задля справедливості необхідно згадати, що Піфагорові трійки були відомі ще до Піфагора, але його заслугою стало систематичне вивчення й доведення теореми, яка лягла в основу геометрії, а також поширення цієї ідеї у філософському та математичному контексті античного світу.

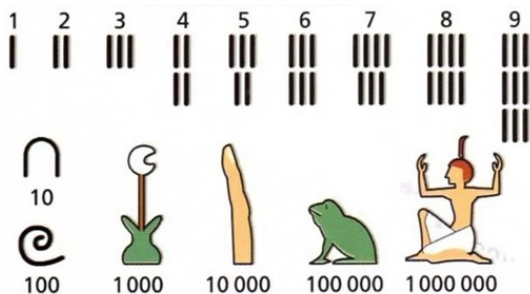


Рис. 9. Єгипетська система числення.

Пунктами призначення освітніх подорожей Піфагора були Єгипет і Вавилон — дві колиски математики, за думкою самих греків. Це не дивно, якщо згадати про залежність між рівнем розвитку сільського господарства, яке в цих регіонах досягло значної висоти, і необхідністю вимірювати землю та рахувати вироблені продукти.

Єгиптяни користувалися десятковою, але не позиційною системою числення: кожна зі степенів десяти, до 10^6 , позначалася власним символом, числа складалися з послідовності символів відповідних розрядів.

Обчислення дробів обмежувалося операціями з дробами з чисельником 1.

Перші математики, які зацікавилися геометрією, розвивали тригонометричні знання задля їхнього використання в будівництві й землемірстві. Розділ земель на трикутники (триангуляція) завжди був головним

методом вимірювання поверхонь, і розвиток топографії довів його ефективність.

Кожен трикутник можна розбити на два прямокутні трикутники, які дозволять визначити висоту або відстань до недосяжних об'єктів за допомогою вимірювання деяких сторін і кутів. Уважно розглянувши ці фігури та зіставивши їх із визначеннями синуса, косинуса й тангенса (як на рисунку нижче), можна помітити їхні дуже корисні властивості. Наприклад, $b = a \cdot \operatorname{tg} \beta$.

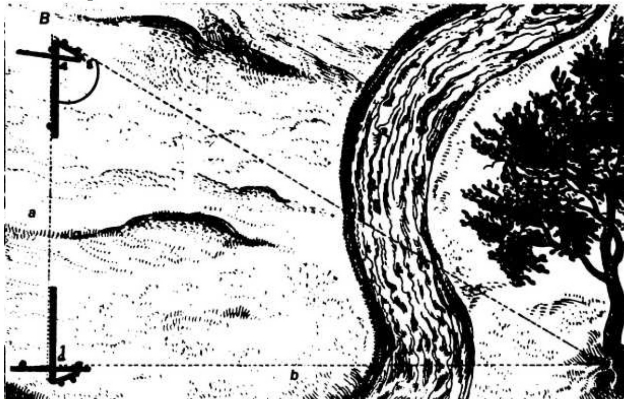


Рис. 10. Англійська гравюра початку XVII століття.

Тобто, обчисливши кут β , можна отримати значення a і, за допомогою тригонометричних таблиць, дізнатися довжину b . Це дозволяє реалізувати будь-які технічні вимірювання за допомогою лінійки та теодоліта (інструмента для точного вимірювання кутів на місцевості), які точно визначають довжини й кути.

На мові сучасної алгебри відповідна задача описується наступною системою рівнянь:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 100, \\ y &= \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{4}\right)x,\end{aligned}$$

де потрібно виконати підстановку й обчислити квадратний корінь.

Це рішення типологічно близьке Піфагоровому, але більше свідчить про те, що єгиптянам були відомі методи розв'язання систем рівнянь — значний результат для Стародавнього Єгипту.

Що стосується Месопотамії, то збережені дані дозволяють розглянути її математику в генезисі. Там наука досягла високого рівня в галузі те-

хніки обчислень, серед яких можна знайти справжні алгебраїчні задачі, як на рисунку нижче.



Рис. 11. Вавилонські глиняні таблички.

Відмінною рисою вавилонської математики було використання шістдесятиричної позиційної системи числення. Шістдесят цифр записувалися у вигляді різних комбінацій двох значків: вертикальний «стоячий клин» і «лежачий клин», які представляли одиниці й десятки. Кома не використовувалася, а дробі вважали відношенням цілих чисел.

Більш серйозною проблемою було те, що в позиційній системі числення місця, не зайняті цифрами, не були чітко позначені, оскільки не існувало символу для нуля. Пізніше, уже в персидський період, вавилонські математики ввели такий знак.

𐎶 1	𐎶𐎵 11	𐎶𐎵𐎶 21	𐎶𐎵𐎶𐎵 31	𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 41	𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 51
𐎶𐎶 2	𐎶𐎶𐎵 12	𐎶𐎶𐎵𐎶 22	𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 32	𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 42	𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 52
𐎶𐎶𐎶 3	𐎶𐎶𐎶𐎵 13	𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶 23	𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 33	𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 43	𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 53
𐎶𐎶𐎶𐎶 4	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 14	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶 24	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 34	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 44	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 54
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 5	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 15	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶 25	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 35	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 45	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 55
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 6	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 16	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶 26	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 36	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 46	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 56
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 7	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 17	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶 27	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 37	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 47	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 57
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 8	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 18	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶 28	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 38	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 48	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 58
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 9	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 19	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶 29	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 39	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 49	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 59
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 10	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 20	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 30	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 40	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 50	

Рис. 12. Вавилонські цифри.

Задовго до того, як Піфагор сформулював загальний закон, що стосується всіх прямокутних трикутників, у Вавилоні епохи Хаммурапі — правителя, який помер приблизно в 1750 році до н. е., — уже знали, як обчислювати «Піфагорові трійки», тобто такі комбінації додатних чисел (a, b, c) , при яких $a^2 + b^2 = c^2$.

Ось деякі приклади: $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ і $(8, 15, 17)$. Відповідно до теореми Піфагора, кожна з цих трійок представляє довжини сторін прямокутного трикутника.

На рисунку нижче представлена давньовавильонська глиняна табличка цієї епохи, Плімптон 322, де записані Піфагорові трійки.

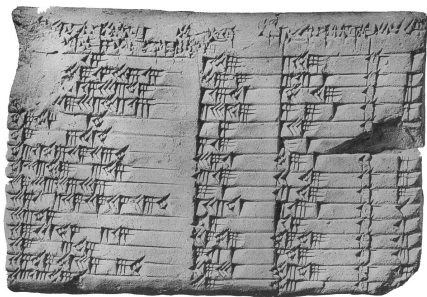


Рис. 13. Піфагорові трійки на глиняній табличці Плімптон 322.

Піфагор не залишив нащадкам жодного рядка, тож не існує жодного доказу теореми, авторство якого можна було би приписати йому. Її розв'язання подається в багатьох джерелах, аж до детального опису в найважливішій в історії геометрії та всієї математики книзі «Начала» Евкліда. Але в будь-якому разі, не варто зменшувати геніальність Піфагора та його послідовників, адже саме вони здійснили перехід від часткового до загального та сформулювали теорему, придатну для всіх окремих випадків.

Перше доведення теореми, яке традиція приписує Піфагору, було емпіричним. Доведення через рівнодоповнюваність спирається на використання чотирьох копій прямокутного трикутника з катетами a, b і гіпотенузою c , розташованих так, щоб утворювати квадрат зі стороною $a + b$ і внутрішній чотирикутник зі сторонами довжиною c . Внутрішній чотирикутник у цій конфігурації є квадратом, оскільки сума двох протилежних прямих гострих кутів — 90° , а розгорнутий кут — 180° . Площа зовнішнього квадрата дорівнює $(a + b)^2$, він складається з внутрішнього квадрата площею c^2 і чотирьох прямокутних трикутників, кожен із площею $\frac{ab}{2}$, у результаті з відношення $(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$ при алгебраїчному перетворенні випливає твердження теореми.

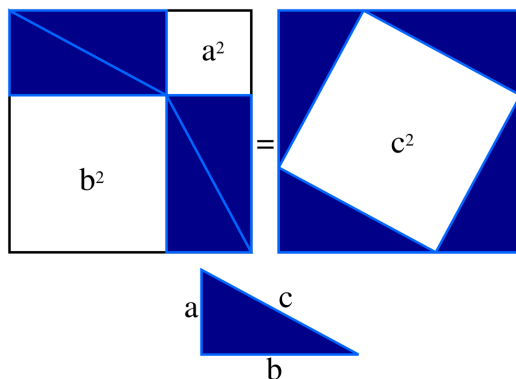


Рис. 14. Схема доведення через рівнодоповнюваність.

Класичне доведення Евкліда спрямоване на встановлення рівності площ між прямокутниками, утвореними поділом квадрата висотою з прямого кута над гіпотенузою та квадратів на катетах.

Основний напрямок доведення — встановлення конгруентності $\triangle ACK \cong \triangle ABD$, площа яких становить половину площі прямокутників $AHJK$ і $ACED$ відповідно.

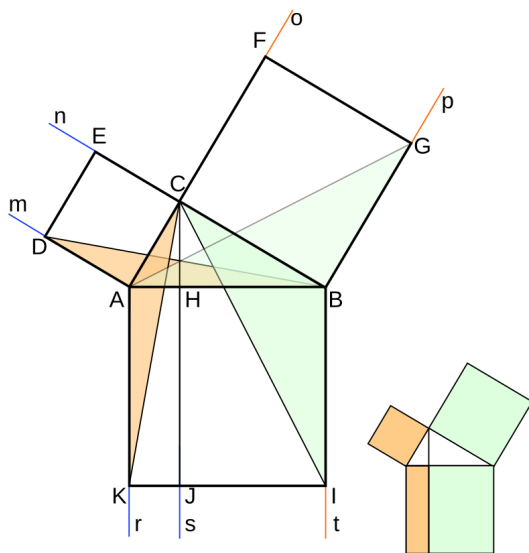


Рис. 15. Креслення до Евклідового доведення.

До методу площ належить також доведення, традиційно приписуване Леонардо да Вінчі. У цьому доведенні для трикутника $\triangle ABC$ з прямим кутом $\angle C$ і квадратами $ACED$, $BCFG$ і $ABHJ$, побудованими на сторонах трикутника, на стороні HJ останнього квадрата назовні будується трикутник, конгруентний $\triangle ABC$, причому відображений як відносно гіпотенузи, так і відносно висоти до неї (тобто $JI = BC$ і $HI = AC$). Пряма CI ділить квадрат, побудований на гіпотенузі, на дві рівні частини, оскільки трикутники $\triangle ABC$ і $\triangle JHI$ рівні за побудовою. Доведення встановлює конгруентність чотирикутників $CAJI$ і $DABG$, площа кожного з яких, виявляється, з одного боку, дорівнює сумі половин площ квадратів на катетах і площі початкового трикутника, з іншого — половині площі квадрата на гіпотенузі плюс площа початкового трикутника. Усього, половина суми площ квадратів над катетами дорівнює половині площі квадрата над гіпотенузою, що еквівалентно формулюванню теореми Піфагора.

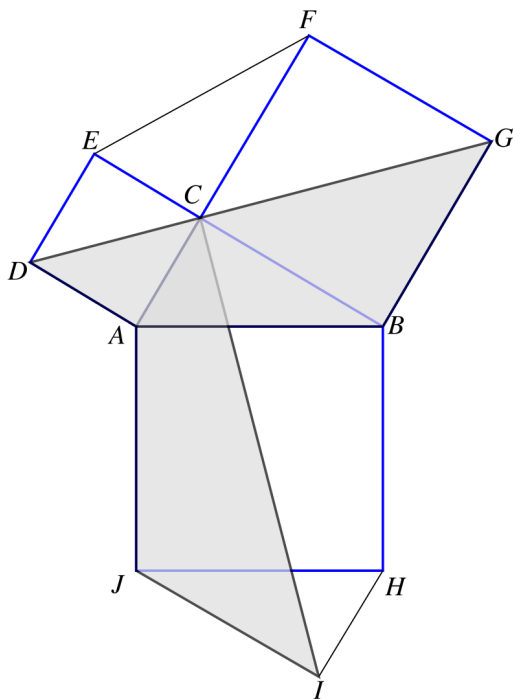


Рис. 16. Креслення до доведення Леонардо да Вінчі.

Відео (14 хвилин): Візуалізація всіх можливих піфагорових трійок:
<https://www.youtube.com/watch?v=QJYmyhnaaek>

Існує кілька доведень, які звертаються до техніки диференціальних рівнянь. Зокрема, англійському математику Годфрі Гаролду Гарді приписують доведення, яке використовує нескінченно малі прирости катетів a і b та гіпотенузи c . Наприклад, приріст катета da при сталому катеті b призводить до приросту гіпотенузи dc , так що

$$\frac{da}{dc} = \frac{c}{a}.$$

Методом розділення змінних із них виводиться диференціальне рівняння $c dc = a da$, інтегрування якого дає співвідношення $c^2 = a^2 + \text{const}$. Застосування початкових умов $a = 0$, $c = b$ визначає константу як b^2 , що в результаті дає твердження теореми. Квадратична залежність у кінцевій формулі з'являється завдяки лінійній пропорційності між сторонами трикутника й приростами, тоді як сума пов'язана з незалежними внесками від приросту різних катетів.

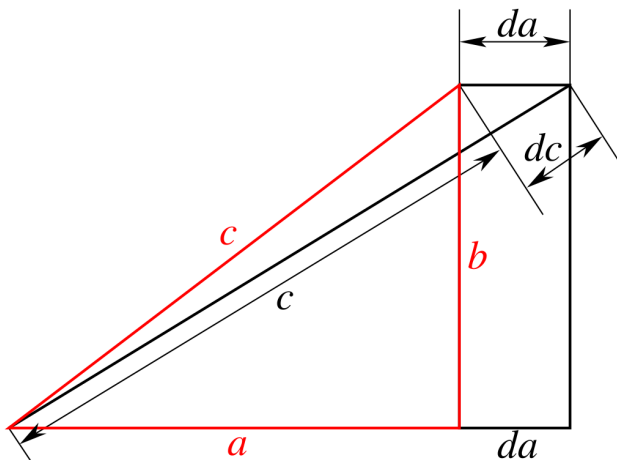


Рис. 17. Доведення методом нескінченно малих.

І, наостанок, теорема Піфагора — це частковий випадок більш загальної теореми косинусів, яка пов'язує довжини сторін у довільному трикутнику:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = c^2,$$

де θ — кут між сторонами a і b . Якщо кут дорівнює 90° , то $\cos \theta = 0$, і формула спрощується до звичайної теореми Піфагора.

1.5 Теорема Ейлера-Піфагора

Теорема Ейлера про чотирикутники (або закон Ейлера для чотирикутників) — це теорема планиметрії, яка описує співвідношення між сторонами опуклого чотирикутника та його діагоналями.

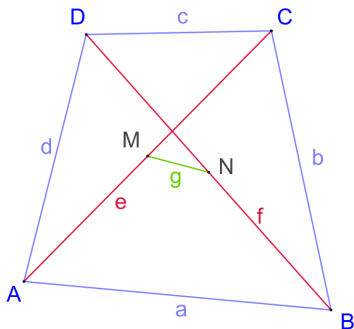


Рис. 18. Теорема Ейлера — Піфагора.

Теорема є узагальненням тотожності паралелограма, яке, в свою чергу, можна розглядати як узагальнення теореми Піфагора, тому іноді використовується назва теорема Ейлера-Піфагора.

Для опуклого чотирикутника зі сторонами a, b, c, d і діагоналями e і f , середини яких з'єднані відрізком g , виконується рівність:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4g^2$$

Якщо чотирикутник є паралелограмом, то середні точки діагоналей збігаються, і з'єднуючий їх відрізок g має довжину, рівну 0. Крім того, у паралелограма довжини паралельних сторін рівні, тож у цьому випадку теорема Ейлера зводиться до формули:

$$2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2,$$

яку називають тотожністю паралелограма.

Якщо чотирикутник є прямокутником, то рівність ще більше спрощується, оскільки тепер дві діагоналі рівні:

$$2a^2 + 2b^2 = 2e^2$$

Ділення на 2 дає теорему Ейлера — Піфагора:

$$a^2 + b^2 = e^2$$

Іншими словами: для прямокутника співвідношення сторін та діагоналей описується теоремою Піфагора.

1.6 Теорема де Гуа — узагальнення теореми Піфагора для n-вимірних просторів

Узагальненням теореми Піфагора для тривимірного евклідового простору є теорема де Гуа: якщо в одній вершині тетраедра сходяться три прямих кута, то квадрат площі грані, що лежить навпроти цієї вершини, дорівнює сумі квадратів площ інших трьох граней. Цей висновок може бути узагальнений і як «n-вимірна теорема Піфагора» для евклідових просторів вищих розмірностей.

Виріжемо з куба піраміду, відітнувши площиною одну з його вершин. Тоді для неї буде справедливе наступне співвідношення: квадрат площі грані піраміди, протилежної вершині куба, де сходяться три прямих кута, дорівнює сумі квадратів площ граней, прилеглих до цього кута (як на рисунку нижче).

$$S_{ABC}^2 = S_{ABD}^2 + S_{BDC}^2 + S_{ADC}^2.$$

Іншими словами, якщо ми замінимо плоский прямий кут тривимірним, відрізки — гранями, а трикутник — пірамідою, то теорема знову виявиться правильною, але не для довжин сторін, а для площ граней отриманої піраміди!

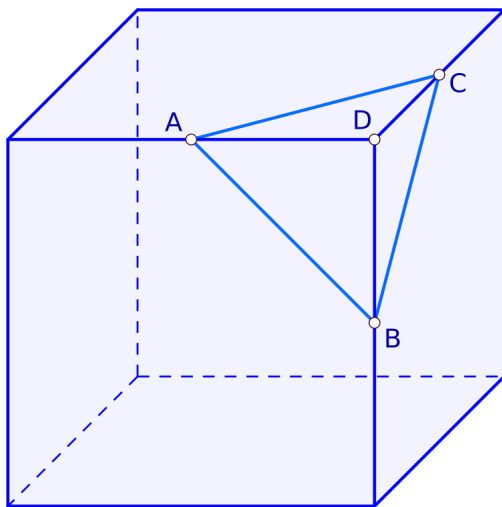


Рис. 19. Теорема де Гуа.

1.7 Сферична теорема Піфагора у еліптичній геометрії Рімана

Для будь-якого прямокутного трикутника на сфері радіусом R зі сторонами a, b, c співвідношення між сторонами (наприклад, якщо кут γ у трикутнику прямий, як на рисунку нижче) має вигляд

$$\cos \frac{c}{R} = \cos \frac{a}{R} \cdot \cos \frac{b}{R}.$$

Ця рівність може бути виведена як частковий випадок сферичної теореми косинусів, яка справедлива для всіх сферичних трикутників:

$$\cos \frac{c}{R} = \cos \frac{a}{R} \cdot \cos \frac{b}{R} + \sin \frac{a}{R} \cdot \sin \frac{b}{R} \cdot \cos \gamma.$$

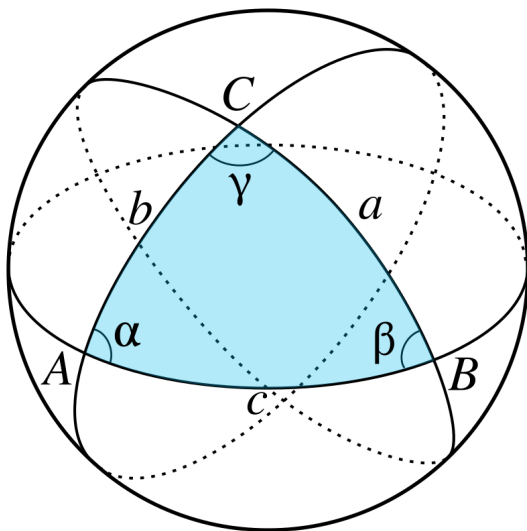


Рис. 20. Сферичний трикутник.

Застосувавши ряд Тейлора-Маклорена для функції косинуса ($\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$) можна показати, що якщо радіус R прямує до нескінченності, а аргументи $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$ і $\frac{c}{R}$ прямують до нуля, то сферичне співвідношення між сторонами в прямокутному трикутнику наближається до теореми Піфагора.

Детальне доведення:

https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_law_of_cosines

1.8 Теорема Піфагора в гіперболічній геометрії Лобачевського-Бойяї

У геометрії Лобачевського-Бойяї для прямокутного трикутника зі сторонами a, b та стороною c , протилежною прямому куту, співвідношення між ними буде наступним:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b,$$

де $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гіперболічний косинус.

Ця формула є частковим випадком гіперболічної теореми косинусів, яка справедлива для всіх трикутників:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b \cdot \cos \gamma,$$

де γ — прямий кут, вершина якого протилежна стороні c .

Знову використавши ряд Тейлора-Маклорена, тепер для гіперболічного косинуса ($\operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$) можна показати, що якщо гіперболічний трикутник зменшується (тобто, коли a, b і c прямують до нуля), то гіперболічні співвідношення в прямокутному трикутнику наближаються до співвідношення класичної теореми Піфагора.

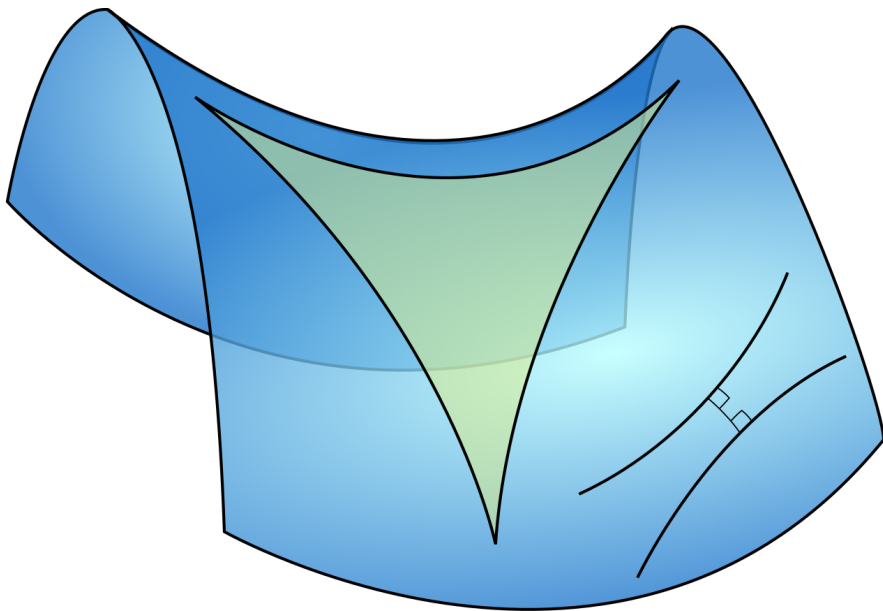


Рис. 21. Гіперболічний трикутник.

1.9 Спіраль Феодора-Ейнштейна-Піфагора

Спіраль Феодора — це засноване на теоремі Піфагора наближення до архімедової спіралі, що складається із суміжних прямокутних трикутників, які прилягають один до одного. Її названо на честь Феодора Киренського, давньогрецького вченого, відомого як учитель Платона, який жив у V столітті до н. е. на території Лівії.

Спіраль починається з рівнобедреного прямокутного трикутника, кожен катет якого має одиничну довжину. Потім додається ще один прямокутний трикутник, катет якого є гіпотенузою попереднього трикутника (з довжиною $\sqrt{2}$), а інший катет має довжину 1; довжина гіпотенузи другого трикутника $\sqrt{3}$. Потім процес повторюється; n -й трикутник у послідовності являє собою прямокутний трикутник із катетами $\sqrt{n}$ і 1 і з гіпотенузою $\sqrt{n+1}$. Наприклад, 16-й трикутник має сторони розміром 4 ($=\sqrt{16}$), 1 і гіпотенузою $\sqrt{17}$.

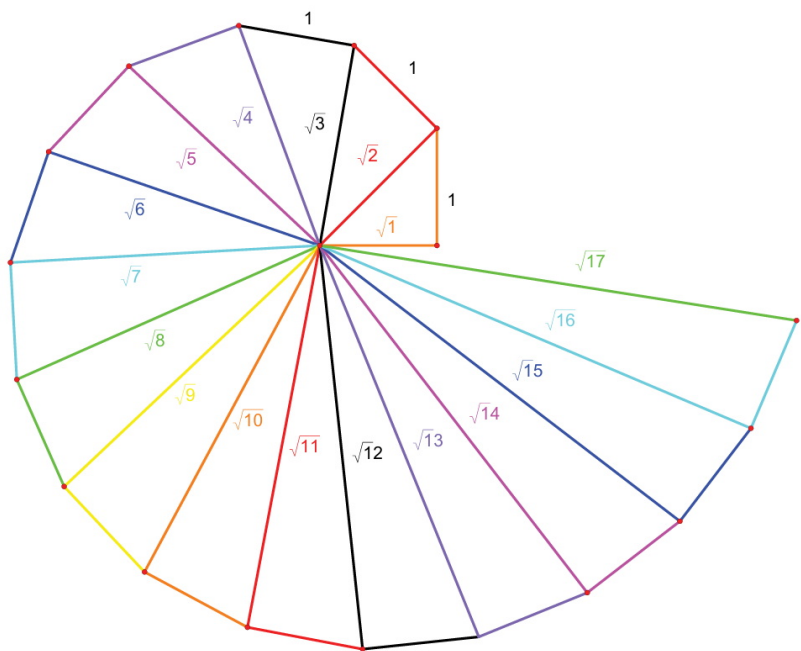


Рис. 22. Спіраль Феодора-Ейнштейна-Піфагора.

У 1958 році Еріх Тойфель довів, що жодні дві гіпотенузи трикутників, з яких будується спіраль, не лежатимуть на одному промені. Крім того, якщо сторони одиничної довжини продовжити до прямих, вони ніколи не пройдуть через жодну з інших вершин спіралі.

1.10 Гармонія сфер і чаша Піфагора

Музика сфер (або “гармонія сфер”) — це концепція в давньогрецькій філософії, розроблена Піфагором та його послідовниками, яка поєднує музику, математику та космологію. Піфагор вважав, що Всесвіт керується математичною гармонією. Він помітив, що музичні інтервали, такі як октава, квінта та кварта (йому також приписують їх математичне обґрунтування), базуються на простих числових співвідношеннях, відповідно $2 : 1$, $3 : 2$ та $4 : 3$.

Ці співвідношення він виявив, експериментуючи з монохордом — інструментом з однією струною, де зміна її довжини створювала різні звуки. Піфагор припустив, що подібні пропорції регулюють рух небесних тіл.

За цією теорією, кожна планета, рухаючись своєю орбітою, “видає” звук, який залежить від її швидкості та відстані від центру Всесвіту. Ці звуки разом створюють гармонію, що відображає космічний порядок. Хоча ці звуки нечутні для людського вуха, за думкою Піфагора, вони символізували досконалість і гармонію Всесвіту, що базується на математичних законах.

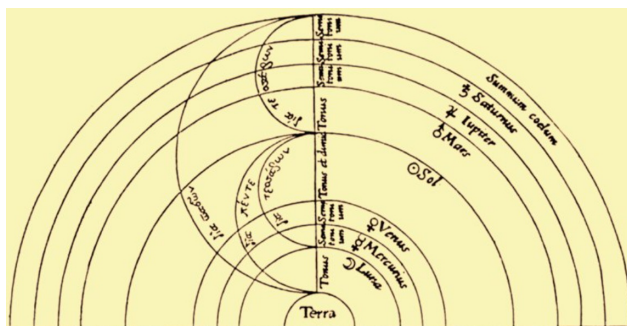


Рис. 23. Гармонія сфер Піфагора.

Чаша Піфагора, відома також як «Кубок справедливості», є легендарним винаходом, який приписують давньогрецькому філософу й математику Піфагору. Згідно з переказами, ця чаша мала унікальну конструкцію: якщо в неї наливати вино до певного рівня, нічого не відбувалось і нею можна було користуватись, але якщо перелити за межі позначки, весь вміст виливався через спеціальний отвір у дні, символізуючи справедливість і помірність, адже надмірність карається втратою.

Цей винахід не лише демонструє технічну кмітливість Піфагора, але й відображає його філософські ідеї про гармонію та рівновагу в житті.

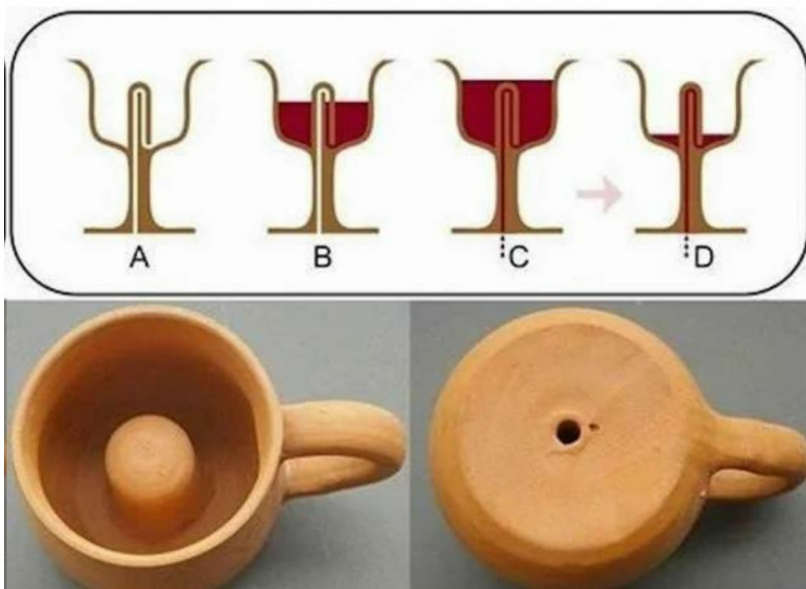


Рис. 24. Чаша Піфагора.

Та все ж таки, Самоський мудрець увійшов в історію та більше за все запам'ятований як творець теореми Піфагора, яка стверджує, що в прямокутному трикутнику сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Так це виглядає в сучасній інтерпретації, а на рис. нижче подане формулювання мовою оригіналу та латиною.

Ἐν τοῖς ὀρθογώνιοις τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ὀρθῆν
γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς
ἀπὸ τῶν τῆν ὀρθῆν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν
τετραγώνοις.

The Latin reads: In rectangulis triangulis
quadratum, quod a latere rectum angulum subtendente
describitur, aequale est eis, quae a lateribus rectum
angulum continentibus describuntur.

Рис. 25. Теорема Піфагора мовою оригіналу та латиною.