УДК 530.1
DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-3-310-319

METHODOLOGICAL FOUNDATION OF HAMILTON-OSTROGRADSKYI VARIATION PRINCIPLE

МЕТОДИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ ВАРІАЦІЙНОГО ПРИНЦИПУ ГАМІЛЬТОНА-ОСТРОГРАДСЬКОГО

Ivan MOROZ,
Doctor of Pedagogical Sciences,
Professor

Іван МОРОЗ,
доктор педагогічних наук,
професор

https://orcid.org/0000-0002-4965-1352
students11.2016@gmail.com

Volodymyr IVANII,
Candidate of Technical Sciences (Phd),
Professor

Володимир ІВАНІЙ,
кандидат технічних наук,
професор

https://orcid.org/0000-0002-8479-325X

Evgeniy DIEMIENTIEV,
Masters

Євгеній ДЄМЄНТЬЄВ,
магістрант

Anita SHCHUPACHYNSKA
Masters

Аніта ЩУПАЧИНСЬКА,
магістрант

A.S. Makarenko Sumy State Pedagogical University

✉ 87 Romenska Street,
Sumy city, 40002, Ukraine

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

✉ вул. Роменська 87,
м. Суми,40002

Original manuscript received: October 10, 2019
Revised manuscript accepted: December 11, 2019

ABSTRACT

It is stated on the basis of the current research analysis that the foundation of the bases of analytical methods of research of physical systems and variation methods have remained outside the attention of methodological science and, therefore, coverage of methodological aspects of foundation the topic "Variation integral principle of stationary action" in teaching theoretical physics in pedagogical universities is relevant.Based on the fact that the mechanical state at each moment is clearly defined as a configuration system as well as velocities system, we introduce some arbitrary dynamic function of the system state $F = F(q_s, \dot{q}_s, t)$, *that is connected to the coordinates and velocities of all material points and perhaps time. The value of this function at each point in time, we multiply by dt and integrate for a period of time :* $S = \int_{t_1}^{t_2} F(q_s, \dot{q}_s, t)dt.$ *If we distract from the action of specified forces, and consider only the effect of superimposed ties, it is clear that without breaking the connection with the bodies which limit the movement of material points, the system from*

position 1 to position 2 during the same period of time $(t_2 - t_1)$ *could move a large number of close routes, which are not described by equations of motion, and answer only to the linkage equation. To set the criterion that distinguishes the real (direct) path of the system from all other kinematically possible (virtual) for given links, we determine the variation of the resulting integral and come to the conclusion that the actual motion of the mechanical system between two given positions* $q(t_1)$ *and* $q(t_2)$ *configuration space occurs along the trajectory for which the action functional* $S(q, t_1, t_2)$ *acquires a stationary value, and, in addition, we obtain the Lagrange equation which, like Newton's second law, is equations of motion. To consolidate the material, students are invited to consider the problem of the movement of the harmonic oscillator and determine the magnitude of the action between two points along the trajectory and along another close line between the same points.*

This technique allows students to form a sufficiently deep and stable understanding of this principle and gives an idea of the use of this principle to solve problems of mechanics, which are difficult to solve using only Newton's laws.

***Key words**: methods of teaching physics, variation principles, Lagrange equations, integral of action, future teachers of physics.*

Постановка проблеми. Видатний німецький фізик Макс Планк зазначав: *"С тех пор как существует научная физика, высшей целью, мерцавшей перед нею, было решение задачи – как обобщить все явления природы, наблюдавшиеся в прошлом и могущие быть наблюдаемыми в будущем, в одном простом принципе, который позволит выводить из процессов настоящего как прошедшие, так и, в особенности, будущие процессы"* (Цитуємо за Вариационные принципы механики /*ред. Л. С. Полак. М.: Физматгиз, 1959, с. 580*).

Сформульована М. Планком основна задача наукової фізики знайшла свій окремий розв'язок у процесі розвитку класичної механіки, коли були сформульовані варіаційні принципи, на так чи інакше опираються всі розділи теоретичної фізики. Ці принципи, за суттю, є узагальненням геометричної (векторної) механіки Ньютона на широкий клас фізичних систем, які не можна описати векторними методами, що призвело до створення трьох методів дослідження фізичних явищ (Лагаранжа, Гамільтона і Гамільтона-Якобі). Але при навчанні теоретичної фізики, особливо при підготовці майбутніх учителів фізики, варіаційні принципи не розглядаються як фундаментальна основа, на якій може будуватись навчання всієї теоретичної фізики, що звужує межі фізичної картини світу, яка формується в майбутніх педагогів і, відповідно, знижує їх професійну компетентність.

Аналіз актуальних досліджень показує, що обґрунтування основ аналітичних методів дослідження фізичних систем та варіаційних методів залишилося поза увагою методичної науки, воно недостатньо висвітлене в методичній літературі і лише фрагментарно описується в деяких навчальних посібниках [1-5], що є необґрунтованим. **Метою статті** є висвітлення методичних аспектів обґрунтування теми "Варіаційний інтегральний принцип стаціонарної дії" при навчанні теоретичної фізики в педагогічних університетах. **Методи дослідження**. Для вирішення поставлених завдань у статті було використано переважно теоретичні методи: аналіз вітчизняних і зарубіжних наукових джерел, систематизація й узагальнення матеріалів теоретичних досліджень.

DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-3

Виклад основного матеріалу. Інтегральному варіаційному принципу Гамільтона, опублікованому ним у 1834 р., відведено особливе місце з-поміж всіх відомих принципів фізики. Згодом, у 1848 р. були опубліковані дослідження М. В. Остроградського, які містять узагальнення принципу Гамільтона, зокрема, поширення його на неголономні системи, функція Лагранжа яких може залежати не тільки від координат, швидкостей і часу, але і від прискорень; а також на неконсервативні системи, у яких закон збереження механічної енергії не виконується. Ураховуючи те, що найбільший практичний інтерес становлять лише голономні консервативні системи із стаціонарними в'язями, принцип стаціонарної дії, який ми тут розглядаємо, традиційно називаємо принципом Остроградського-Гамільтона.

Для того, щоб обґрунтувати інтегральний варіаційний принцип Остроградського-Гамільтона із самих загальних міркувань, тобто без використання принципу Д'аламбера-Лагранжа чи рівнянь Лагранжа або канонічних рівнянь тощо, будемо розглядати рух механічної системи в розширеному (l+1)- вимірному просторі конфігурацій (l – кількість ступенів вільності), t – час*.* У такому (l+1)-вимірному просторі конфігурацій конфігурація механічної системи в деякий момент часу зображується точкою, і, оскільки система рухається і її конфігурація змінюється, то вказана точка з часом у такому просторі рухається, описуючи деяку траєкторію конфігурацій (суцільна крива на рис. 1).

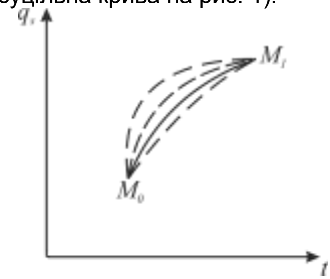

Рис. 1. Дійсний і віртуальний рух системи в конфігураційному просторі

Причому, через детермінованість руху така траєкторія для цієї системи буде залежати як від неї самої, так і від накладених на систему в'язей та сил, що діють на тіла системи, тобто кожна її точка задовольняє і рівнянням руху (їх вид тут ми не використовуємо), і рівнянням в'язей. Будемо розглядати випадок потенціальних (узагальнено-потенціальних) сил і голономних в'язей.

Механічний стан у кожний момент часу однозначно визначається як конфігурацією системи, так і швидкостями системи. Отже, можна ввести деяку динамічну функцію стану системи, яку можна вибрати довільно, але вона обов'язково повинна бути пов'язаною із координатами та швидкостями всіх матеріальних точок і можливого часу (якщо в'язі та зовнішні силові поля не стаціонарні). Для того, щоб ми не були прив'язані до конкретної системи

ICV 2018: 77.58
DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-3

координат, конфігурацію системи визначаємо узагальненими координатами q_s, і тоді вказану функцію стану *F* можна розглядати як функцію узагальнених координат, узагальнених швидкостей та часу: $F = F(q_s, \dot{q}_s, t),$ (1), де $q_s = q_s(t),\ \dot{q}_s = \dot{q}_s(t)$.

Виділимо на вказаній траєкторії дві точки M_0 і M_1, які відображають конфігурацію системи в деякі два моменти часу t_1 і t_2. Очевидно, що кожна точка траєкторії між виділеними точками відображає послідовність змін конфігурацій системи за проміжок часу $(t_2 - t_1)$, яка відбувається згідно із законами руху та накладеними в'язями. Підкреслимо, що такий шлях переходу системи без порушення законів руху і в'язей за даних умов є єдино можливим. Тому його будемо називати дійсним або прямим шляхом.

Але якщо відволіктись від дії заданих сил, а врахувати лише дію накладених в'язей, то зрозуміло, що, не розриваючи зв'язок із тілами, які обмежують рух матеріальних точок системи, тобто із в'язями, система із положення *1* в положення *2* ***за той же проміжок часу*** $(t_2 - t_1)$ могла перейти великою кількістю шляхів (дуже близьких до прямих, щоб не порушувались в'язі), які не описуються рівняннями руху, а відповідають лише рівнянням в'язей (на рис. 1 вони умовно зображені штриховими лініями). Значення функції (1) у кожний момент часу помножимо на *dt* і проінтегруємо за проміжком часу $(t_2 - t_1)$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} F(q_s, \dot{q}_s, t)dt. \quad (1)$$

Зазначимо, що в авторів окремих інтегральних варіаційних принципів (Лагранж, Ейлер, Мопертюї, Гамільтон), які ми тут не розглядаємо, підінтегральна функція $F(q_s, \dot{q}_s, t)$ має різний зміст.

Визначимо критерій, який відрізняє дійсний (прямий) шлях системи від усіх інших близьких, кінематично можливих при заданих в'язях, шляхів, які не відповідають рівнянням руху і тому вони в реальності не здійснюються (оскільки вони не задовольняють рівнянням руху), і тому їх розглядають як обхідні, віртуальні, або траєкторії порівняння.

Оскільки дійсна траєкторія і траєкторія порівняння близькі, але все ж відрізняються, то для одних і тих самих моментів часу, крім t_1 і t_2, можна покласти: $\tilde{q}_s = q_s + \delta q_s,\ \ \tilde{\dot{q}}_s = \dot{q}_s + \delta \dot{q}_s$,де δq_s та $\delta \dot{q}_s$ - варіації координат та швидкостей, а вибрана функція стану $F = F(q_s, \dot{q}_s, t)$, отже, й інтеграл (2), при переході від дійсної до

DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-3

віртуальної траєкторії зазнає малої ізохронної зміни, яку для функції *S* можна визначити при розкладанні її у ряд Тейлора, обмежившись при цьому лінійними членами (використовуємо при цьому комутативність ізохронної варіації та інтегрування):

$$\delta S = S' - S = \int_{t_1}^{t_2} F'(q_s, \dot{q}_s, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} F(q_s, \dot{q}_s, t)dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(F(q_s, \dot{q}_s, t) + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial F}{\partial q_s} \delta q_s + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} F(q_s, \dot{q}_s, t)dt \Rightarrow$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{s=1}^{l} \frac{\partial F}{\partial q_s} \delta q_s + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) dt. \quad (3)$$

Використовуючи комутативність ізохронної варіації та диференціювання, здійснимо перетворення другого інтегралу в (3):

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s dt = \sum_{s=1}^{l} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} \delta \frac{dq_s}{dt} dt = \sum_{s=1}^{l} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} d(\delta q_s) =$$

$$= \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} (\delta q_s) \Big|_{t_1}^{t_2} - \sum_{s=1}^{l} \int_{t_1}^{t_2} d \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} \cdot \delta q_s = -\int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} \cdot \delta q_s dt, \quad (2)$$

де $\sum_{s=1}^{l} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} (\delta q_s) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$, оскільки у моменти часу t_1 і t_2 $\delta q_s = 0.$

Підставимо вираз (4) в (3):

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^{l} \left(\frac{\partial F}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt \, . \quad (5)$$

Як відомо із математики, для того, щоб функція виду (5) (де $q_s = q_s(t),\ \dot{q}_s = \dot{q}_s(t)$) у межах t_1 і t_2 приймала стаціонарне (в окремих випадках – екстремальне) значення, необхідно й достатньо, щоб її перша варіація дорівнювала нулю $\delta S = 0,$ що, очевидно, можливо лише, якщо всі коефіцієнти в (5) при незалежних варіаціях δq_s будуть рівними нулю. Отже, із (5) маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} = 0, \quad s = 1, 2, ..., l. \quad (6)$$

ICV 2018: 77.58
DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-3

Система рівнянь (6) відома як система диференціальних рівнянь Ейлера-Лагранжа. Оскільки для дійсного шляху функція $F(q_s,\dot{q}_s,t)$ вибрана довільно, то у якості такої довільної функції можна вибрати функцію Лагранжа $L(q_s,\dot{q}_s,t)$, яка залежить від тих же змінних, що й запропонували Гамільтон та Остроградський. Тоді, із такого загального підходу до порівнянь дійсних змін стану системи із віртуальними змінами, рівняння Ейлера-Лагранжа (6) перетворюються у рівняння Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}=0, \quad s=1,2,...,l, \quad (7)$$

які є рівняннями дійсного руху механічної голономної системи з потенціальними (узагальнено-потенціальними) силами, тобто ці рівняння стають наслідком запропонованого загального підходу, а інтеграл (2) набуває вигляду:

$$S=\int_{t_A}^{t_B} L dt, \quad (9)$$

і, як зазначалось, для стаціонарності інтегралу виду (5, 9), тобто на дійсному шляху потрібно, щоб перша варіація (8) була рівною нулю ($\delta S=0,$), і тому можемо сформулювати принцип Остроградського-Гамільтона: *дійсний рух механічної системи між двома заданими положеннями $q_s(t_1)$ та $q_s(t_2)$ конфігураційного простору Q відбувається вздовж траєкторії, для якої функціонал дії $S(q, t_1, t_2)$ набуває стаціонарного значення.*

Принцип Гамільтона важливий не тільки для самої механіки – його особливе значення полягає ще і в тому, що шляхом узагальнення функції Лагранжа вдається перенести аналітичні методи механіки в інші – немеханічні розділи фізики. Для того, щоб студенти краще зрозуміли зміст інтегрального варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона, доцільно розглянути його з дещо інших позицій, а саме – із самого початку – вважати, що дійсний рух системи відбувається відповідно до рівнянь Лагранжа (7)

Позначимо функцію Лагранжа для прямого шляху $L=L\left(q_s,\dot{q}_s,t\right)$, а для близького віртуального шляху $\tilde{L}=\tilde{L}\left(\tilde{q}_s,\tilde{\dot{q}}_s,t\right)$, який ми будемо порівнювати із прямим шляхом із точки M_0 до точки M_1 у просторі конфігурацій, що здійснюється за той самий час. Оскільки дійсна траєкторія і траєкторія порівняно близькі, але все ж відрізняються, то для одних і тих же моментів часу, крім t_A і t_B, знову можна покласти: $\tilde{q}_s=q_s+\delta q_s, \quad \tilde{\dot{q}}_s=\dot{q}_s+\delta\dot{q}_s$.

DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-3

Помноживши функцію Лагранжа для обох шляхів на dt і знайшовши суму одержаних добутків для виділеного проміжку часу $(t_B - t_A)$, одержимо інтеграл дії для прямого і віртуального шляху:

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L dt, \quad \tilde{S} = \int_{t_A}^{t_B} \tilde{L} dt \quad (10)$$

Інтеграли виду (10), які мають розмірність (енергія-час), називаються інтегралами дії, або просто – дія. Як показав подальший розвиток фізики, наведений тут інтеграл дії відіграє надзвичайно важливу роль у багатьох розділах фізики. Очевидно, що відмінність інтегралів (10) пов'язана зі зміною (варіацією) підінтегральної функції і ця зміна у лінійному наближенні дорівнює:

$$\delta S = (\tilde{S} - S) = \int_{t_A}^{t_B} \tilde{L} dt - \int_{t_A}^{t_B} L dt = \int_{t_A}^{t_B} (\tilde{L} - L) dt = \int_{t_A}^{t_B} \delta L dt. \quad (11)$$

Визначимо ізохронну варіацію $\delta L = (\tilde{L} - L)$, залишаючи лише лінійну частину:

$$\begin{gathered} \delta L = L + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s - L \Rightarrow \\ (\tilde{L} - L) = \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s. \end{gathered} \quad (12)$$

Тоді інтеграл дії дорівнює:

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_B} \left(\sum_{s=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) dt \,. \quad (13)$$

Ураховуючи комутативність ізохронної варіації

($\delta \dot{q}_s = \delta \dfrac{dq_s}{dt} = \dfrac{d}{dt} \delta q_s$) та очевидне перетворення:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \frac{d}{dt} \delta q_s \Rightarrow = \\ = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q} \Rightarrow \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s, \end{gathered} \quad (14)$$

вираз (13) перетворимо до вигляду:

ICV 2018: 77.58
DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-3

$$\delta S=\int_{t_A}^{t_B}\left(\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{s=1}^{l}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\delta q_s\right)-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\delta q_s\right)\right)dt\Rightarrow$$

$$\delta S=\int_{t_A}^{t_B}\left(\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s-\sum_{s=1}^{l}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\delta q_s+\sum_{s=1}^{l}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\delta q_s\right)dt\Rightarrow$$

$$\delta S=\int_{t_A}^{t_B}\sum_{s=1}^{l}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\right)\delta q_s dt+\int_{t_A}^{t_B}\sum_{s=1}^{l}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\delta q_s\right)dt\Rightarrow$$

$$\delta S=\int_{t_A}^{t_B}\sum_{s=1}^{l}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\right)\delta q_s dt+\int_{t_A}^{t_B}\sum_{s=1}^{l}d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\delta q_s\right).$$

Перший інтеграл в останньому виразі у зв'язку з рівняннями Лагранжа дорівнює нулю, а другий, виходячи з того, що в точках M_0 і M_1 дійсна і віртуальна траєкторії збігаються, тобто у цих точках всі варіації δq_s =0, дорівнює:

$$\int_{t_A}^{t_B}\sum_{s=1}^{l}d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\delta q_s\right)=\sum_{s=1}^{l}\int_{t_A}^{t_B}d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\delta q_s\right)=\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\delta q_s\Big|_{t_A}^{t_B}=0,$$

Якщо так само порівняти дві близькі віртуальні траєкторії, то для них рівняння Лагранжа застосовувати не можна, отже, для них $\delta S\neq 0.$ Можна постулювати принцип стаціонарної дії Остроградського-Гамільтона і в наступному вигляді: *дія, за Гамільтоном, при дійсному русі голономної системи приймає стаціонарне значення, якщо всі активні сили потенціальні (узагальнено-потенціальні), а варіації узагальнених координат рівні нулю на кінцях проміжку інтегрування.*

Рівність нулю першої варіації на дійсному шляху встановлює незмінність (стаціонарність) інтегралу дії, але не забезпечує екстремум, для встановлення екстремуму потрібно аналізувати другу варіацію, що було виконано математиком Ж. А. Серре, який довів, що у всіх випадках при варіаційному аналізі на стаціонарність $\delta^2 S>0$, тобто для дійсного шляху має місце мінімум дії за Гамільтоном (7), тому цей принцип для таких систем називають також принципом найменшої дії. Для закріплення цієї теми на практичних заняттях рекомендуємо розв'язати задачі, що ілюструють застосування принципу Гамільтона-Остроградського. Цікавим для студентів буде приклад із аналізом руху гармонічного осцилятора, який проаналізували ще творці аналітичної механіки.

Приклад. Нехай матеріальна точка з масою *m* рухається прямолінійно під дією сили *F*, яка є пропорційною зміщенню *q* від положення стійкої рівноваги, тобто $F=-cx$, де *c* – коефіцієнт пропорційності.

DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-3

Рівняння руху має вигляд: $\ddot{q}+k^2=0$, де $k^2=\frac{c}{m}$. Це диференціальне рівняння вільних коливань; його загальний інтеграл дорівнює $q=A\sin(kt+a)$. Для простоти розглянемо випадок, коли точка, що коливається (осцилятор) у початковий момент *t*=0 знаходиться в положенні рівноваги (*q*=0). Тоді початкова фаза α має нульове значення, і, отже: $q=A\sin kt$. У просторі дійсному переміщенню осцилятора буде відповідати дуга синусоїди $A\sin kt$ (рис.2).

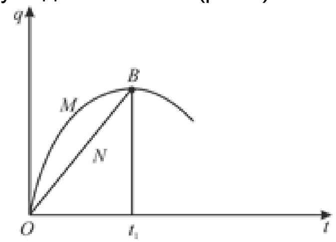

Рис. 2. Дійсний *OMB* і віртуальний *ONB* рух гармонічного осцилятора

Пропонуємо студентам обчислити величину дії при переміщенні точки вздовж дійсної кривої *OMB* (довжина дуги *dS* кривої *OMB* при цьому вважається малою) і по якій-небудь кривій порівняння, наприклад, по хорді *ONB*. Розв'язання цього прикладу, як і інших, які може запропонувати викладач, показує, що дія на дійсному шляху менша за дію, розраховану по кривій порівняння, що знаходиться в повній згоді з принципом Гамільтона.

Висновки та перспективи подальших наукових досліджень. У статті наведено деякі методичні особливості викладання теми "Принцип Гамільтона-Остроградського", які можуть бути покладений в основу вивчення більшості фізичних явищ. Як показує досвід викладання класичної механіки, розглянута методика дозволяє сформувати в студентів достатньо глибоке й стійке розуміння вказаного принципу та дає уявлення про використання його для розв'язання задач механіки, які важко розв'язати, використовуючи лише закони Ньютона. Подальше вивчення теоретичної фізики студентам покаже, що цей принцип є незамінним інструментом дослідження фізичних систем, тому що за його допомогою можна достатньо просто одержати важливі фізичні результати навіть поза межами механіки. Наступні дослідження будуть спрямовані на створення методичних основ навчання інших розділів теоретичної фізики в педагогічних університетах на базі варіаційних принципів.

Література

1. Бондаренко, А. А., Дубінін, О. О., Переяславцев, О. М. (2004). *Теоретична механіка: Підручник: У 2 ч. Ч.2: Динаміка*. Київ: «Знання».

2. Булгаков, В. М., Яременко, В. В., Черниш, О. М., Березовий, М. Г. (2017). *Теоретична механіка:підручник*. Київ: ЦУЛ.

3. Іванов, Б. О., Максюта, М. В. (2012). *Конспект лекцій із теоретичної*

DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-3

механіки: навчальний посібник. Київ: ВПЦ «Київський університет».
4. Єжов, С. М., Макарець, М. В., Романенко, О. В. (2007). Класична механіка. Київ: Фізичний факультет.
5. Литвинов, О. І., Михайлович, Я. М., Бойко, А. В., Березовий, М. Г. (2013). *Теоретична механіка Ч. ІІ. Динаміка. Основи аналітичної механіки*. Київ: Агроосвіта.

References

1. Bondarenko, A. A, Dubinin, O. O., Pereyaslavtsev, O. M. (2004). *Theoretical mechanics: Textbook: Part 2 Part 2: Dynamics.* Kyiv: «Knowledge»
2. Bulgakov, V. M, Yaremenko, V. V., Chernysh, O. M., Berezovy, M. G. (2017). *Theoretical mechanics: textbook*. Kiev: ZUL.
3. Ivanov, B. O., Maksyuta, M. V. (2012). *Synopsis of lectures on theoretical mechanics: tutorial*. Kyiv: Publishing and Printing Center «Kyiv University»)
4. Yezhov, S. M., Makaresh, M. V., Romanenko, O. V. (2007). *Classical mechanics*. Kyiv: Faculty of Physics).
5. Litvinov, O. I., Mikhailovich, Ya. M., Boyko, A. V., Berezovy, M. G. (2013). *Theoretical mechanics Ch. II. Dynamics. Fundamentals of Analytical Mechanics*. Kiev: Agro Education).

АНОТАЦІЯ

На основі аналізу актуальних досліджень констатується, що обґрунтування основ аналітичних методів дослідження фізичних систем та варіаційних методів залишилося поза увагою методичної науки, тому висвітлення методичних аспектів обґрунтування теми "Варіаційний інтегральний принцип стаціонарної дії" при навчанні теоретичної фізики в педагогічних університетах є актуальним. Опираючись на те, що механічний стан у кожний момент часу однозначно визначається як конфігурацією системи, так і швидкостями системи, вводиться деяку довільну динамічну функцію стану системи $F = F(q_s, \dot{q}_s, t),$ *яка пов'язана із координатами та швидкостями всіх матеріальних точок і можливо часу. Значення цієї функції у кожний момент часу помножимо на dt і виконаємо інтегрування за вказаним проміжком часу* $S = \int_{t_1}^{t_2} F(q_s, \dot{q}_s, t)dt.$

Якщо відволіктись від дії заданих сил, а врахувати лише дію накладених в'язей, то зрозуміло, що, не розриваючи зв'язок із тілами, які обмежують рух матеріальних точок, система із положення 1 у положення 2 за той же проміжок часу $(t_2 - t_1)$ *могла перейти великою кількістю близьких шляхів, які не описуються рівняннями руху, а відповідають лише рівнянням в'язей. Для встановлення критерію, який відрізняє дійсний (прямий) шлях системи від усіх інших близьких кінематично можливих (віртуальних) при заданих в'язях, визначаємо варіацію одержаного інтегралу і приходимо до висновку, що дійсний рух механічної системи між двома заданими положеннями* $q(t_1)$ *та* $q(t_2)$ *конфігураційного простору відбувається вздовж траєкторії, для якої функціонал дії* $S(q,\ t_1,\ t_2)$ *набуває стаціонарного значення, і, крім цього, одержуємо рівняння Лагранжа, які, як і другий закон Ньютона, є рівняннями руху.*

Для закріплення матеріалу студентам пропонується розглянути задачу про рух гармонічного осцилятора і визначити величину дії між двома точками вздовж траєкторії і вздовж іншої близької лінії між цими ж точками. Розглянута методика дозволяє сформувати у студентів достатньо глибоке й стійке розуміння вказаного принципу та дає уявлення про використання цього принципу для розв'язання задач механіки, які важко розв'язати використовуючи лише закони Ньютона.

Ключові слова: *методика навчання фізики, варіаційні принципи, рівняння Лагранжа, інтеграл дії, майбутні вчителі фізики.*