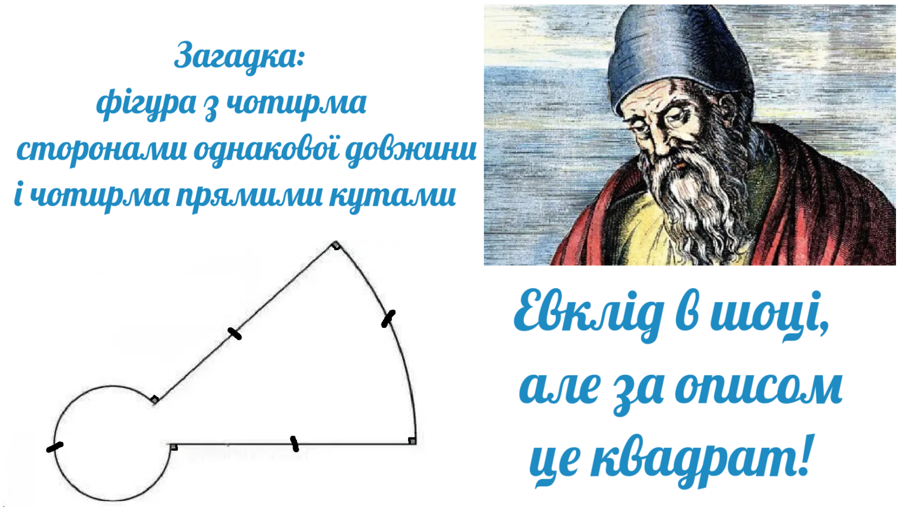
П'ять постулатів геометрії Всесвіту: «Начала» Евкліда Олександрійського та математика досконалості.



***

Одного разу вчитель запитав майбутнього великого грецького математика Евкліда:

— Що б ти вибрав: два цілих яблука чи чотири їхні половинки?

— Звісно, чотири половинки.

— А чому? — запитав учитель.

— Адже це одне й те саме.

— І зовсім не одне й те саме, — відповів майбутній математик.

— Вибравши два цілих яблука, як би я зміг дізнатися, червиві вони чи ні?..

1.1 Евклід Олександрійський, коніки та ірраціональність $\sqrt{2}$.

Евклід Олександрійський (325 — 265 рр. до н.е.) — автор одного з найпопулярніших творів в історії (після Біблії). Його головний твір «Начала» був перевиданий тисячі разів, протягом століть за ним осягали ази математики та геометрії цілі покоління вчених. Ця праця складається з 13 книг і містить найважливіші геометричні та арифметичні теорії Давньої Греції. Не менше значення, ніж зміст, має й вигляд, у якому Евклід представив наукове знання: з аксіом і визначень він вивів 465 теорем, побудувавши бездоганну логічну структуру, що залишалася непорушною аж до початку XIX століття, коли була створена неевклідова геометрія.

Про життя Евкліда відомо дуже мало, а тими нечисленними відомостями, якими ми володіємо, завдячуємо давньогрецькому філософу-неоплатоніку Проклу, який записав їх через шість століть після смерті математика. Прокл розповідає, що Евклід працював у Олександрії – місті, заснованому Олександром Македонським у 332 році до н.е., і що стало столицею імперії за правління єгипетського царя Птолемея I Сотера (Рятівника). Птолемей побудував знамениту Олександрійську бібліотеку, яку його син Птолемей II Філадельф розширив, заснувавши Мусейон. Прокл стверджує, що Евклід навчався в Академії Платона і був знайомий з творами Аристотеля. Переселившись до Олександрії, він заснував там школу й заклав основи математичної традиції, яку виклав у кількох творах, зокрема «Началах», написаних у зрілому віці.

Рис. 1. Евклід за роботою.

Евклідові приписують два знамениті висловлювання. На питання царя Птолемея I «Чи немає шляху коротшого, ніж той, про який ти пишеш у «Началах», щоб вивчити геометрію?» він дав різку відповідь: «У геометрії немає царських шляхів». Друге — його реакція на питання учня про те, яку користь принесе йому вивчення геометрії. Евклід наказав рабу: «Дай йому три оболи (мідна монета в Давній Греції), раз він хоче отримувати прибуток з навчання».

Цей великий грек оформив у «Началах» математичне вчення, що зародилося за три століття до цього і проіснувало багато століть після його смерті, що сталася близько 265 року до н. е. Таким чином, Евклід здійснив великий синтез трьох століть давньогрецької математики, яка, судячи з обсягу твору давнього мудреця, була дуже розвиненою дисципліною, особливо якщо врахувати, що в «Началах» не розглядалися багато питань, що вивчалися в Академії.

На рис. 2 нижче показані роботи Евкліда.

«Начала» (геометрія): книги I–XIII (написані Евклідом) і два апокрифи (книга XIV написана Гіпсиклом, книга XV — передбачувано Ісідором Мілетським)	
МАТЕМАТИКА (Початкова геометрія)	«Дані»
	«Про поділ фігур»
	«Псевдарія»
МАТЕМАТИКА (Вища геометрія)	«Поверхневі місця»
	«Поризми»
	«Конічні перетини»
АСТРОНОМІЯ	«Явища»
МУЗИКА (Введення в музику)	«Гармонічне введення» (Клеонід)
	«Ділення канона»
ФІЗИКА (МЕХАНІКА)	«Про легкість і вагу»
	«Про важіль»
ФІЗИКА (ОПТИКА)	«Оптика»
	«Катоптрика» (Теон Александрійський)

Рис. 2. Твори, що приписуються Евкліду.

Як видно, крім «Начал» Евклід написав багато інших праць. У сукупності ці книги представляють собою досить чітку програму вивчення математики, а також стосуються широкого ряду інших питань геометрії (перші три — початкового рівня, останні три — складніші), астрономії, музики, оптики та механіки.

У «Даних» містяться 94 положення (аксіоми), в яких аналізується, які властивості фігур можна вивести, якщо «відомі деякі з них»; цю книгу можна назвати початковим підручником з елементарної планіметрії.

У творі «Про поділ фігур» розглядається поділ заданої фігури однією або кількома прямими, «дотримуючись деяких умов», щоб площі утворених частин співвідносилися між собою певним чином.

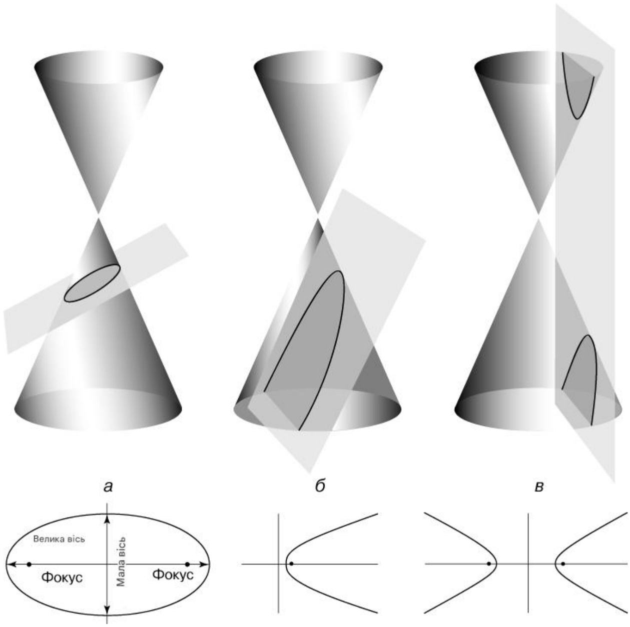


Рис. 3. Конічні перерізи - результат перетину конуса площиною.

Робота «Конічні перетини» була присвячена однойменним перерізам (або просто конікам), які є перетином конуса (подвійного) з площиною. Тип перерізу залежить від кута площини. На рис. 3 зображені різні конічні перетини залежно від співвідношення фокуса і директриси. Як видно з рис. 4, якщо площина паралельна осі конуса, ми отримуємо *гіперболу* (що складається з двох гілок), якщо площина паралельна твірній конуса, то *параболу*, а в інших випадках — *еліпс* (включаючи *коло* як окремий випадок).

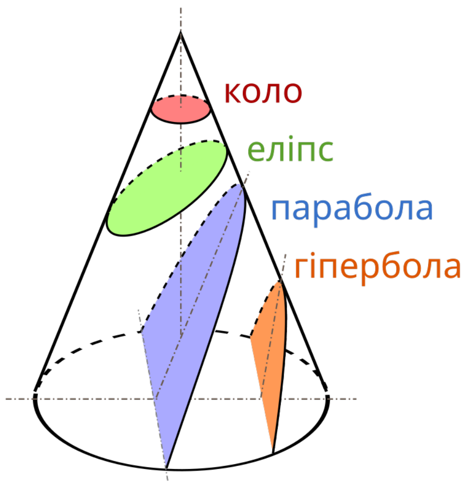


Рис. 4. Конічні перетини.

Ірраціональність $\sqrt{2}$.

Припустимо, що $\sqrt{2}$ — раціональне число. Тоді його можна представити у вигляді дробу:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

де p і q — цілі числа, що не мають спільних дільників (тобто дріб нескоротний), і $q \neq 0$.

Піднесемо обидві частини до квадрата:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2q^2.$$

Отже, p^2 — парне число, оскільки ділиться на 2. З цього випливає, що й p — парне (оскільки квадрат непарного числа — непарний). Нехай $p = 2k$, де k — ціле число.

Підставимо назад:

$$(2k)^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow$$

$$4k^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow$$

$$q^2 = 2k^2.$$

Отже, q^2 теж парне, а значить і q — парне.

Таким чином, і p, і q — парні, що суперечить припущенню, що дріб $\frac{p}{q}$ нескоротний.

Отже, наше припущення невірне, і $\sqrt{2}$ — ірраціональне число.

1.2 Геометрія «Начал».

Прийнято вважати, що Евклід написав 13 книг із загальною назвою «Начала». Вони викладені на койне (форма грецької мови) з використанням символів, що позначають геометричні поняття, зокрема точки, величини і числа. На рис. 5 нижче наведене зображення Ватиканського манускрипту «Начал».

Книга І вважається основною. У ній містяться 23 визначення, п'ять постулатів і п'ять загальних понять. Головна тема книги — теорія трикутників. Представлені основні техніки танграма для доказів і побудов з лінійкою та циркулем. Наприкінці книги — визначення прямокутних трикутників як таких, що підпадають під теорему Піфагора. Також у ній показані дедуктивні можливості методу доведення до абсурду.

Рис. 5. Ватиканський манускрипт «Начал».

На рис. 6 нижче можна побачити одну з редакцій 1-ї книги «Начал».

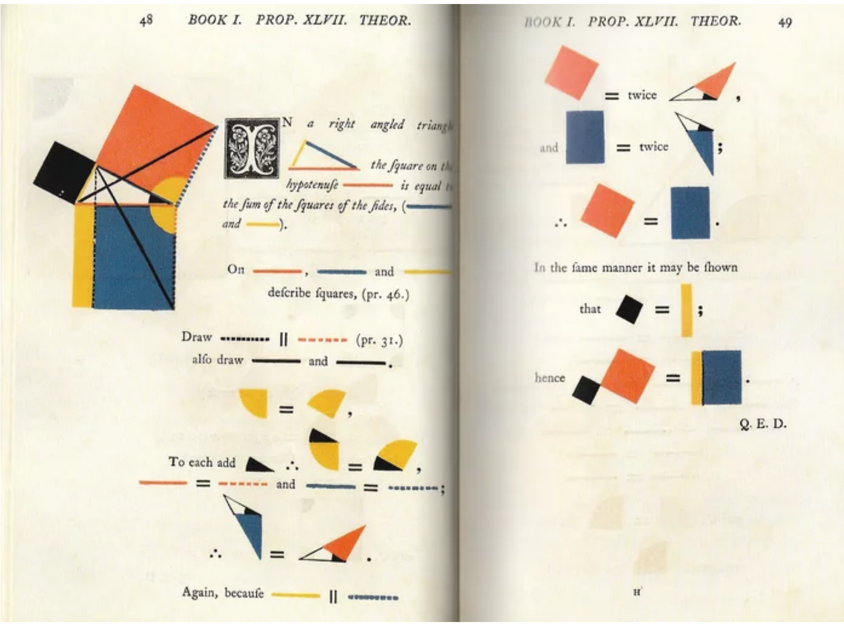


Рис. 6. Версія Книги 1.

Книга II містить геометричну алгебру, точніше, елементарні алгебраїчні перетворення виду:

$$(x \pm y)^2 = x^2 + y^2 \pm 2xy,$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

та їхні наслідки, але не містить жодного рівняння.

У ній розглядаються геометричні задачі, що розв'язуються за допомогою алгебраїчних перетворень з «Даних»; наприклад, побудова прямокутного трикутника за заданою гіпотенузою та висотою, проведеною з вершини прямого кута на гіпотенузу.

На рис. 7 нижче 2-га книга «Начал».

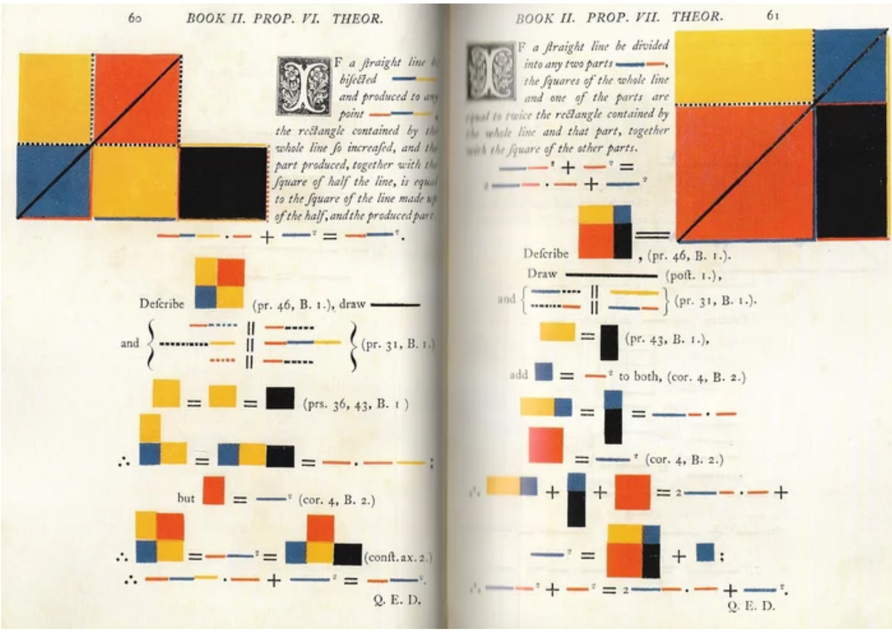
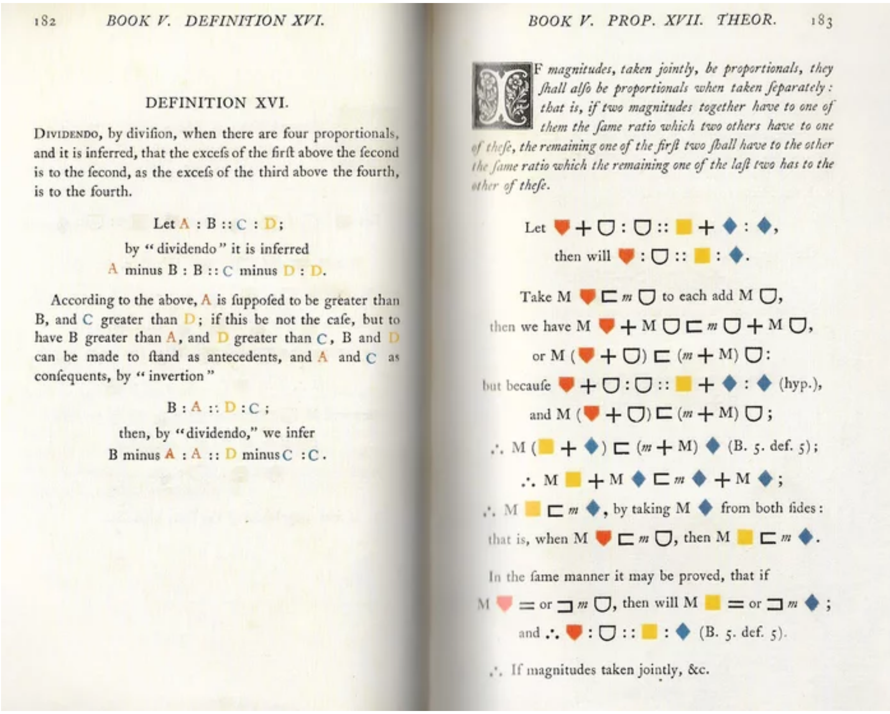


Рис. 7. Версія Книги 2.

Книга V має найважливіше значення для розуміння Евклідової геометрії, оскільки в ній вводиться теорія відношень і пропорцій, без якої неможливі докази багатьох теорем. Вона містить 18 визначень, одна з редакцій наведена на рис. 8 нижче.


182 BOOK V. DEFINITION XVI.

DEFINITION XVI.

DIVIDENDO, by divifion, when there are four proportionals, and it is inferred, that the excefs of the firft above the fecond is to the fecond, as the excefs of the third above the fourth, is to the fourth.

Let A : B :: C : D;

by "dividendo" it is inferred

A minus B : B :: C minus D : D.

According to the above, A is fuppofed to be greater than B, and C greater than D; if this be not the cafe, but to have B greater than A, and D greater than C, B and D can be made to ftand as antecedents, and A and C as confequents, by "invertion"

B : A :: D : C;

then, by "dividendo," we infer

B minus A : A :: D minus C : C.

BOOK V. PROP. XVII. THEOR. 183

IF magnitudes, taken jointly, be proportionals, they fhall alfo be proportionals when taken feparately: that is, if two magnitudes together have to one of them the fame ratio which two others have to one of thefe, the remaining one of the firft two fhall have to the other the fame ratio which the remaining one of the laft two has to the other of thefe.

Let ... then will ...

Take M ... to each add M ...,

then we have M ...,

or M (...) ⊏ (m + M) ...:

but becaufe ... (hyp.),

and M (...) ⊏ (m + M) ...;

∴ M (...) ⊏ (m + M) ... (B. 5. def. 5);

∴ M ... + M ... ⊏ m ... + M ...;

∴ M ... ⊏ m ..., by taking M ... from both fides:

that is, when M ... ⊏ m ..., then M ... ⊏ m ....

In the fame manner it may be proved, that if

M ... = or ⊐ m ..., then will M ... = or ⊐ m ...;

and ∴ ... (B. 5. def. 5).

∴ If magnitudes taken jointly, &c.

Рис. 8. Версія Книги 5.

Інформація про інші книги представлена у табл. 1.

Табл.1. Книги «Начал» Евкліда.

Книга II — Містить теореми так званої «геометричної алгебри». Спирається на книгу I.
Книга III — Містить положення про кола, їхні дотичні та хорди, центральні та вписані кути. Спирається на книгу I і положення 5, 6 книги II.
Книга IV — Містить положення про вписані та описані багатокутники, про побудову правильних багатокутників. Спирається на книги I, III і на положення 11 книги II.
Книга V — Загальна теорія відношень, розроблена Евдоксом Кнідським. Самостійна.

Книга VI — Вчення про подібність геометричних фігур. Ця книга завершує евклідову планіметрію. Спирається на книги I, V і на положення 27 і 31 книги III.

Книга VII — Теоретична арифметика. Натуральні числа, теорія подільності та пропорцій, нескінченність множини простих чисел, алгоритм Евкліда, досконалі числа. Самостійна.

Книга VIII — Продовження теоретичної арифметики. Спирається на визначення з книг V, VII.

Книга IX — Теоретична арифметика: геометрична прогресія, досконалі числа. Спирається на книги VII, VIII і на положення 3, 4 книги II.

Книга X — Класифікація неспівмірних величин. Найоб'ємніша книга «Начал». Спирається на книги V, VI; положення 44, 47 книги I; положення 31 книги III; положення 4, 11, 26 книги VII; положення 1, 24, 26 книги IX.

Книга XI — Основи стереометрії: теореми про прямі та площини, тілесні кути, об'єм паралелепіпеда і призми, рівність і подібність паралелепіпедів. Спирається на книги I, V, VI, положення 31 книги III і положення 1 книги IV.

Книга XII — Теореми про піраміди та конуси, метод вичерпування, теорема про об'єм конуса. Спирається на книги I, III, V, VI, XI; положення 6, 7 книги IV і положення 1 книги X.

Книга XIII — Побудова правильних многогранників; доказ існування п'яти правильних многогранників. Спирається на книги I, III, IV, V, VI, X, XI і на положення 4 книги II.

Деякі визначення «Начал» наведені на рис. 9 нижче.

1. Точка є те, що не має частин.
2. Лінія ж — довжина без ширини.
3. Кінці лінії — точки.
4. Пряма лінія є та, котра рівно розташована по відношенню до точок на ній.

Рис. 9. Деякі визначення Книги 1.

1.3 5 постулатів геометрії Всесвіту та дедукція.

Евклід заснував свою геометрію на кількох постулатах (припущеннях), які досі вважаються очевидними та логічними:

1. Пряму лінію можна провести з будь-якої точки в будь-яку іншу точку.
2. Скінченна пряма може бути продовжена на довільно велику відстань.
3. Можна намалювати коло з будь-якою точкою як центром і будь-якою довжиною як радіусом.
4. Усі прямі кути рівні між собою.
5. П'ятий постулат, або аксіома паралельності, стверджує: якщо при проведенні прямої, яка перетинає інші дві прямі, внутрішні кути з одного боку утворюють у сумі менше 180°, то ці дві прямі у своєму продовженні перетинаються на цьому боці площини. Графічне зображення цієї аксіоми наведене на рис. 10 нижче.

Математики довго сперечалися про самоочевидність цього постулату, а сумнів у ньому в XVIII-XIX століттях призвів до створення неевклідової геометрії та революційного перегляду основ геометрії як науки.

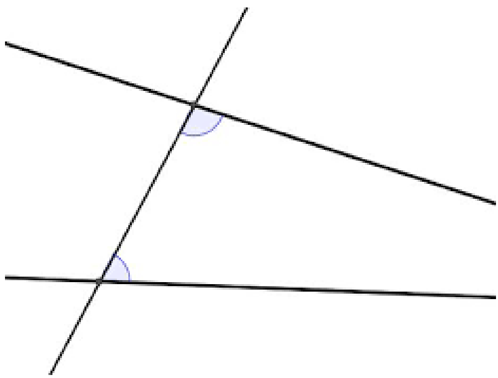


Рис. 10. Аксіома паралельності.

Переходячи до розгляду дедуктивного методу в «Началах», необхідно відзначити, що дедукція не передбачає факту існування об'єкта, що визначається, — його треба встановити. Для цього необхідно розв'язати задачу виду «чи існує такий предмет, як...». У роботі Евкліда для побудови геометричних об'єктів використовуються тільки циркуль і лінійка, інших інструментів не дається. Отже, єдині існуючі точки — ті, які виникають у місцях перетину прямих ліній і кіл.

Після того, як об'єкт побудовано і задачу розв'язано, потрібно переконатися, що він саме такий, як потрібно, тобто побудова відповідає характеристикам, даним у визначенні.

Для цього використовувалися теореми. Вони «встановлюють існування» як дане; вони говорять «ось об'єкт» і констатують, що між різними твердженнями є логічний зв'язок.

Для розв'язання задач необхідний аналіз, тобто знання деяких базових відомостей, які дозволяють побудувати об'єкт. Наприклад, якщо дана сторона AB, потрібно подумати, які інструменти знадобляться для побудови рівностороннього трикутника. Для цього можна уявити його вже побудованим і розглянути, що пов'язує всі його частини. У теоремах же головне — синтез від постулатів до необхідного результату. На рис. 11 нижче представлена пропозиція 1 першої книги.

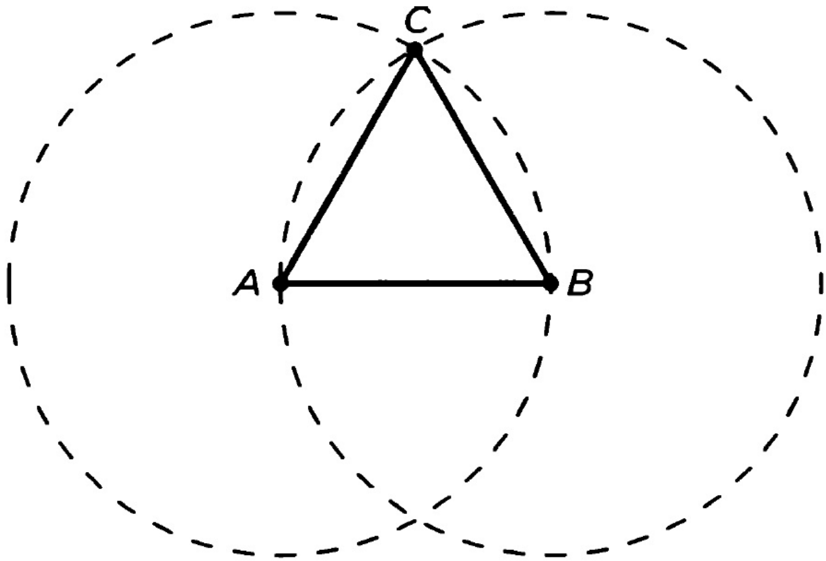


Рис. 11. Рівносторонній трикутник із заданою довжиною сторони.

1.4 Танграм, золотий переріз і піфагорійська зірка.

Одним із найважливіших досягнень китайської геометрії було винайдення танграма, що дозволяє складати різні фігури з однаковою площею. Давньогрецькі математики розвинули й узагальнили цю техніку, надавши їй величезного дедуктивного потенціалу. Зокрема, метод танграма дозволив Евклідові довести одну з основоположних теорем давньогрецької геометрії, знамениту теорему Піфагора, і розв'язати задачі тисячолітньої давнини, успадковані від месопотамських мислителів.

Танграм (сім дощечок майстерності) — це головоломка, як на рис. 12

нижче, яка складається з семи гральних танів — плоских геометричних фігур, що складаються в різні форми. Задача головоломки — створити задану форму (на основі тільки контуру силуету) з використанням усіх семи танів, які заборонено накладати один на одного.

Це одна з найпопулярніших головоломок такого типу у світі. Китайський психолог назвав танграм «найдавнішим психологічним тестом світу», хоча й створеним для розваги, а не для аналізу.

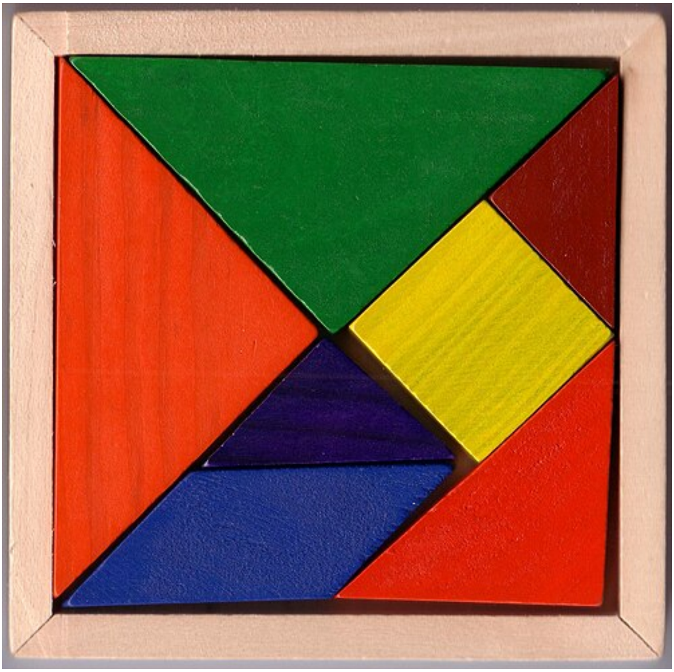
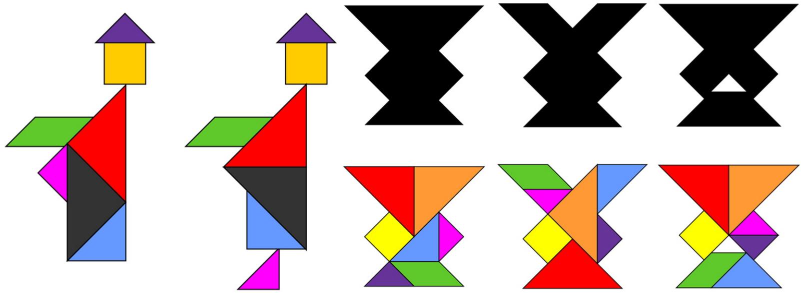


Рис. 12. Танграм.

Згідно з легендою, одного разу монах дав своєму учневі завдання здійснити подорож для того, щоб намалювати сутність різноманітної краси світу тільки на одній керамічній дощечці. На жаль, дощечка розбилася на сім шматків, і учень ніяк не міг її знову зібрати в квадратну форму.

Він намагався це зробити багато днів поспіль, намалював численні зразки та зображення. Зрештою, учень зрозумів: немає сенсу подорожувати світом, тому що легко можна знайти всю красу і різноманітність світу в семи шматках розбитої дощечки.

На рис. 13 а) нижче показаний приклад «Два ченці», б) – «Магічна чаша для гральних кубиків з Восьмої книги Тана» (1903). Кожна з цих чаш створена з одних і тих самих семи елементів, однак перша чаша – повна, а дві інші містять порожнечі різної форми (зверніть увагу, що чаша ліворуч коротша за дві інші; а та, що посередині, трохи ширша тієї, що праворуч).



а) б)

Рис. 13. Парадоксальні фігури танграма.

Якщо вибрати одиницю вимірювання таким чином, що сім елементів можуть бути зібрані в квадрат зі стороною одиниця і площею — квадратна одиниця, то сім елементів будуть наступними:

- 2 великих прямокутних трикутники (гіпотенуза 1, сторони $\frac{\sqrt{2}}{2}$, площа $\frac{1}{4}$);
- 1 середній прямокутний трикутник (гіпотенуза $\frac{\sqrt{2}}{2}$, сторони $\frac{1}{2}$, площа $\frac{1}{8}$);
- 2 маленьких прямокутних трикутники (гіпотенуза $\frac{1}{2}$, сторони $\frac{\sqrt{2}}{4}$, площа $\frac{1}{16}$);
- 1 квадрат (сторони $\frac{\sqrt{2}}{4}$, площа $\frac{1}{8}$);
- 1 паралелограм (сторони: $\frac{1}{2}$ і $\frac{\sqrt{2}}{4}$, площа $\frac{1}{8}$).

Серед цих семи танів паралелограм є особливим, оскільки він не має осьової симетрії, а лише обертальну симетрію, і тому його дзеркальне зображення може бути отримане лише перевертанням цього елемента. Тому це єдиний тан, який при складанні певних фігур слід перевертати.

Тільки з текстів 19-го століття було створено понад 6500 задач для танграма, і поточне число постійно зростає. Однак відомо, що кількість фігур є скінченною.

Fu Traing Wang і Chuan-Chin Hsiung у 1942 році довели, що існує лише 13 опуклих конфігурацій танграма (тобто таких, у яких відрізок, проведений між будь-якими двома точками фігур конфігурації, повністю проходить через тіло конфігурації), як на рис. 14 нижче.

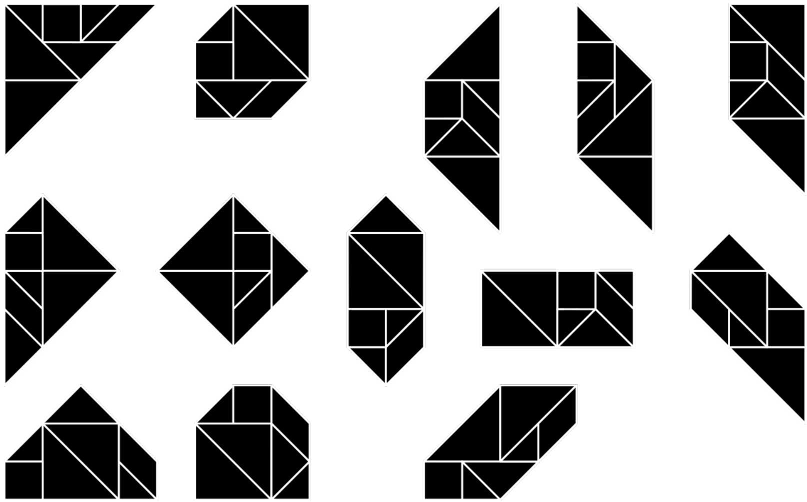


Рис. 14. 13 опуклих конфігурацій танграма.

Золотий переріз та піфагорійська зірка.

Золотий переріз (гармонічний поділ) — співвідношення частин і цілого, при якому відношення частин між собою і цілого до більшої частини рівні. Такі співвідношення спостерігаються в природі, відкриті в науці та дотримуються у творах мистецтва, що, на думку багатьох, надає їм особливої гармонії. Його також називають золотим поділом (коли мається на увазі певна найбільша частина), золотим числом, божественною пропорцією або, в термінології Евкліда, поділом у крайньому та середньому відношенні. Це співвідношення зазвичай позначається великою грецькою літерою Φ (фі) на честь давньогрецького скульптора й архітектора Фідія та відповідає значенню:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339874948948204586834365638117720309\ldots \qquad (1)$$

Це ірраціональне число, тобто число, яке, як і $\sqrt{2}$ не може бути представлене у вигляді раціонального дробу (з цілим чисельником та знаменником). На «золотих відрізках» базуються різні системи та способи пропорціювання в архітектурі, їх співвідношення є універсальним.

Звідси назва, яка вперше з'явилася в епоху Відродження, зокрема в трактаті францисканського ченця, математика Луки Пачолі *«Божественна пропорція»* (лат. *De Divina Proportione*, 1509 р.), але закономірність подібних відношень була відома набагато раніше: у Стародавній

Месопотамії, Єгипті та античній Греції. Історично в давньогрецькій математиці золотим перерізом називався поділ відрізка точкою на дві частини так, що *більша частина відноситься до меншої, як весь відрізок до більшої* (як на рис. 15 нижче):

$$\frac{A}{B} = \frac{A+B}{A} \tag{2}$$

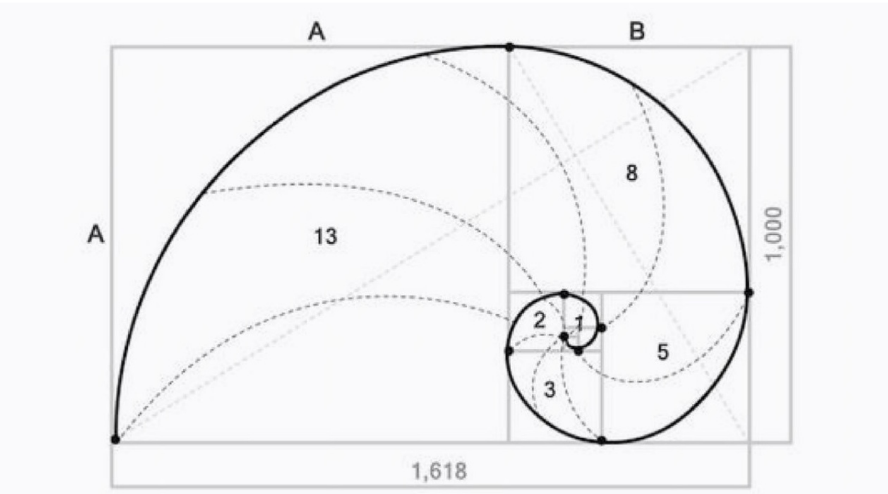


Рис. 15. Золотий переріз.

Це поняття було поширене не тільки на відрізки, але й на довільні величини.

З вихідної рівності (наприклад, приймаючи $A+B$ за 1, A за x і B за невідому змінну y, і розв'язуючи отриману систему рівнянь $x+y=1$; $\frac{x}{y}=\frac{1}{x}$) виходить квадратне рівняння:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \tag{3}$$

А після його розв'язання два корені:

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \tag{4}$$

$$-\Phi = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \tag{5}$$

Φ можна представити у вигляді нескінченного ланцюжка квадратних коренів:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}} \tag{6}$$

Φ також представляється у вигляді нескінченного ланцюгового дробу:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \tag{7}$$

Підхідними дробами слугують відношення послідовних чисел Фібоначчі $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ або $\frac{F_n}{F_{n-1}}$.

Таким чином,

$$\Phi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} \tag{8}$$

де F_n — n-те число Фібоначчі.

Перші кілька підхідних дробів:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1 \tag{9}$$

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2 \tag{10}$$

$$\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \tag{11}$$

$$\frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} \approx 1{,}667 \tag{12}$$

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1{,}6 \tag{13}$$

$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1{,}625 \tag{14}$$

Евклід використовував золотий переріз для проміжного етапу побудови правильного п'ятикутника, зокрема, щоб отримати рівнобедрений трикутник, у якого кути при основі були б удвічі більші за кут при вершині. Цю дивовижну побудову можна пояснити, тільки припустивши, що у Евкліда вже був приклад такого п'ятикутника, причому ідеального, і що, аналізуючи цю фігуру, він прийшов до висновку про необхідність вищевказаного трикутника. Дійсно, при розгляді п'ятикутника видно, що дві діагоналі та одна його сторона утворюють рівнобедрений трикутник, кути в основі якого вдвічі більші за кут у вершині. Діагоналі EB і AD перетинаються в точці F, яка ділить їх у крайньому та середньому співвідношенні. Правильний п'ятикутник мав особливе значення для піфагорійської школи, символом якої, як кажуть, була п'ятикутна зірка, що утворюється шляхом проведення діагоналей усередині пентагона, як на рис. 16 нижче.

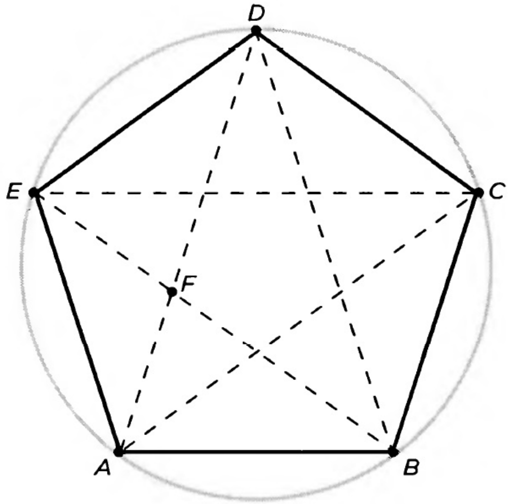


Рис. 16. Рівнобедрені трикутники та пентагон.

1.5 Поліедри (Платонові тіла) і Евклід.

Чи існують усі п'ять Платонових тіл? Побудувати перші три (тетраедр, гексаедр (куб) та октаедр) відносно легко, але у випадку з ікосаедром та додекаедром це значно складніше — саме тому Гіпсікл відвів значну частину книги XIV побудовам цих фігур. Евклід у пропозиціях з 13 по 17 книги XIII пояснює ці фігури і виводить їхні сторони відповідно до діаметра сфери, в яку вони вписані. Задача зводиться до того, щоб побудувати коло, що описане навколо однієї з граней багатогранника. Ця побудова є результатом аналізу, як і в прикладі з правильним п'ятикутником та піфагорійською зіркою. На рис. 17 нижче показано 5 Платонових тіл, існування яких і неможливість побудови інших доведені Евклідом.

Відео (2 хвилини 30 сек.): Александрійська бібліотека і Евклід:
https://youtu.be/dY6U-LlRoHc

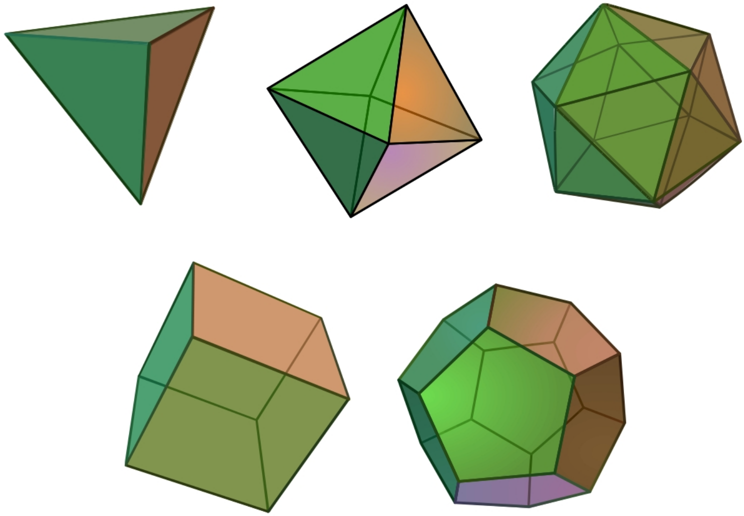


Рис. 17. Платонові тіла.

Найнезвичайнішу побудову одного з них запропонував Лука Пачолі у творі «Про божественну пропорцію».

Цей трактат відомий не тільки тим, що в ньому крайні та середні співвідношення отримали одну з найяскравіших назв, але й завдяки своєму науковому змісту, а також чудовим малюнкам поліедрів роботи самого Леонардо да Вінчі.

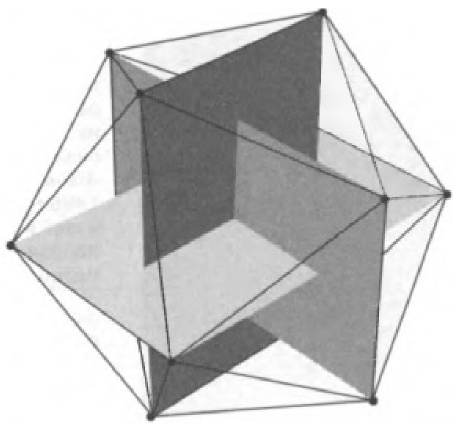


Рис. 18. Каркас ікосаедра з трьох «золотих» прямокутників.

У 1507 році Пачолі зробив точний переклад «Начал» латиною і доповнив їх побудовами. Як видно на рис. 18, він вставив один в одного три рівних золотих прямокутники перпендикулярно один до одного по середній паралелі. Потім йому залишалося тільки з'єднати найближчі одна до одної вершини. Далі, щоб побудувати додекаедр, італієць з'єднав центри граней ікосаедра, і готово!

На рис. нижче наведено 3-D побудову ікосаедра на основі золотих прямокутників, аналогічно до того, як це робив Пачолі: а) - побудова грані; в) - побудова п'яти граней при одній вершині; г) - результат. У цьому випадку отримуємо б) - поділ відрізка в пропорції золотого перерізу.

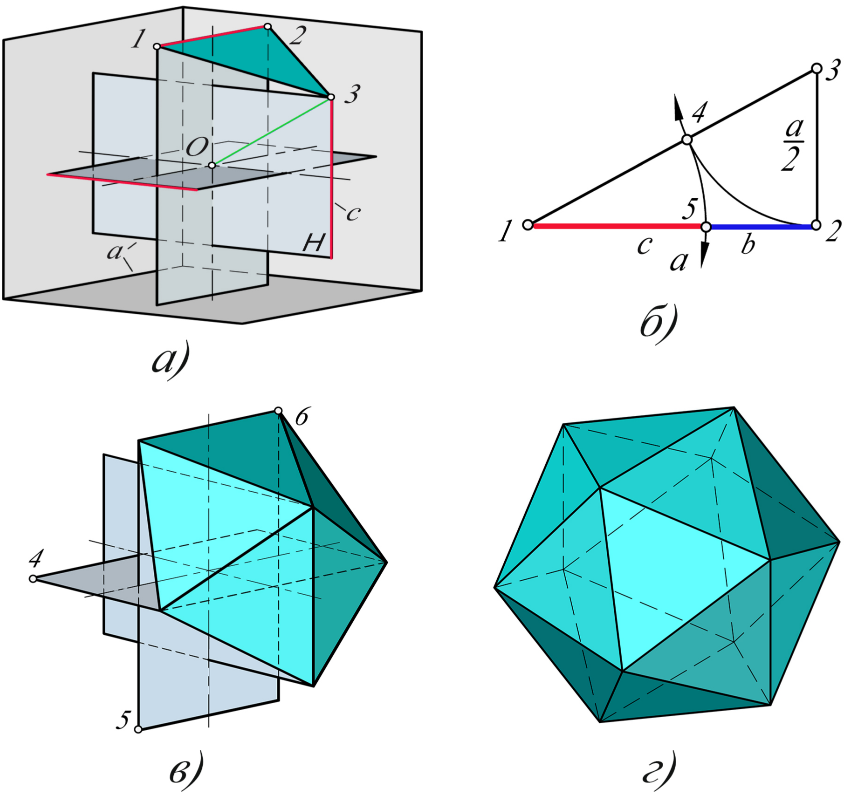


Рис. 19. Правильний ікосаедр на основі золотого перерізу.

Задля розширення світогляду, розглядаючи Платонівські тіла, згадаємо деякі цікаві здобутки відомих математиків, які також досліджували поліедри.

Ейлером у 1752 р. була виведена формула, що пов'язує число вершин (В), граней (Г) і ребер (Р) будь-якого опуклого багатогранника простим співвідношенням: В + Г = Р + 2.

Також правильний багатогранник може бути комбінаторно описаний символом Шлефлі (p, q), де: (p) — число ребер у кожній грані; (q) — число ребер, що сходяться в кожній вершині. Символи Шлефлі для правильних багатогранників наведено в табл. 2.

Табл. 2. Символи Шлефлі правильних багатогранників.

Багатогранник	Вершини	Ребра	Грані	Символ Шлефлі
тетраедр	4	6	4	$\{3, 3\}$
гексаедр (куб)	8	12	6	$\{4, 3\}$
октаедр	6	12	8	$\{3, 4\}$
додекаедр	20	30	12	$\{5, 3\}$
ікосаедр	12	30	20	$\{3, 5\}$

У 1811 році французький математик Огюстен Коші встановив, що існує всього 4 правильних зірчастих тіла, які не є з'єднаннями Платонових і зірчастих тіл (у них грані перетинаються між собою). До 4 правильних зірчастих тіл належать описані в 1619 році Йоганном Кеплером малий зірчастий додекаедр та великий зірчастий додекаедр, а також великий додекаедр і великий ікосаедр, відкритий у 1809 році Луї Пуансо, як на рис. 20 нижче. Решта правильних зірчастих багатогранників є або з'єднаннями Платонових тіл, або з'єднаннями тіл Кеплера — Пуансо.

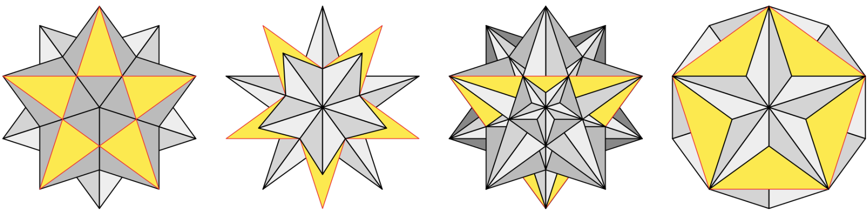


Рис. 20. Тіла Кеплера-Пуансо.

І, нарешті, у чотиривимірному просторі всього налічується 6 правильних багатогранників (політопів).

- **5-комірник (або симплекс, пентахорон):** Це найпростіший правильний 4D політоп, що складається з 5 вершин, 10 ребер, 10 граней (трикутників) і 5 об'ємних комірок (тетраедрів).
- **8-комірник (або тесеракт, 4-куб):** Це 4D аналог куба. Він має 16 вершин, 32 ребра, 24 грані (квадрата) і 8 комірок (кубів).
- **16-комірник (або гексадекахорон):** Він двійчастий до 8-комірника. Має 8 вершин, 24 ребра, 32 грані (трикутника) і 16 комірок (тетраедрів).

- **24-комірник (або ікоситетрахорон):** Це єдиний правильний 4D політоп, який не має аналогів серед платонових тіл у 3D. Він має 24 вершини, 96 ребер, 96 граней (трикутників) і 24 комірки (октаедри).

- **120-комірник (або гекатонікосахорон):** Це 4D аналог додекаедра. Він має 600 вершин, 1200 ребер, 720 граней (п'ятикутників) і 120 комірок (додекаедрів).

- **600-комірник (або гексакосихорон):** Він двійчастий до 120- комірника і є 4D аналогом ікосаедра. Має 120 вершин, 720 ребер, 1200 граней (трикутників) і 600 комірок (тетраедрів).

Ці фігури дуже складно візуалізувати в нашому тривимірному світі (рис. 21), але математично вони строго визначені та вивчаються в геометрії вищих вимірів.

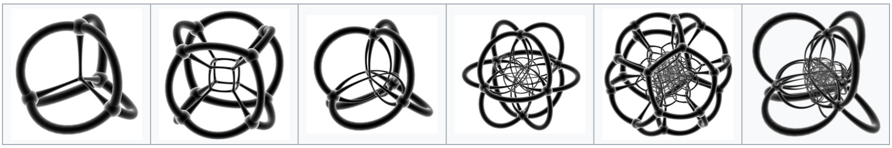


Рис. 21. Правильні багатогранники в 4-вимірному просторі.

1.6 Число пі, квадратура круга та парадокс піци.

Одним з головних досягнень піфагорійської школи було відкриття можливості побудувати квадратуру (квадрат, рівний за площею до будь-якої плоскої фігури з багатьма сторонами). Але чи є це справедливим для круга та інших фігур з однією або всіма сторонами, що є дугами або іншими кривими? Це питання займало не тільки математиків, але й мислителів, і з часом вираз «квадратура круга» став синонімом нерозв'язної задачі.

У другій половині XIX століття англієць Генрі Рінд придбав папірус, датований приблизно 1650 роком до н. е. і названий згодом його ім'ям. Цей папірус, у свою чергу, був копією ще давнішого папірусу, 1800 року до н. е., і містив задачі щодо визначення об'єму циліндричних ємностей для зберігання зерна. Його автор, писар Ахмес, хотів дізнатися площу кола, що лежить в основі циліндра, що привело його до визначення числа π. У давнину його зазвичай вважали рівним 3. Однак Ахмес запропонував точніше значення π, приблизно звівши коло до восьмикутника.

Дано квадрат, що складається з дев'яти одиниць по сторонах. Розділимо його на дев'ять квадратів так, що сторона середнього квадрата буде дорівнювати трьом цілим одиницям (рис. 22 нижче).

Від загальної площі віднімемо площу чотирьох прямокутних трикутників з вершинами, що утворюються при проведенні діагоналей кутніх квадратів. Площа отриманого восьмикутника буде дорівнювати

$$9^2 - 4 \times \frac{3 \times 3}{2} = 81 - 18 = 63$$

одиниці у квадраті. Побудуємо коло з діаметром, рівним 9 одиницям і площею, максимально наближеною до 63 одиниць у квадраті (для зручності розрахунку квадратного кореня беремо 64). Значення π при цьому приблизно буде дорівнювати

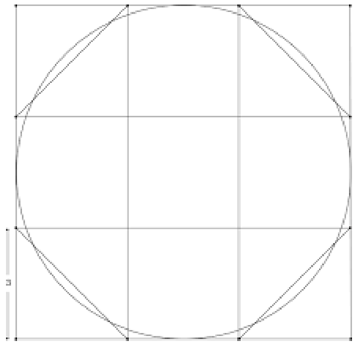


Рис. 22. Наближення Ахмеса для π.

$$\pi = \frac{64}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3{,}16\ldots$$

Розв'язання задачі квадратури круга «грецьким» способом, тобто за допомогою лінійки і циркуля, було недосяжним для геометрів протягом багатьох століть. У 414 році до н. е. афінський драматург Аристофан назвав свого персонажа, який хвалився тим, що побудував квадратуру кола, шарлатаном. Але труднощі не завадили багатьом видатним математикам робити спроби там, де зазнали поразки попередники. Микола Кузанський (1401–1464), Оронцій Фінеус (1494–1555) і П'єр де Сен-Бенсан (1584–1667) опублікували фантастичні методи отримання квадратури кола, які виявилися хибними. У той же час Джеймс Грегорі (1638–1675) і Йоганн Бернуллі (1667–1748) розробили різні способи, що дозволяють підійти до розв'язання цієї задачі з іншого боку. Німецький учений Йоганн Ламберт (1728–1777) першим довів, що число π є ірраціональним. Його співвітчизник Фердинанд фон Ліндеман у 1880 році відкрив, що π — ще й трансцендентне число, тобто не може бути коренем многочлена з раціональними коефіцієнтами. Це робило неможливою побудову квадратури круга за допомогою тільки лінійки і циркуля. Так довелося відмовитися від розв'язання тисячолітньої задачі, а мрії легіону шукачів квадратури круга, серед яких були англійський філософ Томас Гоббс і навіть Наполеон, пішли прахом.

Парадокс піци.

Загадка: спочатку квадрат, потім коло, а наприкінці трикутник, що це одним словом? (як ви знаєте по грі спочатку, піца). Тепер до математики.

Парадокс: Що вигідніше, 2 піци діаметром 30 або одна 45 см?

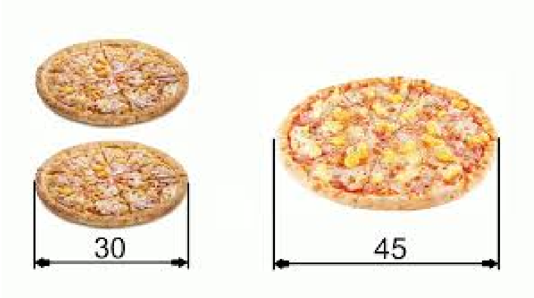


Рис. 23. Парадокс піци.

Розглянемо (рис. 23) кола діаметром $d = 30$ см і $d = 45$ см. Площа кола обчислюється за формулою:

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Площа однієї піци діаметром 45 см

$$S_{45} = \pi \left(\frac{45}{2}\right)^2 = \pi \cdot 22{,}5^2 = \pi \cdot 506{,}25 \approx 1590{,}43\,\text{см}^2$$

Площа двох піц діаметром 30 см

$$S_{30} = \pi \left(\frac{30}{2}\right)^2 = \pi \cdot 15^2 = \pi \cdot 225 \approx 706{,}86\,\text{см}^2$$

$$2 \cdot S_{30} \approx 2 \cdot 706{,}86 = 1413{,}72\,\text{см}^2$$

У результаті:

$$S_{45} - 2 \cdot S_{30} \approx 1590{,}43 - 1413{,}72 = 176{,}71\,\text{см}^2$$

Таким чином, одна піца діаметром 45 см дає на 176,71 см^2 більше, ніж дві піци діаметром 30 см. Отже, математично одна велика піца вигідніша за дві менші, незважаючи на уявну «подвійну» порцію.

1.7 Нескінченність простих чисел і решето Ератосфена.

Нескінченність множини простих чисел Евклід довів таким чином:

Припустимо, що існує скінченна множина простих чисел, наприклад, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, де n — це скінченне число простих. Розглянемо число N, яке дорівнює добутку всіх цих простих чисел, збільшеному на одиницю:

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

Тепер розглянемо дільники числа N. Це число не може ділитися ні на одне з простих $p_1, p_2, \ldots, p_n$, оскільки при діленні на будь-яке з них залишається остача 1. Отже, N або є простим числом, або ділиться на якесь інше просте число, яке не входить до початкового набору $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Якщо N просте, то воно додає нове просте число до нашого набору. Якщо ж N складене, то серед його дільників повинно бути хоча б одне просте число, яке не збігається ні з одним із $p_1, p_2, \ldots, p_n$. У будь-якому разі, це суперечить припущенню про те, що множина простих чисел скінченна.

Таким чином, це припущення хибне, і, отже, простих чисел нескінченно багато.

Решето Ератосфена.

Решето Ератосфена — це алгоритм знаходження всіх простих чисел до деякого цілого числа n, який приписують давньогрецькому математику Ератосфену Кіренському. Назва алгоритму говорить про принцип його роботи: алгоритм здійснює фільтрацію списку чисел від 2 до n. У міру проходження списку складені числа виключаються, а прості залишаються.

Для знаходження всіх простих чисел не більше заданого числа n, слідуючи методу Ератосфена, потрібно виконати наступні кроки:

1. Виписати підряд усі цілі числа від двох до n (2, 3, 4, ..., n).
2. Нехай змінна p спочатку дорівнює двом — першому простому числу.
3. Закреслити в списку числа від 2р до n, рахуючи кроками по p (це будуть числа, кратні p: $2p$, $3p$, $4p$, ...).
4. Знайти перше незакреслене число в списку, більше ніж p, і присвоїти значенню змінної p це число.
5. Повторювати кроки 3 і 4, поки можливо.

Тепер усі незакреслені числа в списку — це всі прості числа від 2 до n. На практиці, алгоритм можна покращити наступним чином. На кроці № 3 числа можна закреслювати, починаючи відразу з числа p в квадраті, тому що всі менші числа, кратні p, обов'язково мають простий дільник менше p, і вони вже будуть закреслені до цього часу. І, відповідно, зупиняти алгоритм можна, коли p в квадраті стане більше, ніж n.

Приклад для $n = 30$

Запишемо натуральні числа, починаючи від 2 до 30 в ряд:
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Перше число в списку, 2 — просте. Пройдемо по ряду чисел, закреслюючи всі числа, кратні 2 (тобто кожне друге, починаючи з 4, тобто 2^2):
2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ 15 ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ 21 ~~22~~ 23 ~~24~~ 25 ~~26~~ 27 ~~28~~ 29 ~~30~~

Наступне незакреслене число, 3 — просте. Пройдемо по ряду чисел, закреслюючи всі числа, кратні 3 (тобто кожне третє, починаючи з 9, тобто 3^2):
2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ 25 ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~

Наступне незакреслене число, 5 — просте. Пройдемо по ряду чисел, закреслюючи всі числа, кратні 5 (тобто кожне п'яте, починаючи з 25, тобто 5^2):
2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~12~~ 11 ~~14~~ ~~15~~ 13 ~~16~~ ~~18~~ 17 ~~20~~ ~~21~~ 19 ~~22~~ ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ 23 ~~28~~ 29 ~~30~~

Наступне незакреслене число — 7. Його квадрат, 49, більший за 30, тому на цьому роботу завершено. Усі складені числа вже закреслені, залишилися тільки прості:

$$2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad 23 \quad 29$$

1.8 Алгоритм Евкліда.

Для знаходження найбільшого спільного дільника, а також для виведення його найважливіших властивостей застосовується алгоритм Евкліда. Він полягає у наступному. Нехай a і b — додатні цілі числа. Маємо послідовність рівностей:

$$\left.\begin{array}{ll}
a = bq_1 + r_2, & 0 < r_2 < b, \\
b = r_2 q_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2, \\
r_2 = r_3 q_3 + r_4, & 0 < r_4 < r_3, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1}, \\
r_{n-1} = r_n q_n, &
\end{array}\right\}$$

Послідовність закінчується тоді, коли отримаємо деякий залишок $r_{n+1} = 0$. Це неминуче, бо ряд $b, r_2, r_3, \dots$ як ряд спадних цілих не може містити більш ніж b додатних членів.

Дійсно, розглядаючи рівності (1), йдучи зверху вниз, переконуємось, що спільні дільники чисел a і b збігаються зі спільними дільниками чисел r_2 і r_3, чисел r_3 і r_4, ..., чисел r_{n-1} і r_n, зрештою, зі спільними дільниками одного числа r_n. Одночасно маємо

$$\gcd(a,b) = \gcd(b, r_2) = \gcd(r_2, r_3) = \ldots = \gcd(r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

Отримуємо такі результати:

1. Сукупність спільних дільників чисел a і b збігається із сукупністю дільників їхнього найбільшого спільного дільника.

2. Цей найбільший спільний дільник дорівнює r_n, тобто останньому ненульовому залишку алгоритму Евкліда.

Наприклад, застосуємо алгоритм Евкліда для знаходження $\gcd(525, 231)$. Отримуємо (допоміжні обчислення зліва):

$$\begin{array}{rr|ll}
1) & 525 & 231 & \\
 & -462 & 2 & (231 \times 2 = 462) \\ \hline
 & 63 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|ll}
2) & 231 & 63 & \\
 & -189 & 3 & (63 \times 3 = 189) \\ \hline
 & 42 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|ll}
3) & 63 & 42 & \\
 & -42 & 1 & (42 \times 1 = 42) \\ \hline
 & 21 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|ll}
4) & 42 & 21 & \\
 & -42 & 2 & (21 \times 2 = 42) \\ \hline
 & 0 & &
\end{array}$$

$$1) \quad 525 = 231 \cdot 2 + 63,$$

$$2) \quad 231 = 63 \cdot 3 + 42,$$

$$3) \quad 63 = 42 \cdot 1 + 21,$$

$$4) \quad 42 = 21 \cdot 2.$$

Останній додатній залишок дорівнює $r_4 = 21$. Отже, $\gcd(525, 231) = 21$.

1.9 Евклід і піфагорові трійки.

Евклід також розглянув задачу отримання піфагорових трійок — трьох натуральних чисел, що підтверджують теорему Піфагора, наприклад 3, 4, 5; 5, 12, 13 і так далі, тобто таких чисел a, b і c, для яких $a^2 + b^2 = c^2$.

Ймовірно, у Давньому Вавилоні знали метод знаходження піфагорових трійок, про що свідчить вавилонська табличка, яку називають Plimpton 322. У ній містяться трійки, записані у шістдесятковій системі.

(Про цю табличку та гномони ми згадували в статті, присвяченій Піфагору).

Цьому видатному давньогрецькому математику приписується авторство методу, який дозволяє отримати ці числа, ґрунтуючись на гномоні квадратних чисел. Квадратне число — це таке, яке можна подати у вигляді n^2. Для того щоб скласти піфагорову трійку, в якій катет і гіпотенуза — два послідовних числа, гномон теж має бути квадратом, тобто $2n+1 = k^2$, де k — непарне число. Отже,

$$n = \frac{k^2 - 1}{2},\ k \text{ непарне.}$$

Так можна отримати трійки $n = \frac{k^2-1}{2}$, k, $n+1 = \frac{k^2+1}{2}$, де k — непарне число, що утворює такі гномони (рис. 24).

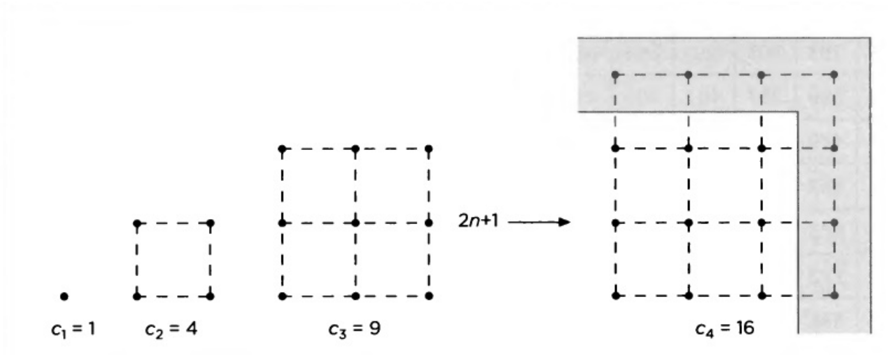


Рис. 24. Гномон непарного квадратного числа.

За допомогою таких підстановок можна отримати нескінченну кількість піфагорових трійок, як показано у табл. 3, але не всі: наприклад, тут бракує трійки 8, 15, 17, у якій різниця між катетом і гіпотенузою дорівнює двом одиницям.

Табл. 3. Піфагорові трійки для непарних чисел.

$a = k$, де k непарне	3	5	7	9	11	13	15	...
$b = n = \frac{k^2-1}{2}$	4	12	24	40	60	84	112	...
$c = n + 1 = \frac{k^2+1}{2}$	5	13	25	41	61	85	113	...

Платону приписують узагальнення цього методу Піфагора. Він запропонував перейти від $(n-1)^2$ до $(n+1)^2$. Для цього треба скласти два гномони: $2n-1$, що дозволяє перейти від $(n-1)^2$ до n^2, і $2n+1$, що дозволяє перейти від n^2 до $(n+1)^2$. Усього треба додати $4n$. Тобто $(n-1)^2+4n=(n+1)^2$. Отже, n має бути квадратним числом: $n=k^2$. Так ми отримуємо трійки $k^2-1, 2k$ і k^2+1. При $k=4$ ми отримаємо вже згадану трійку 8, 15, 17. Це узагальнено у вигляді табл. 4 нижче.

Табл. 4. Піфагорові трійки за методом Платона.

k	2	3	4	5	6	7	8	...
$a=k^2-1$	3	8	15	24	35	48	63	...
$b=2k$	4	6	8	10	12	14	16	...
$c=k^2+1$	5	10	17	26	37	50	65	...

Наведені таблиці (табл. 3 та 4) різняться: у першій представлені взаємно прості трійки, тобто такі, які не мають спільного дільника; у другій трійки у стовпцях з непарним k можна поділити на 2, і ми отримаємо деякі значення першої таблиці. Можна сказати, що перша таблиця включена в другу. Але чи існує алгоритм, що дозволяє отримати всі можливі піфагорові трійки? Відповідь на це питання позитивна, і дає її сам Евклід у лемі 1 книги X:

Існують два квадратних числа, які разом утворюють ще один квадрат.

Евклід використав алгоритм

$$a=\lambda^2-\mu^2, \quad b=2\lambda\mu, \quad c=\lambda^2+\mu^2,$$

де λ і μ — взаємно прості числа, що мають різну парність. Ця умова необхідна для того, щоб трійки не повторювалися і всі їхні числа були простими, без спільних дільників. Дійсно, нас цікавлять тільки прості трійки, адже очевидно, що при будь-якому натуральному k натуральними будуть $3k$, $4k$, $5k$, бо 3, 4 і 5 — натуральні. Усе вищесказане справедливе для будь-якої піфагорової трійки a, b, c.

1.10 Коло стає квадратом.

Розглянемо рівняння кола в стандартній формі:

$$x^2+y^2=1 \tag{15}$$

Це рівняння описує коло радіусом 1 із центром на початку координат, як на рис. 25 нижче.

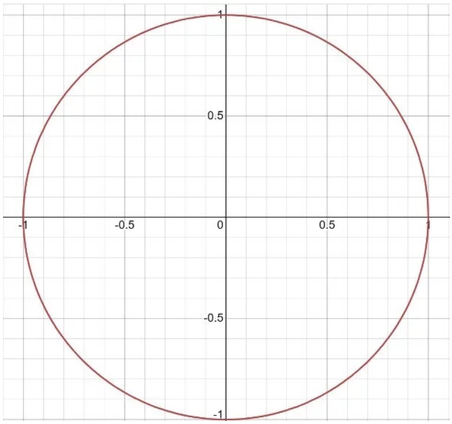


Рис. 25. Коло радіусом 1 із центром на початку координат.

Тепер почнемо зводити степені кожного члена до квадрату, і подивимося, як змінюється графік:

- Для степеня 4 (2 в квадраті за попереднім показником степеня):

$$x^4 + y^4 = 1 \tag{16}$$

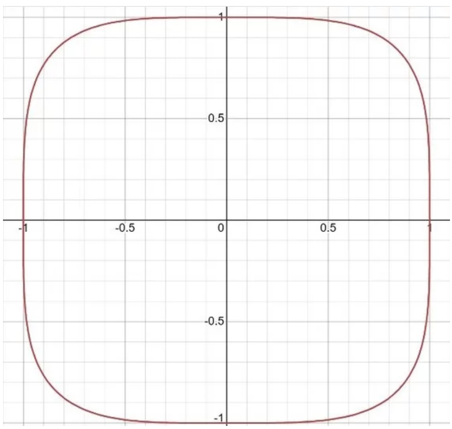


Рис. 26. Зміна кривизни для 4-го степеня.

- Для степеня 16 (4 в квадраті за попереднім показником степеня):

$$x^{16} + y^{16} = 1 \tag{17}$$

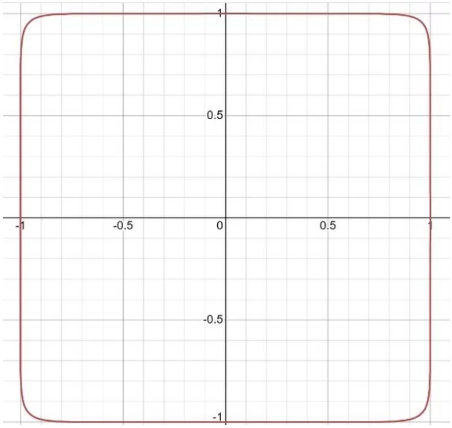


Рис. 27. Зміна кривизни для 16-го степеня.

- Для степеня 256 (16 у квадраті за попереднім показником степеня):

$$x^{256} + y^{256} = 1 \tag{18}$$

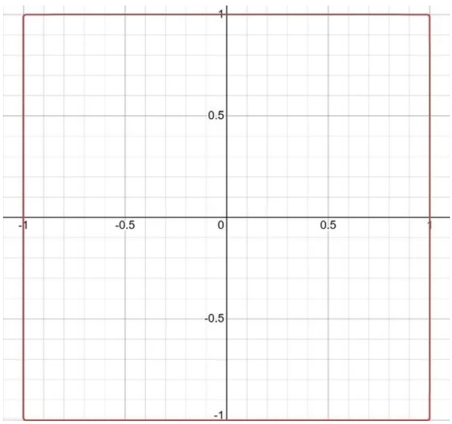


Рис. 28. Зміна кривизни для 256-го степеня.

Зі збільшенням степеня рівняння $x^{2n}+y^{2n} = 1$ описує фігуру, яка візуально наближається до квадрата. Це відбувається тому, що при великих n значення x^{2n} і y^{2n} стають значними тільки поблизу $|x| = 1$ і $|y| = 1$, що й формує кути, характерні для квадрата.