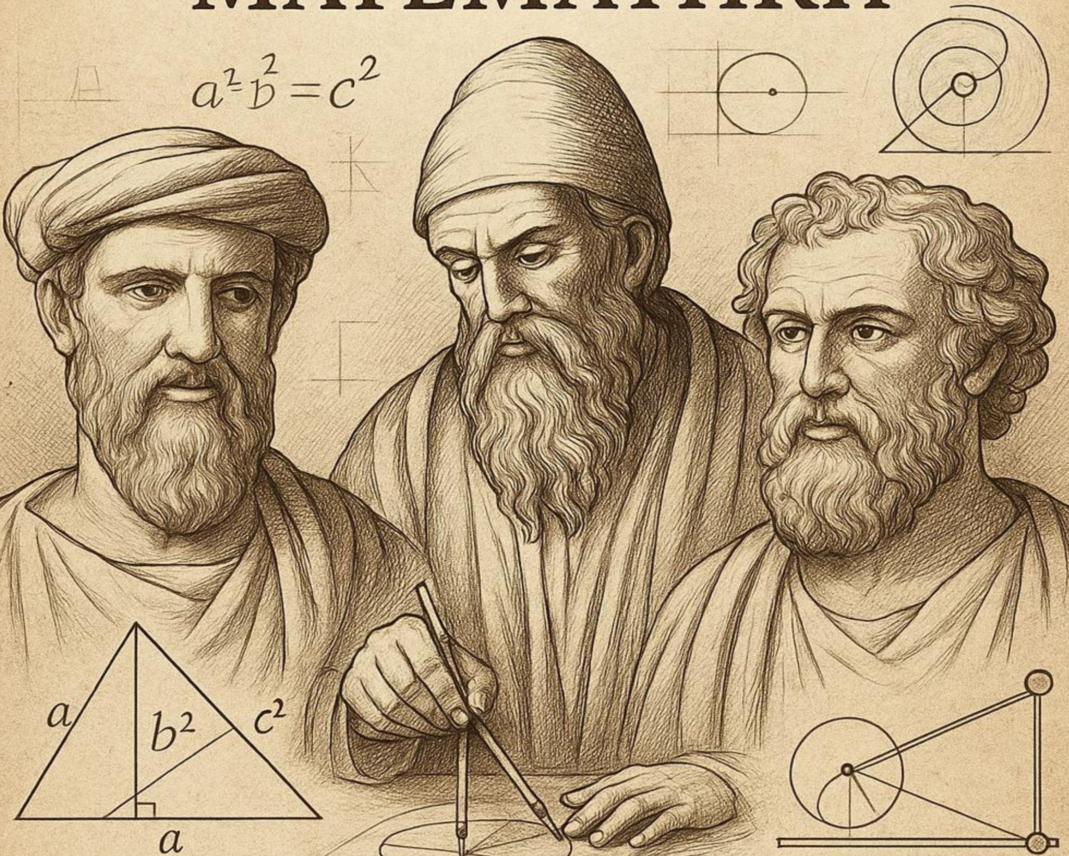
ТРИ ТИТАНИ ДАВНЬОГРЕЦЬКОЇ МАТЕМАТИКИ



Піфагор Евклід Архімед

БЕРДЯНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет фізико-математичної, комп'ютерної та технологічної освіти
Кафедра фізики, математики та методики навчання

«ТРИ ТИТАНИ ДАВНЬОГРЕЦЬКОЇ МАТЕМАТИКИ»

Навчально-методичний посібник
з дисципліни «Історія математики»

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти спеціальності
«А4.04 Середня освіта (математика)»

Запоріжжя, 2025 р.

УДК 51(091)(075.8)

Рецензенти:

Ачкан В.В. – доктор педагогічних наук, професор кафедри математики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка;

Школа О.В. – доктор педагогічних наук, професор, зав. кафедри фізики, математики та методики навчання Бердянського державного педагогічного університету.

Рекомендовано до друку Вченою радою факультету фізико-математичної, комп'ютерної та технологічної освіти Бердянського державного педагогічного університету (протокол № 2 від 29 жовтня 2025 року)

Три 67

«Три титани давньогрецької математики»: навчально-методичний посібник для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності «А4.04 Середня освіта (математика)» / уклад.: М. Кудінов. Запоріжжя: БДПУ, 2025. 100 с.

Навчальний посібник «Три титани давньогрецької математики» містить систематизований виклад математичної спадщини Піфагора Самоського, Евкліда Олександрійського та Архімеда Сіракузького. У посібнику представлено теоретичні відомості про фундаментальні математичні концепції, розроблені цими видатними мислителями античності, історичний контекст їхніх відкриттів, детальні пояснення класичних теорем та методів доведення.

Для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності «А4.04 Середня освіта (математика)» та викладачів математики закладів загальної середньої, фахової передвищої і вищої освіти.

УДК 51(091)(075.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Математика – це мова, якою написана книга Всесвіту. Ці слова Галілео Галілея як ніколи точно відображають сутність науки, яка народилася понад дві з половиною тисячі років тому на узбережжі Середземного моря. Саме там, у Стародавній Греції, троє геніальних мислителів заклали фундамент математичного знання, на якому й досі стоїть вся сучасна наука.

Ця книга присвячена трьом титанам давньогрецької математики – Піфагору, Евкліду та Архімеду. Кожен з них залишив неоціненний внесок у розвиток математичної думки, кожен відкрив свій унікальний шлях до пізнання законів природи через числа та геометричні форми.

Піфагор Самоський – філософ і містик, який побачив у числах основу буття. Його вчення про гармонію сфер, відкриття зв'язку між музикою та математикою, а найголовніше – теорема, що носить його ім'я, стали наріжним каменем геометрії. Піфагор навчив людство бачити порядок у хаосі, розуміти, що світ підпорядковується математичним законам.

Евклід Олександрійський – систематизатор знань, творець аксіоматичного методу. Його «Начала» протягом двох тисячоліть були головним підручником геометрії, а п'ять постулатів визначили саму природу простору, в якому ми живемо. Евклід показав, як із простих очевидних істин можна вибудувати величну споруду дедуктивної науки.

Архімед Сіракузький – геній, який поєднав теоретичну математику з практичним застосуванням. Його метод вичерпування передбачив інтегральне числення на вісімнадцять століть раніше Ньютона, а закони механіки та гідростатики й досі носять його ім'я. Архімед продемонстрував силу математичного аналізу, здатного зважити світ і обчислити нескінченність.

Мета цього навчального посібника – не лише познайомити читача з біографіями видатних математиків та їхніми відкриттями, але й показати красу математичного мислення, логіку математичних доведень, зв'язок абстрактних ідей із реальним світом. Кожен розділ містить теоретичний матеріал, історичні відомості, детальні пояснення математичних концепцій, а також систему завдань для самостійної роботи та питань для самоперевірки.

Посібник структуровано таким чином, щоб студенти могли не лише засвоїти математичні факти, але й навчитися самостійно застосовувати набуті знання, розв'язувати задачі різного рівня складності, бачити зв'язки між різними розділами математики. Особлива увага приділена історичному контексту – розумінню того, як виникали математичні ідеї, які проблеми спонукали вчених до пошуку нових методів, як математичні відкриття впливали на розвиток цивілізації.

Теоретичні відомості викладені в достатньому обсязі, щоб забезпечити глибоке розуміння матеріалу без необхідності звертатися до додаткових джерел. Водночас, для тих, хто прагне поглибленого вивчення теми, наведені посилання на класичні праці та сучасні дослідження.

Завдання для самостійної роботи розроблені з урахуванням різних рівнів підготовки студентів – від базових обчислень до творчих проєктів та дослідницьких завдань. Питання для самоперевірки дозволяють оцінити ступінь засвоєння матеріалу та виявити прогалини в розумінні.

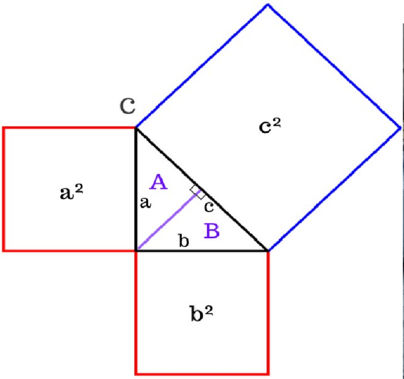
Цей посібник призначений для студентів спеціальності «Середня освіта (Математика)», але буде корисним усім, хто цікавиться історією математики, хто прагне зрозуміти, як народжувалися ідеї, що змінили світ, хто хоче навчитися думати як математик – логічно, послідовно, творчо.

Математика Піфагора, Евкліда та Архімеда – це не музейні експонати, а живі інструменти пізнання. Теорема Піфагора використовується в навігації та будівництві, аксіоми Евкліда лежать в основі комп'ютерної графіки, а принципи Архімеда застосовуються в авіації та кораблебудуванні. Вивчаючи спадщину трьох титанів, ми не просто занурюємося в минуле – ми оволодіваємо інструментами для розуміння сучасності та створення майбутнього.

Бажаємо успіхів у подорожі світом давньогрецької математики!

Автор висловлює подяку всім, хто надихав на створення цього посібника, та сподівається, що він стане надійним провідником у захоплюючий світ математичного мислення.

Піфагор — архітектор числового порядку: гармонія сфер і математика прямокутних трикутників



Піфагорові штани рівні на всі боки:
сміх сміхом , а практичне доведення є!

***

Після того, як Піфагор став олімпійським чемпіоном із кулачного бою, його опоненти передумали вступати з ним у наукові дискусії.

— Та що цей качок може знати про математику! — казали вони.

1.1 Самоський мудрець

Піфагор із Самоса — одна з найдивовижніших постатей в історії не лише математики. Його картина гармонійного й керованого числами світу — сплав наукового й містичного світогляду — мала глибокий вплив на всю західну культуру. Піфагор був засновником політичної та релігійної секти (першої групи такого роду, про яку нам відомо), яка мала величезний вплив у різних регіонах Греції. Йому приписують одне з найважливіших відкриттів давнини: рівність суми квадратів катетів і квадрата гіпотенузи в прямокутному трикутнику. Цей справжній геометричний скарб не лише має численні практичні наслідки, але й знаменує, серед іншого, народження математики як незалежної точної дисципліни.

Жив самоський мудрець приблизно між 570 і 490 роками до н. е., і ми цілком можемо вважати достовірними деякі відомості про його життя. Існують достатні докази того, що він розпочав публічну діяльність у віці десь 40 років, коли йому довелося покинути Самос (острів в Егейському морі поблизу Малої Азії), щоб уникнути гніву правителя Полікрата. Близько 530 року до н. е. він оселився в грецькій колонії Кротон у Великій Греції (Великою Грецією називалося колонізоване греками узбережжя Південної Італії), де заснував релігійну секту й почав активну політичну діяльність, поширивши свій вплив на весь південь Апенін.

Рис. 1. Піфагор із високо піднятою рукою.

Деякі дослідники визнають його засновником таких дисциплін, як математика, астрономія, політологія й філософія. Йому приписують численні відкриття в найрізноманітніших галузях та вважають винахідником майже всіх наук, тож саме ім'я Піфагора стало символом науки й прогресу. Ми можемо знайти сліди його діяльності також у музиці, риториці, практиці ворожіння, медицині й релігії.

Піфагору приписують висловлювання «Усе є число». Властивості чисел, особливо в їхніх комбінаціях, вражали піфагорійців настільки, що зрештою вони більшу частину своєї наукової діяльності присвятили дослідженням аналогій між числами та речами. Формули на кшталт цієї:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \tag{1}$$

яка показує, що квадрат числа може бути представлений сумою послідовних непарних чисел, здавалися піфагорійцям виявом божественного провидіння.

1.2 Гномон

«Гномон» грецькою означає «вказівник». Таку назву мав вертикальний стовп, за тінню якого визначали висоту сонця. Разом зі своєю тінню такий стовп утворював подібність літери «L», але в грецькому алфавіті такої не було, зате була велика літера «гамма», яка виглядає точнісінько як наша «Г».

Візьмемо квадратну таблицю й заповнимо її одиницями, як на рисунку нижче ліворуч:

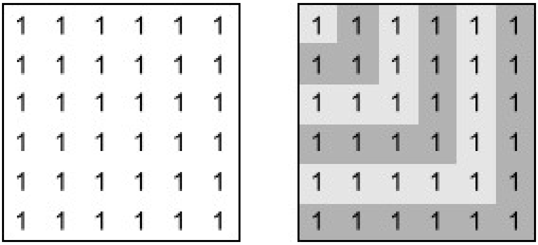


Рис. 2. Побудова гномона.

З одного боку, очевидно, що сума чисел у всій таблиці дорівнює квадрату її розмірності. З іншого боку, таблицю можна розбити на гномоноподібні фрагменти (рис. вище праворуч) і зробити суму чисел у них. Кожен такий фрагмент містить непарне число одиниць: 1, 3, 5, 7, ...

Відповідно, виходить формула, яка в сучасних алгебраїчних позначеннях записується як

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \tag{2}$$

Звісно, це частковий випадок арифметичної прогресії, але виведений цілком точно.

Ось ще один приклад. Візьмемо ту ж саму квадратну таблицю з одиниць і доповнимо її одним гномоном до розмірності, на одиницю більше за початкову:

Як видно, звідси випливає формула

$$(n + 1)^2 = n^2 + n + (n + 1) = n^2 + 2n + 1, \tag{3}$$

яка і сьогодні дуже корисна для усного рахунку.

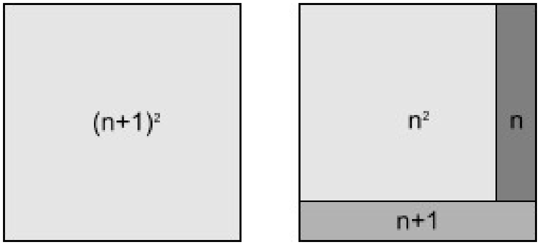


Рис. 3. Квадрат суми.

Ще одним застосуванням грецького «принципу гномона» є виведення формули для суми квадратів натуральних чисел.

Заповнимо квадратну таблицю за наступним принципом: усі рядки в ній будуть однаковими, а в кожному рядку зліва направо записані послідовно зростаючі натуральні числа (як на рисунку нижче).

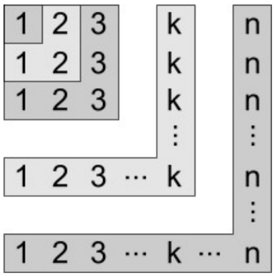


Рис. 4. Сума квадратів.

Сума чисел у одному рядку утворює арифметичну прогресію і може бути легко знайдена:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{4}$$

Відповідно, суму чисел у всій таблиці можна знайти, помноживши це число на кількість рядків. Вона дорівнює

$$\frac{n^2(n+1)}{2} \tag{5}$$

З іншого боку, цю суму можна знайти, підсумовуючи не по рядках, а по гномонах. Підсумовуючи числа в k-му гномоні (як на рисунку вище), отримуємо

$$[1 + 2 + \cdots + (k-1)] + [k + k + \cdots + k] \tag{6}$$

Перша квадратна дужка — це знову арифметична прогресія. Друга квадратна дужка містить рівно k доданків і спрощується очевидним чином. Усього, k-й гномон містить усередині себе

$$\frac{k(k-1)}{2} + k^2 = \frac{3}{2}k^2 - \frac{1}{2}k \tag{7}$$

Підсумовуючи це за k від 1 до n і прирівнюючи до загальної суми, отримуємо

$$\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2(n+1)}{2} \tag{8}$$

Другий доданок ліворуч знову утворює суму арифметичної прогресії (ту ж саму, що й сума чисел по рядку). Звідси вже легко виразити суму квадратів:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{9}$$

Цікава інтерпретація цієї формули греками. Тодішні математики сприймали її не так, як ми; у наших сучасних позначеннях це сприйняття можна виразити так:

$$1 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 1 + 3 \times 3 \times 1 + \cdots + n \times n \times 1 = n \times \frac{n+1}{2} \times \frac{2n+1}{3} \tag{10}$$

Кожен доданок ліворуч інтерпретується як об'єм квадратної плити з одиничною висотою й послідовно зростаючою довжиною сторони. Разом ці плити утворюють сходинчасту піраміду. На рисунку нижче справа показано об'єм еквівалентного прямокутного паралелепіпеда.

Існувало й інше доведення формули, через розрізання піраміди на фрагменти та складання їх у паралелепіпед. Але цей підхід значно складніший.

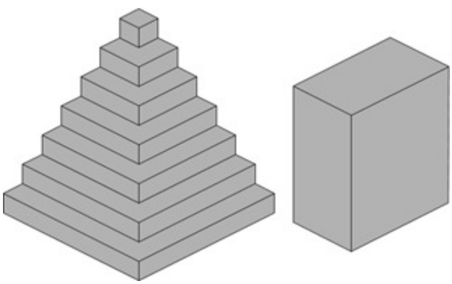


Рис. 5. Сходинчаста піраміда та еквівалентний їй паралелепіпед.

1.3 Дерево Піфагора

Називається воно так, бо кожна трійка попарно дотичних квадратів обмежує прямокутний трикутник і утворює картинку, якою часто ілюструють теорему Піфагора, «піфагорові штани рівні на всі боки».

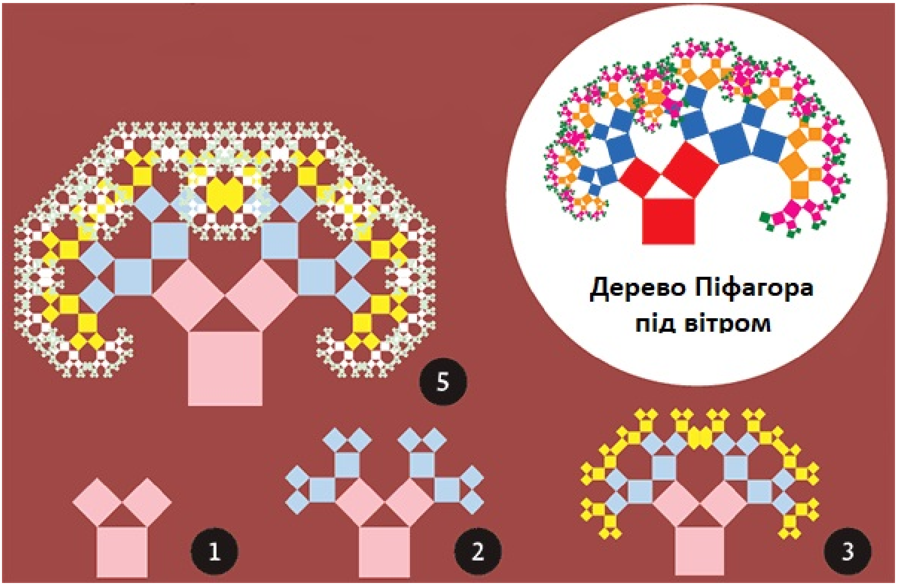


Рис. 6. Дерево Піфагора.

Добре видно, що розповсюдження дерева на площину обмежене. Якщо початковий квадрат одиничний, то дерево поміститься в прямокутник 6×4. Отже, його площа не перевищуватиме 24.

З іншого боку, квадратів щоразу стає в два рази більше, проте їхні лінійні розміри у $\sqrt{2}$ разів менші. Тому на кожному кроці додається площа, яка дорівнює площі початкової конфігурації, тобто 2. Тоді виходить площа дерева мала би бути нескінченною! Але насправді суперечності тут немає, бо досить швидко квадратики починають перекриватися, і площа зростає не так швидко.

Якщо змінювати кути при основі трикутника, то будуть утворюватися дещо інші форми дерева. А при куті 60° усі три квадрати виявляться рівними, а дерево перетвориться на періодичний візерунок на площині:

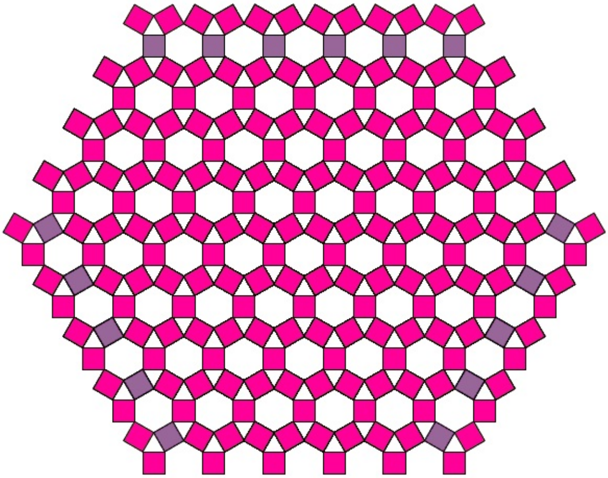


Рис. 7. Періодичний візерунок дерева Піфагора.

Можна навіть замінити квадрати на прямокутники. Тоді дерево буде більше схоже на справжні дерева. А за певної художньої обробки отримуються досить реалістичні зображення:

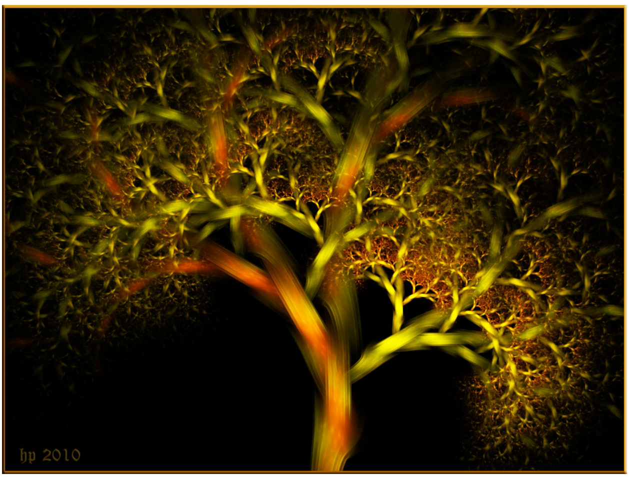


Рис. 8. Художня інтерпретація дерева Піфагора.

Відео (майже 8 хвилин): Греки, Піфагор і його теорема:
https://youtu.be/nhC7cikM8Yc

1.4 Віслючий міст

24.07.2025 був День теореми Піфагора. Він відзначається лише тоді, коли сума квадратів дати й місяця дорівнює квадрату року:

$$24^2 + 07^2 = 576 + 49 = 625 = 25^2 \tag{11}$$

Наступний такий день буде 24.10.2026 (перевірте самостійно).

Теорему Піфагора називали «віслючим мостом» у Середньовіччі через труднощі, з якими стикалися учні при її освоєнні. Ті, хто не розумів доказів і заучував теорему напам'ять, порівнювалися з віслюками — впертими й повільними. Сам процес доведення сприймався як міст, який потрібно подолати, і для деяких він був настільки складним, що став «віслючим», символізуючи труднощі переходу до розуміння геометричних ідей.

Задля справедливості необхідно згадати, що Піфагорові трійки були відомі ще до Піфагора, але його заслугою стало систематичне вивчення й доведення теореми, яка лягла в основу геометрії, а також поширення цієї ідеї у філософському та математичному контексті античного світу.

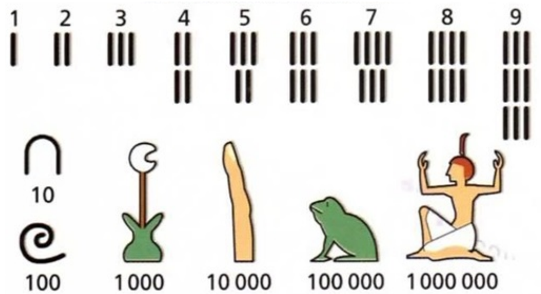


Рис. 9. Єгипетська система числення.

Пунктами призначення освітніх подорожей Піфагора були Єгипет і Вавилон — дві колиски математики, за думкою самих греків. Це не дивно, якщо згадати про залежність між рівнем розвитку сільського господарства, яке в цих регіонах досягло значної висоти, і необхідністю вимірювати землю та рахувати вироблені продукти.

Єгиптяни користувалися десятковою, але не позиційною системою числення: кожна зі степенів десяти, до 10^6, позначалася власним символом, числа складалися з послідовності символів відповідних розрядів.

Обчислення дробів обмежувалося операціями з дробами з чисельником 1.

Перші математики, які зацікавилися геометрією, розвивали тригонометричні знання задля їхнього використання в будівництві й землемірстві. Розділ земель на трикутники (триангуляція) завжди був головним методом вимірювання поверхонь, і розвиток топографії довів його ефективність.

Кожен трикутник можна розбити на два прямокутні трикутники, які дозволять визначити висоту або відстань до недосяжних об'єктів за допомогою вимірювання деяких сторін і кутів. Уважно розглянувши ці фігури та зіставивши їх із визначеннями синуса, косинуса й тангенса (як на рисунку нижче), можна помітити їхні дуже корисні властивості. Наприклад, $b = a \cdot \operatorname{tg} \beta$.

Рис. 10. Англійська гравюра початку XVII століття.

Тобто, обчисливши кут β, можна отримати значення a і, за допомогою тригонометричних таблиць, дізнатися довжину b. Це дозволяє реалізувати будь-які технічні вимірювання за допомогою лінійки та теодоліта (інструмента для точного вимірювання кутів на місцевості), які точно визначають довжини й кути.

На мові сучасної алгебри відповідна задача описується наступною системою рівнянь:

$$x^2 + y^2 = 100,$$
$$y = \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{4}\right) x,$$

де потрібно виконати підстановку й обчислити квадратний корінь.

Це рішення типологічно близьке Піфагоровому, але більше свідчить про те, що єгиптянам були відомі методи розв'язання систем рівнянь — значний результат для Стародавнього Єгипту.

Що стосується Месопотамії, то збережені дані дозволяють розглянути її математику в генезисі. Там наука досягла високого рівня в галузі техніки обчислень, серед яких можна знайти справжні алгебраїчні задачі, як на рисунку нижче.

Рис. 11. Вавилонські глиняні таблички.

Відмінною рисою вавилонської математики було використання шістдесятеричної позиційної системи числення. Шістдесят цифр записувалися у вигляді різних комбінацій двох значків: вертикальний «стоячий клин» і «лежачий клин», які представляли одиниці й десятки. Кома не використовувалася, а дроби вважали відношенням цілих чисел.

Більш серйозною проблемою було те, що в позиційній системі числення місця, не зайняті цифрами, не були чітко позначені, оскільки не існувало символу для нуля. Пізніше, уже в персидський період, вавилонські математики ввели такий знак.

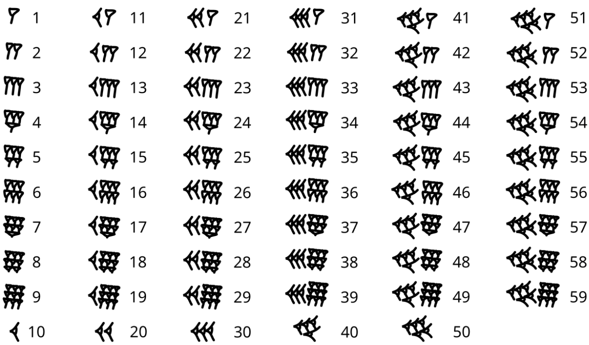


Рис. 12. Вавилонські цифри.

Задовго до того, як Піфагор сформулював загальний закон, що стосується всіх прямокутних трикутників, у Вавилоні епохи Хаммурапі — правителя, який помер приблизно в 1750 році до н. е., — уже знали, як обчислювати «Піфагорові трійки», тобто такі комбінації додатних чисел (a, b, c), при яких $a^2 + b^2 = c^2$.

Ось деякі приклади: (3, 4, 5), (5, 12, 13) і (8, 15, 17). Відповідно до теореми Піфагора, кожна з цих трійок представляє довжини сторін прямокутного трикутника.

На рисунку нижче представлена давньовавилонська глиняна табличка цієї епохи, Плімптон 322, де записані Піфагорові трійки.

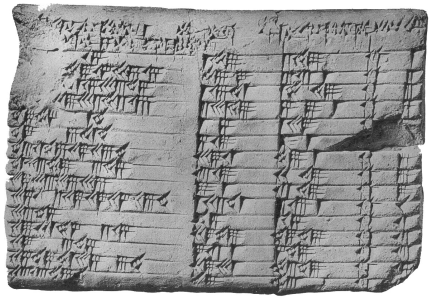


Рис. 13. Піфагорові трійки на глиняній табличці Плімптон 322.

Піфагор не залишив нащадкам жодного рядка, тож не існує жодного доказу теореми, авторство якого можна було би приписати йому. Її розв'язання подається в багатьох джерелах, аж до детального опису в найважливішій в історії геометрії та всієї математики книзі «Начала» Евкліда. Але в будь-якому разі, не варто зменшувати геніальность Піфагора та його послідовників, адже саме вони здійснили перехід від часткового до загального та сформулювали теорему, придатну для всіх окремих випадків.

Перше доведення теореми, яке традиція приписує Піфагору, було емпіричним. Доведення через рівнодоповнюваність спирається на використання чотирьох копій прямокутного трикутника з катетами a, b і гіпотенузою c, розташованих так, щоб утворювати квадрат зі стороною $a + b$ і внутрішній чотирикутник зі сторонами довжиною c. Внутрішній чотирикутник у цій конфігурації є квадратом, оскільки сума двох протилежних прямих гострих кутів — 90°, а розгорнутий кут — 180°. Площа зовнішнього квадрата дорівнює $(a+b)^2$, він складається з внутрішнього квадрата площею c^2 і чотирьох прямокутних трикутників, кожен із площею $\frac{ab}{2}$, у результаті з відношення $(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$ при алгебраїчному перетворенні випливає твердження теореми.

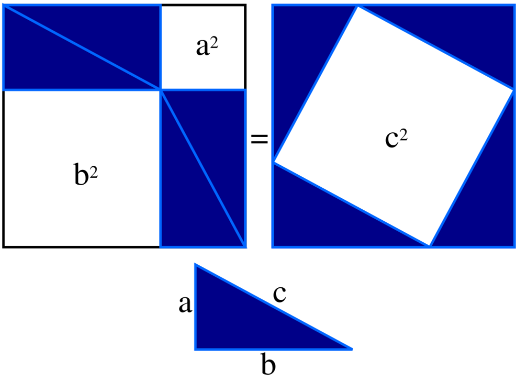


Рис. 14. Схема доведення через рівнодоповнюваність.

Класичне доведення Евкліда спрямоване на встановлення рівності площ між прямокутниками, утвореними поділом квадрата висотою з прямого кута над гіпотенузою та квадратів на катетах.

Основний напрямок доведення — встановлення конгруентності $\triangle ACK \cong \triangle ABD$, площа яких становить половину площі прямокутників $AHJK$ і $ACED$ відповідно.

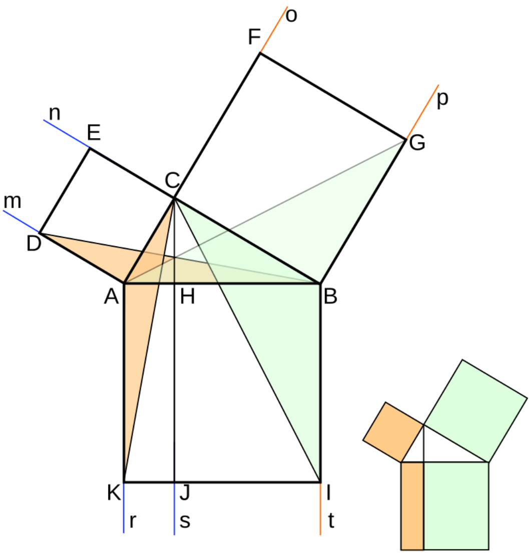


Рис. 15. Креслення до Евклідового доведення.

До методу площ належить також доведення, традиційно приписуване Леонардо да Вінчі. У цьому доведенні для трикутника $\triangle ABC$ з прямим кутом $\angle C$ і квадратами $ACED$, $BCFG$ і $ABHJ$, побудованими на сторонах трикутника, на стороні HJ останнього квадрата назовні будується трикутник, конгруентний $\triangle ABC$, причому відображений як відносно гіпотенузи, так і відносно висоти до неї (тобто $JI = BC$ і $HI = AC$). Пряма CI ділить квадрат, побудований на гіпотенузі, на дві рівні частини, оскільки трикутники $\triangle ABC$ і $\triangle JHI$ рівні за побудовою. Доведення встановлює конгруентність чотирикутників $CAJI$ і $DABG$, площа кожного з яких, виявляється, з одного боку, дорівнює сумі половин площ квадратів на катетах і площі початкового трикутника, з іншого — половині площі квадрата на гіпотенузі плюс площа початкового трикутника. Усього, половина суми площ квадратів над катетами дорівнює половині площі квадрата над гіпотенузою, що еквівалентно формулюванню теореми Піфагора.

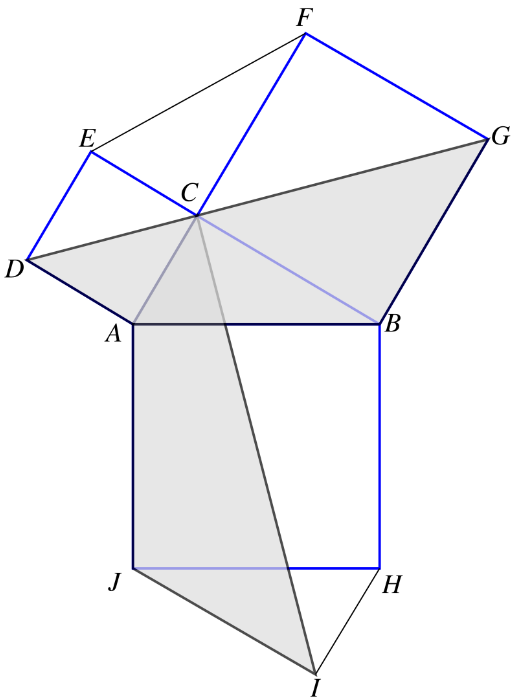


Рис. 16. Креслення до доведення Леонардо да Вінчі.

Відео (14 хвилин): Візуалізація всіх можливих піфагорових трійок:
https://www.youtube.com/watch?v=QJYmyhnaaek

Існує кілька доведень, які звертаються до техніки диференційних рівнянь. Зокрема, англійському математику Годфрі Гаролду Гарді приписують доведення, яке використовує нескінченно малі прирости катетів a і b та гіпотенузи c. Наприклад, приріст катета da при сталому катеті b призводить до приросту гіпотенузи dc, так що

$$\frac{da}{dc} = \frac{c}{a}.$$

Методом розділення змінних із них виводиться диференційне рівняння $c\,dc = a\,da$, інтегрування якого дає співвідношення $c^2 = a^2 + \text{const}$. Застосування початкових умов $a = 0$, $c = b$ визначає константу як b^2, що в результаті дає твердження теореми. Квадратична залежність у кінцевій формулі з'являється завдяки лінійній пропорційності між сторонами трикутника й приростами, тоді як сума пов'язана з незалежними внесками від приросту різних катетів.

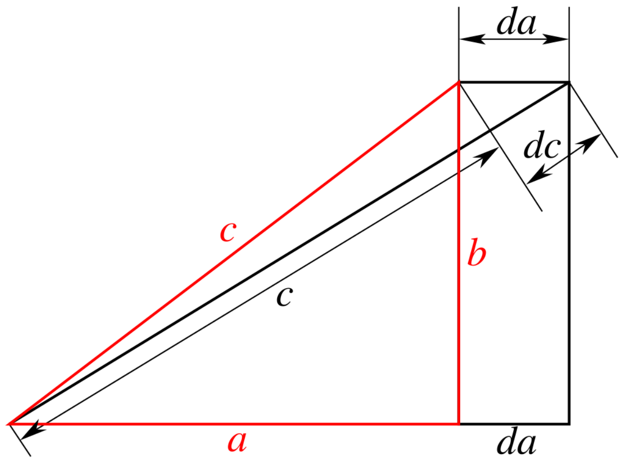


Рис. 17. Доведення методом нескінченно малих.

І, наостанок, теорема Піфагора — це частковий випадок більш загальної теореми косинусів, яка пов'язує довжини сторін у довільному трикутнику:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2,$$

де θ — кут між сторонами a і b. Якщо кут дорівнює $90°$, то $\cos\theta = 0$, і формула спрощується до звичайної теореми Піфагора.

1.5 Теорема Ейлера-Піфагора

Теорема Ейлера про чотирикутники (або закон Ейлера для чотирикутників) — це теорема планиметрії, яка описує співвідношення між сторонами опуклого чотирикутника та його діагоналями.

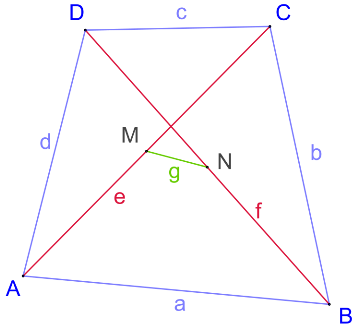


Рис. 18. Теорема Ейлера — Піфагора.

Теорема є узагальненням тотожності паралелограма, яке, в свою чергу, можна розглядати як узагальнення теореми Піфагора, тому іноді використовується назва теорема Ейлера-Піфагора.

Для опуклого чотирикутника зі сторонами a, b, c, d і діагоналями e і f, середини яких з'єднані відрізком g, виконується рівність:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4g^2$$

Якщо чотирикутник є паралелограмом, то середні точки діагоналей збігаються, і з'єднуючий їх відрізок g має довжину, рівну 0. Крім того, у паралелограма довжини паралельних сторін рівні, тож у цьому випадку теорема Ейлера зводиться до формули:

$$2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2,$$

яку називають тотожністю паралелограма.

Якщо чотирикутник є прямокутником, то рівність ще більше спрощується, оскільки тепер дві діагоналі рівні:

$$2a^2 + 2b^2 = 2e^2$$

Ділення на 2 дає теорему Ейлера — Піфагора:

$$a^2 + b^2 = e^2$$

Іншими словами: для прямокутника співвідношення сторін та діагоналей описується теоремою Піфагора.

1.6 Теорема де Гуа — узагальнення теореми Піфагора для n-вимірних просторів

Узагальненням теореми Піфагора для тривимірного евклідового простору є теорема де Гуа: якщо в одній вершині тетраедра сходяться три прямих кута, то квадрат площі грані, що лежить навпроти цієї вершини, дорівнює сумі квадратів площ інших трьох граней. Цей висновок може бути узагальнений і як «n-вимірна теорема Піфагора» для евклідових просторів вищих розмірностей.

Виріжемо з куба піраміду, відітнувши площиною одну з його вершин. Тоді для неї буде справедливе наступне співвідношення: квадрат площі грані піраміди, протилежної вершині куба, де сходяться три прямих кути, дорівнює сумі квадратів площ граней, прилеглих до цього кута (як на рисунку нижче).

$$S_{ABC}^2 = S_{ABD}^2 + S_{BDC}^2 + S_{ADC}^2.$$

Іншими словами, якщо ми замінимо плоский прямий кут тривимірним, відрізки — гранями, а трикутник — пірамідою, то теорема знову виявиться правильною, але не для довжин сторін, а для площ граней отриманої піраміди!

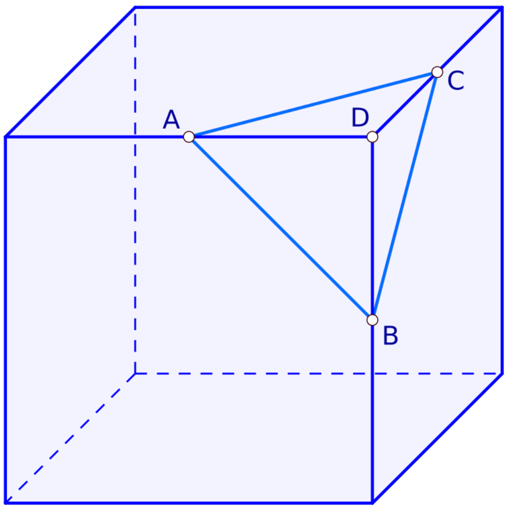


Рис. 19. Теорема де Гуа.

1.7 Сферична теорема Піфагора у еліптичній геометрії Рімана

Для будь-якого прямокутного трикутника на сфері радіусом R зі сторонами a, b, c співвідношення між сторонами (наприклад, якщо кут γ у трикутнику прямий, як на рисунку нижче) має вигляд

$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\cdot\cos\frac{b}{R}.$$

Ця рівність може бути виведена як частковий випадок сферичної теореми косинусів, яка справедлива для всіх сферичних трикутників:

$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\cdot\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{a}{R}\cdot\sin\frac{b}{R}\cdot\cos\gamma.$$

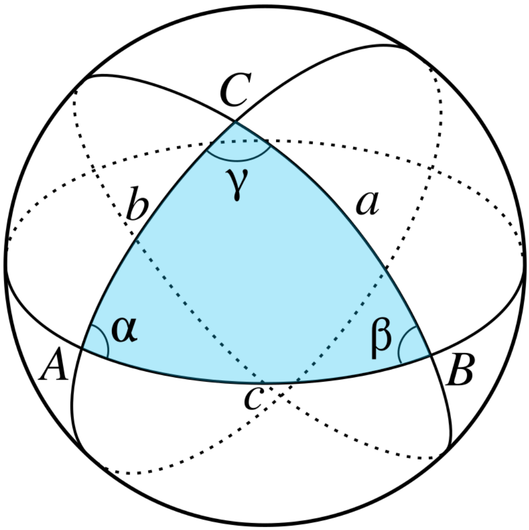


Рис. 20. Сферичний трикутник.

Застосувавши ряд Тейлора-Маклорена для функції косинуса ($\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$) можна показати, що якщо радіус R прямує до нескінченності, а аргументи $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$ і $\frac{c}{R}$ прямують до нуля, то сферичне співвідношення між сторонами в прямокутному трикутнику наближається до теореми Піфагора.

Детальне доведення:
https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_law_of_cosines

1.8 Теорема Піфагора в гіперболічній геометрії Лобачевського-Бойяї

У геометрії Лобачевського-Бойяї для прямокутного трикутника зі сторонами a, b та стороною c, протилежною прямому куту, співвідношення між ними буде наступним:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b,$$

де $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гіперболічний косинус.

Ця формула є частковим випадком гіперболічної теореми косинусів, яка справедлива для всіх трикутників:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b \cdot \cos \gamma,$$

де γ — прямий кут, вершина якого протилежна стороні c.

Знову використавши ряд Тейлора-Маклорена, тепер для гіперболічного косинуса ($\operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$) можна показати, що якщо гіперболічний трикутник зменшується (тобто, коли a, b і c прямують до нуля), то гіперболічні співвідношення в прямокутному трикутнику наближаються до співвідношення класичної теореми Піфагора.

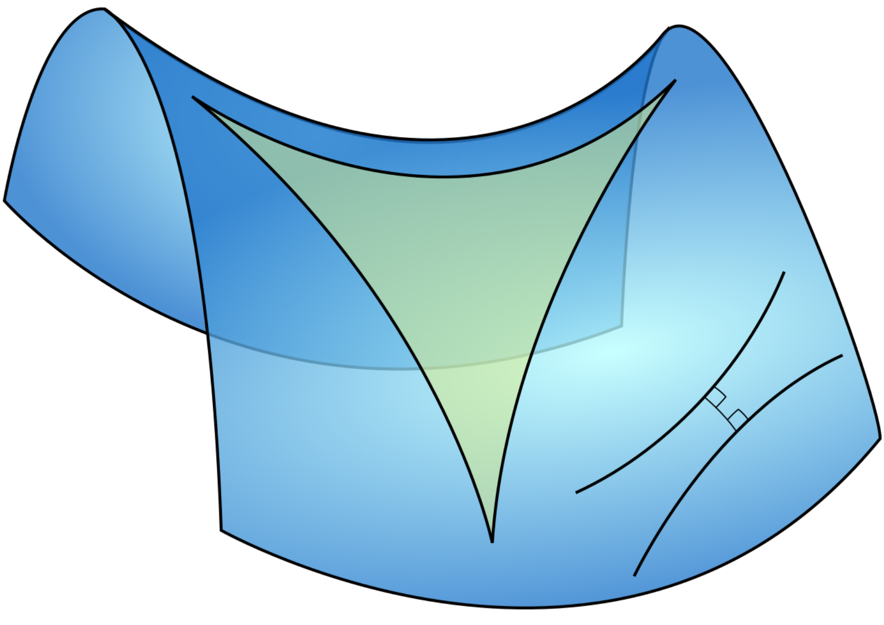


Рис. 21. Гіперболічний трикутник.

1.9 Спіраль Феодора-Ейнштейна-Піфагора

Спіраль Феодора — це засноване на теоремі Піфагора наближення до архімедової спіралі, що складається із суміжних прямокутних трикутників, які прилягають один до одного. Її названо на честь Феодора Киренського, давньогрецького вченого, відомого як учитель Платона, який жив у V столітті до н. е. на території Лівії.

Спіраль починається з рівнобедреного прямокутного трикутника, кожен катет якого має одиничну довжину. Потім додається ще один прямокутний трикутник, катет якого є гіпотенузою попереднього трикутника (з довжиною $\sqrt{2}$), а інший катет має довжину 1; довжина гіпотенузи другого трикутника $\sqrt{3}$. Потім процес повторюється; n-й трикутник у послідовності являє собою прямокутний трикутник із катетами $\sqrt{n}$ і 1 і з гіпотенузою $\sqrt{n+1}$. Наприклад, 16-й трикутник має сторони розміром 4 $(=\sqrt{16})$, 1 і гіпотенузою $\sqrt{17}$.

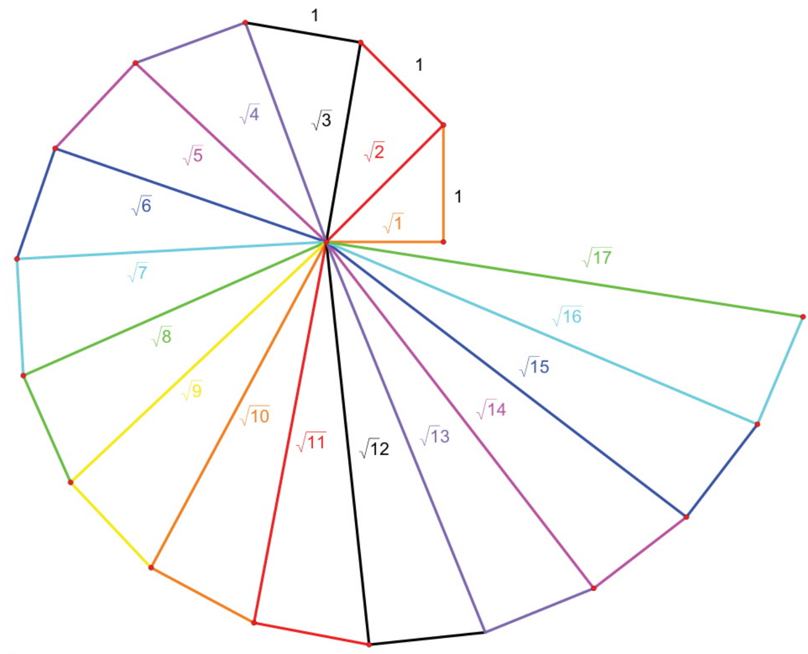


Рис. 22. Спіраль Феодора-Ейнштейна-Піфагора.

У 1958 році Еріх Тойфель довів, що жодні дві гіпотенузи трикутників, з яких будується спіраль, не лежатимуть на одному промені. Крім того, якщо сторони одиничної довжини продовжити до прямих, вони ніколи не пройдуть через жодну з інших вершин спіралі.

1.10 Гармонія сфер і чаша Піфагора

Музика сфер (або “гармонія сфер”) — це концепція в давньогрецькій філософії, розроблена Піфагором та його послідовниками, яка поєднує музику, математику та космологію. Піфагор вважав, що Всесвіт керується математичною гармонією. Він помітив, що музичні інтервали, такі як октава, квінта та кварта (йому також приписують їх математичне обґрунтування), базуються на простих числових співвідношеннях, відповідно 2 : 1, 3 : 2 та 4 : 3.

Ці співвідношення він виявив, експериментуючи з монохордом — інструментом з однією струною, де зміна її довжини створювала різні звуки. Піфагор припустив, що подібні пропорції регулюють рух небесних тіл.

За цією теорією, кожна планета, рухаючись своєю орбітою, “видає” звук, який залежить від її швидкості та відстані від центру Всесвіту. Ці звуки разом створюють гармонію, що відображає космічний порядок. Хоча ці звуки нечутні для людського вуха, за думкою Піфагора, вони символізували досконалість і гармонію Всесвіту, що базується на математичних законах.

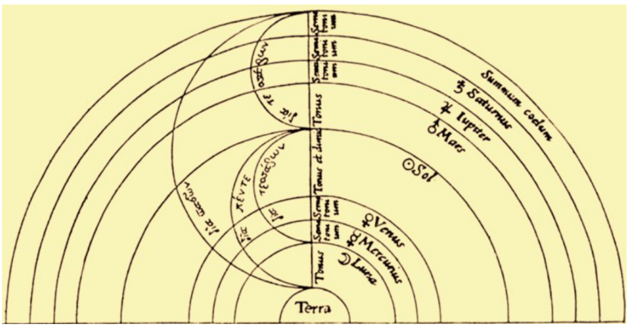


Рис. 23. Гармонія сфер Піфагора.

Чаша Піфагора, відома також як «Кубок справедливості», є легендарним винаходом, який приписують давньогрецькому філософу й математику Піфагору. Згідно з переказами, ця чаша мала унікальну конструкцію: якщо в неї наливати вино до певного рівня, нічого не відбувалось і нею можна було користуватись, але якщо перелити за межі позначки, весь вміст виливався через спеціальний отвір у дні, символізуючи справедливість і помірність, адже надмірність карається втратою.

Цей винахід не лише демонструє технічну кмітливість Піфагора, але й відображає його філософські ідеї про гармонію та рівновагу в житті.

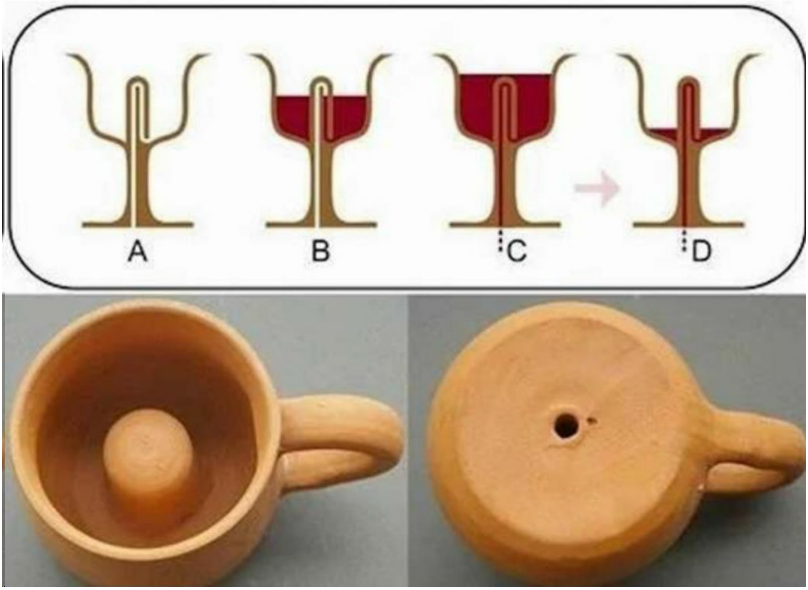


Рис. 24. Чаша Піфагора.

Та все ж таки, Самоський мудрець увійшов в історію та більше за все запам'ятався як творець теореми Піфагора, яка стверджує, що в прямокутному трикутнику сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Так це виглядає в сучасній інтерпретації, а на рис. нижче подане формулювання мовою оригіналу та латиною.

'Εν τοίς ὀρθογωνίοις τὸ ἀπὸ τῆς τήν ὀρθήν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστί τοῖς ἀπὸ τῶν τήν ὀρθήν γωνίαν περὶεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

The Latin reads: In rectangulis triangulis quadratum, quod a latere rectum angulum subtendente describitur, aequale est eis, quae a lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Рис. 25. Теорема Піфагора мовою оригіналу та латиною.

Завдання для самостійної роботи.

1. Застосуйте теорему Ейлера-Піфагора для знаходження відстані від центра кола, описаного навколо прямокутного трикутника, до центра вписаного кола, якщо катети трикутника дорівнюють 6 см і 8 см.

2. Побудуйте спіраль Феодора-Ейнштейна-Піфагора, використовуючи послідовність прямокутних трикутників з одним катетом, що дорівнює 1. Визначте кути повороту для перших п'яти трикутників.

3. Для правильного тетраедра з ребром a застосуйте теорему де Гуа та знайдіть площу основи через площі бічних граней.

4. Обчисліть сторони сферичного трикутника на одиничній сфері, якщо два катети дорівнюють $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{\pi}{4}$. Використайте сферичну теорему Піфагора.

5. Порівняйте співвідношення між сторонами прямокутного трикутника в евклідовій, сферичній (Рімана) та гіперболічній (Лобачевського-Бойяї) геометріях. Який вигляд має теорема Піфагора в кожному з цих просторів?

6. Дослідіть, чи є трикутник зі сторонами 5, 12 і 13 прямокутним. Знайдіть його площу та радіуси вписаного і описаного кіл.

7. Поясніть принцип дії чаші Піфагора з точки зору фізики та гідростатики. Яку максимальну висоту рідини може утримати чаша?

Питання для самоперевірки.

1. Які основні внески Піфагора Самоського в розвиток математики? Чому його називають «архітектором числового порядку»?

2. Що таке гномон у геометричному розумінні? Як цей концепт використовується для доведення теореми Піфагора?

3. Опишіть алгоритм побудови дерева Піфагора. Які математичні властивості має ця фрактальна структура?

4. Чому теорему Піфагора часто називають «віслючим мостом» (Pons Asinorum)? Яке історичне значення має ця назва?

5. Сформулюйте теорему Ейлера-Піфагора. Який зв'язок вона встановлює між радіусами вписаного та описаного кіл прямокутного трикутника?

6. У чому полягає узагальнення теореми Піфагора для n-вимірних просторів (теорема де Гуа)? Наведіть приклад для тривимірного випадку.

7. Як формулюється сферична теорема Піфагора в еліптичній геометрії Рімана? Чим вона відрізняється від класичної теореми?

8. Опишіть форму теореми Піфагора в гіперболічній геометрії Бойяї-Лобачевського. Які гіперболічні функції використовуються в цій формулі?

9. Що представляє собою спіраль Феодора-Ейнштейна-Піфагора? Як вона пов'язана з послідовністю квадратних коренів натуральних чисел?

10. Поясніть концепцію «гармонії сфер» у філософії Піфагора. Як математичні співвідношення пов'язані з музикою та астрономією в піфагорійському вченні?

11. Які піфагорові трійки ви знаєте? Наведіть загальну формулу для генерації піфагорових трійок.

12. Як теорема Піфагора застосовується в сучасній науці та техніці? Наведіть приклади з різних галузей.

13. Які існують способи доведення теореми Піфагора? Назвіть принаймні три різні підходи.

14. Що означає термін «піфагорійська школа»? Які математичні та філософські ідеї розвивалися в цій школі?

Творчі завдання.

1. Створіть презентацію або плакат, що демонструє різні доведення теореми Піфагора (мінімум 5 способів).

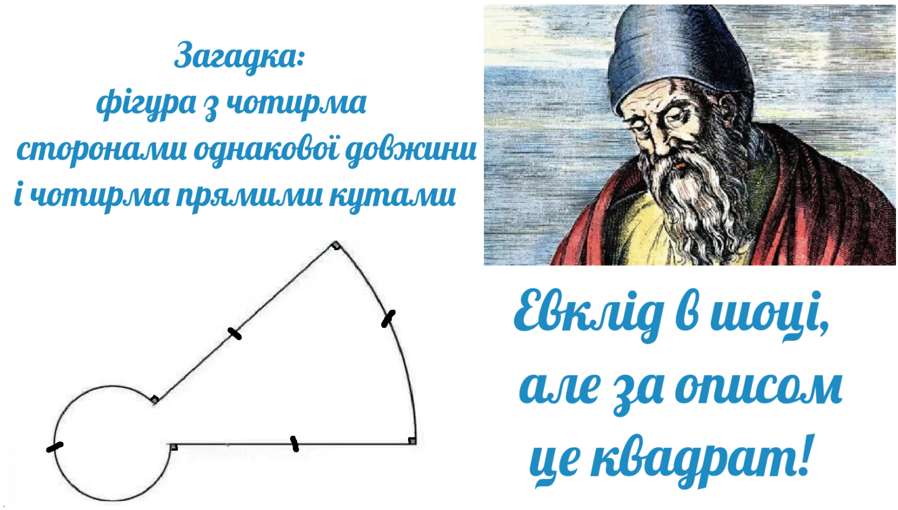
2. Дослідіть історію відкриття теореми Піфагора в різних культурах (Вавилон, Єгипет, Китай, Індія). Підготуйте порівняльний аналіз.

3. Напишіть есе на тему «Піфагор та музика математики: від гармонії сфер до сучасної акустики».

4. Створіть комп'ютерну модель дерева Піфагора або спіралі Феодора з можливістю інтерактивної зміни параметрів.

5. Розробіть серію задач практичного змісту, де застосовується теорема Піфагора (будівництво, навігація, дизайн тощо).

П’ять постулатів геометрії Всесвіту: «Начала» Евкліда Олександрійського та математика досконалості.



***

Одного разу вчитель запитав майбутнього великого грецького математика Евкліда:

— Що б ти вибрав: два цілих яблука чи чотири їхні половинки?

— Звісно, чотири половинки.

— А чому? — запитав учитель.

— Адже це одне й те саме.

— І зовсім не одне й те саме, — відповів майбутній математик.

— Вибравши два цілих яблука, як би я зміг дізнатися, червиві вони чи ні?..

2.1 Евклід Олександрійський, коніки та ірраціональність $\sqrt{2}$.

Евклід Олександрійський (325 — 265 рр. до н.е.) — автор одного з найпопулярніших творів в історії (після Біблії). Його головний твір «Начала» був перевиданий тисячі разів, протягом століть за ним осягали ази математики та геометрії цілі покоління вчених. Ця праця складається з 13 книг і містить найважливіші геометричні та арифметичні теорії Давньої Греції. Не менше значення, ніж зміст, має й вигляд, у якому Евклід представив наукове знання: з аксіом і визначень він вивів 465 теорем, побудувавши бездоганну логічну структуру, що залишалася непорушною аж до початку XIX століття, коли була створена неевклідова геометрія.

Про життя Евкліда відомо дуже мало, а тими нечисленними відомостями, якими ми володіємо, завдячуємо давньогрецькому філософу-неоплатоніку Проклу, який записав їх через шість століть після смерті математика. Прокл розповідає, що Евклід працював у Олександрії – місті, заснованому Олександром Македонським у 332 році до н.е., і що стало столицею імперії за правління єгипетського царя Птолемея I Сотера (Рятівника). Птолемей побудував знамениту Олександрійську бібліотеку, яку його син Птолемей II Філадельф розширив, заснувавши Мусейон. Прокл стверджує, що Евклід навчався в Академії Платона і був знайомий з творами Аристотеля. Переселившись до Олександрії, він заснував там школу й заклав основи математичної традиції, яку виклав у кількох творах, зокрема «Началах», написаних у зрілому віці.

Рис. 1. Евклід за роботою.

Евклідові приписують два знамениті висловлювання. На питання царя Птолемея I «Чи немає шляху коротшого, ніж той, про який ти пишеш у «Началах», щоб вивчити геометрію?» він дав різку відповідь: «У геометрії немає царських шляхів». Друге — його реакція на питання учня про те, яку користь принесе йому вивчення геометрії. Евклід наказав рабу: «Дай йому три оболи (мідна монета в Давній Греції), раз він хоче отримувати прибуток з навчання».

Цей великий грек оформив у «Началах» математичне вчення, що зародилося за три століття до цього і проіснувало багато століть після його смерті, що сталася близько 265 року до н. е. Таким чином, Евклід здійснив великий синтез трьох століть давньогрецької математики, яка, судячи з обсягу твору давнього мудреця, була дуже розвиненою дисципліною, особливо якщо врахувати, що в «Началах» не розглядалися багато питань, що вивчалися в Академії.

На рис. 2 нижче показані роботи Евкліда.

«Начала» (геометрія): книги I–XIII (написані Евклідом) і два апокрифи (книга XIV написана Гіпсиклом, книга XV — передбачувано Ісідором Мілетським)	
МАТЕМАТИКА (Початкова геометрія)	«Дані»
	«Про поділ фігур»
	«Псевдарія»
МАТЕМАТИКА (Вища геометрія)	«Поверхневі місця»
	«Поризми»
	«Конічні перетини»
АСТРОНОМІЯ	«Явища»
МУЗИКА (Введення в музику)	«Гармонічне введення» (Клеонід)
	«Ділення канона»
ФІЗИКА (МЕХАНІКА)	«Про легкість і вагу»
	«Про важіль»
ФІЗИКА (ОПТИКА)	«Оптика»
	«Катоптрика» (Теон Александрійський)

Рис. 2. Твори, що приписуються Евкліду.

Як видно, крім «Начал» Евклід написав багато інших праць. У сукупності ці книги представляють собою досить чітку програму вивчення математики, а також стосуються широкого ряду інших питань геометрії (перші три — початкового рівня, останні три — складніші), астрономії, музики, оптики та механіки.

У «Даних» містяться 94 положення (аксіоми), в яких аналізується, які властивості фігур можна вивести, якщо «відомі деякі з них»; цю книгу можна назвати початковим підручником з елементарної планіметрії.

У творі «Про поділ фігур» розглядається поділ заданої фігури однією або кількома прямими, «дотримуючись деяких умов», щоб площі утворених частин співвідносилися між собою певним чином.

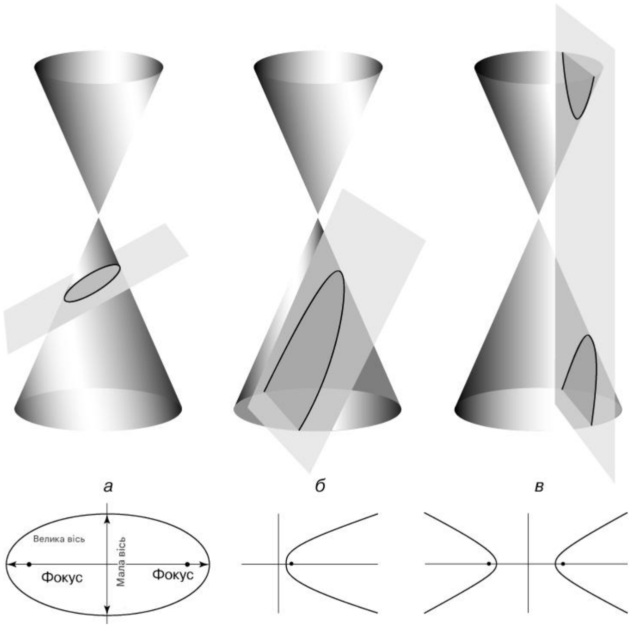


Рис. 3. Конічні перерізи - результат перетину конуса площиною.

Робота «Конічні перетини» була присвячена однойменним перерізам (або просто конікам), які є перетином конуса (подвійного) з площиною. Тип перерізу залежить від кута площини. На рис. 3 зображені різні конічні перетини залежно від співвідношення фокуса і директриси. Як видно з рис. 4, якщо площина паралельна осі конуса, ми отримуємо *гіперболу* (що складається з двох гілок), якщо площина паралельна твірній конуса, то *параболу*, а в інших випадках — *еліпс* (включаючи *коло* як окремий випадок).

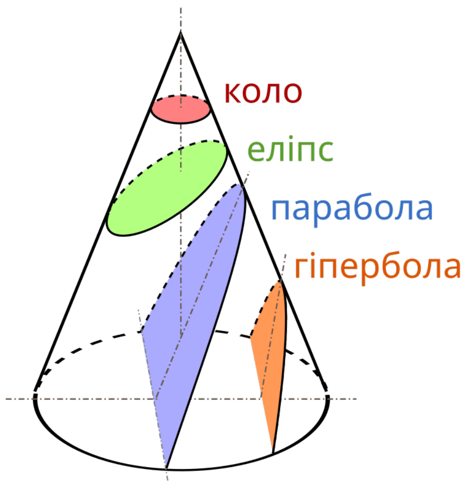


Рис. 4. Конічні перетини.

Ірраціональність $\sqrt{2}$.

Припустимо, що $\sqrt{2}$ — раціональне число. Тоді його можна представити у вигляді дробу:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

де p і q — цілі числа, що не мають спільних дільників (тобто дріб нескоротний), і $q \neq 0$.

Піднесемо обидві частини до квадрата:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2q^2.$$

Отже, p^2 — парне число, оскільки ділиться на 2. З цього випливає, що й p — парне (оскільки квадрат непарного числа — непарний). Нехай $p = 2k$, де k — ціле число.

Підставимо назад:

$$(2k)^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow$$

$$4k^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow$$

$$q^2 = 2k^2.$$

Отже, q^2 теж парне, а значить і q — парне.

Таким чином, і p, і q — парні, що суперечить припущенню, що дріб $\frac{p}{q}$ нескоротний.

Отже, наше припущення невірне, і $\sqrt{2}$ — ірраціональне число.

2.2 Геометрія «Начал».

Прийнято вважати, що Евклід написав 13 книг із загальною назвою «Начала». Вони викладені на койне (форма грецької мови) з використанням символів, що позначають геометричні поняття, зокрема точки, величини і числа. На рис. 5 нижче наведене зображення Ватиканського манускрипту «Начал».

Книга I вважається основною. У ній містяться 23 визначення, п'ять постулатів і п'ять загальних понять. Головна тема книги — теорія трикутників. Представлені основні техніки танграма для доказів і побудов з лінійкою та циркулем. Наприкінці книги — визначення прямокутних трикутників як таких, що підпадають під теорему Піфагора. Також у ній показані дедуктивні можливості методу доведення до абсурду.

Рис. 5. Ватиканський манускрипт «Начал».

На рис. 6 нижче можна побачити одну з редакцій 1-ї книги «Начал».

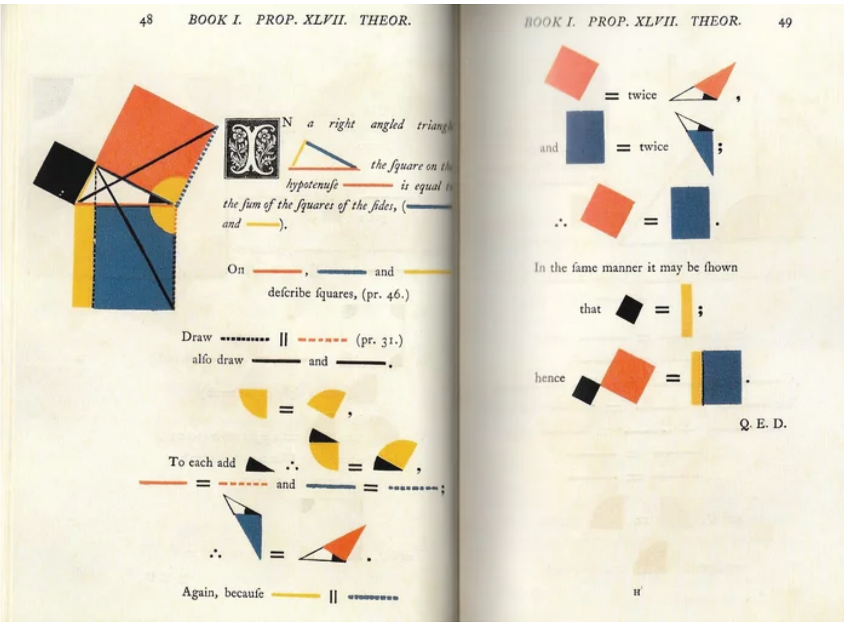


Рис. 6. Версія Книги 1.

Книга II містить геометричну алгебру, точніше, елементарні алгебраїчні перетворення виду:

$$(x \pm y)^2 = x^2 + y^2 \pm 2xy,$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

та їхні наслідки, але не містить жодного рівняння.

У ній розглядаються геометричні задачі, що розв'язуються за допомогою алгебраїчних перетворень з «Даних»; наприклад, побудова прямокутного трикутника за заданою гіпотенузою та висотою, проведеною з вершини прямого кута на гіпотенузу.

На рис. 7 нижче 2-га книга «Начал».

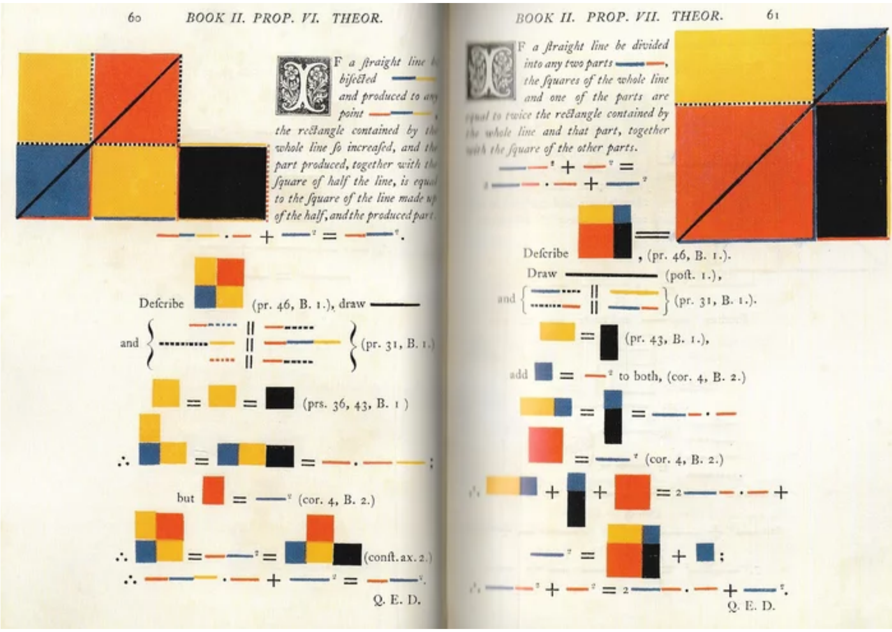
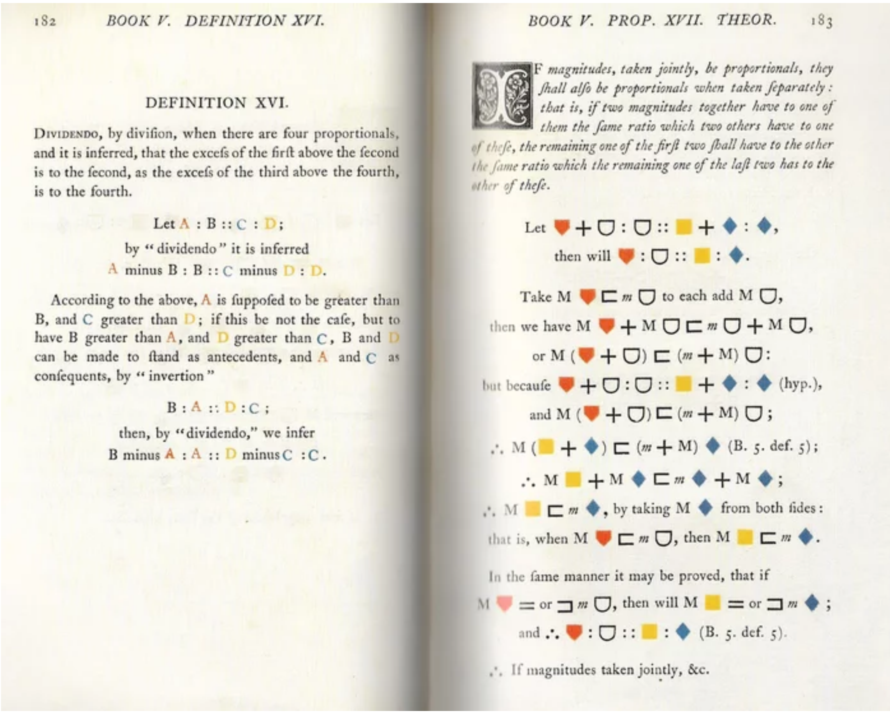


Рис. 7. Версія Книги 2.

Книга V має найважливіше значення для розуміння Евклідової геометрії, оскільки в ній вводиться теорія відношень і пропорцій, без якої неможливі докази багатьох теорем. Вона містить 18 визначень, одна з редакцій наведена на рис. 8 нижче.



182 BOOK V. DEFINITION XVI.

DEFINITION XVI.

Dividendo, by divifion, when there are four proportionals, and it is inferred, that the excefs of the firft above the fecond is to the fecond, as the excefs of the third above the fourth, is to the fourth.

Let A : B :: C : D;

by "dividendo" it is inferred

A minus B : B :: C minus D : D.

According to the above, A is fuppofed to be greater than B, and C greater than D; if this be not the cafe, but to have B greater than A, and D greater than C, B and D can be made to ftand as antecedents, and A and C as confequents, by "invertion"

B : A :: D : C ;

then, by "dividendo," we infer

B minus A : A :: D minus C : C.

BOOK V. PROP. XVII. THEOR. 183

If magnitudes, taken jointly, be proportionals, they fhall alfo be proportionals when taken feparately: that is, if two magnitudes together have to one of them the fame ratio which two others have to one of thefe, the remaining one of the firft two fhall have to the other the fame ratio which the remaining one of the laft two has to the other of thefe.

Let ♥ + ◡ : ◡ :: ■ + ◆ : ◆,

then will ♥ : ◡ :: ■ : ◆.

Take M ♥ ⊏ m ◡ to each add M ◡,

then we have M ♥ + M ◡ ⊏ m ◡ + M ◡,

or M (♥ + ◡) ⊏ (m + M) ◡:

but becaufe ♥ + ◡ : ◡ :: ■ + ◆ : ◆ (hyp.),

and M (♥ + ◡) ⊏ (m + M) ◡;

∴ M (■ + ◆) ⊏ (m + M) ◆ (B. 5. def. 5);

∴ M ■ + M ◆ ⊏ m ◆ + M ◆;

∴ M ■ ⊏ m ◆, by taking M ◆ from both fides:

that is, when M ♥ ⊏ m ◡, then M ■ ⊏ m ◆.

In the fame manner it may be proved, that if

M ♥ = or ⊐ m ◡, then will M ■ = or ⊐ m ◆;

and ∴ ♥ : ◡ :: ■ : ◆ (B. 5. def. 5).

∴ If magnitudes taken jointly, &c.

Рис. 8. Версія Книги 5.

Інформація про інші книги представлена у табл. 1.

Табл.1. Книги «Начал» Евкліда.

Книга II — Містить теореми так званої «геометричної алгебри». Спирається на книгу I.
Книга III — Містить положення про кола, їхні дотичні та хорди, центральні та вписані кути. Спирається на книгу I і положення 5, 6 книги II.
Книга IV — Містить положення про вписані та описані багатокутники, про побудову правильних багатокутників. Спирається на книги I, III і на положення 11 книги II.
Книга V — Загальна теорія відношень, розроблена Евдоксом Кнідським. Самостійна.

Книга VI — Вчення про подібність геометричних фігур. Ця книга завершує евклідову планіметрію. Спирається на книги I, V і на положення 27 і 31 книги III.

Книга VII — Теоретична арифметика. Натуральні числа, теорія подільності та пропорцій, нескінченність множини простих чисел, алгоритм Евкліда, досконалі числа. Самостійна.

Книга VIII — Продовження теоретичної арифметики. Спирається на визначення з книг V, VII.

Книга IX — Теоретична арифметика: геометрична прогресія, досконалі числа. Спирається на книги VII, VIII і на положення 3, 4 книги II.

Книга X — Класифікація неспівмірних величин. Найоб'ємніша книга «Начал». Спирається на книги V, VI; положення 44, 47 книги I; положення 31 книги III; положення 4, 11, 26 книги VII; положення 1, 24, 26 книги IX.

Книга XI — Основи стереометрії: теореми про прямі та площини, тілесні кути, об'єм паралелепіпеда і призми, рівність і подібність паралелепіпедів. Спирається на книги I, V, VI, положення 31 книги III і положення 1 книги IV.

Книга XII — Теореми про піраміди та конуси, метод вичерпування, теорема про об'єм конуса. Спирається на книги I, III, V, VI, XI; положення 6, 7 книги IV і положення 1 книги X.

Книга XIII — Побудова правильних многогранників; доказ існування п'яти правильних многогранників. Спирається на книги I, III, IV, V, VI, X, XI і на положення 4 книги II.

Деякі визначення «Начал» наведені на рис. 9 нижче.

1. Точка є те, що не має частин.
2. Лінія ж — довжина без ширини.
3. Кінці лінії — точки.
4. Пряма лінія є та, котра рівно розташована по відношенню до точок на ній.

Рис. 9. Деякі визначення Книги 1.

2.3 5 постулатів геометрії Всесвіту та дедукція.

Евклід заснував свою геометрію на кількох постулатах (припущеннях), які досі вважаються очевидними та логічними:

1. Пряму лінію можна провести з будь-якої точки в будь-яку іншу точку.
2. Скінченна пряма може бути продовжена на довільно велику відстань.
3. Можна намалювати коло з будь-якою точкою як центром і будь-якою довжиною як радіусом.
4. Усі прямі кути рівні між собою.
5. П'ятий постулат, або аксіома паралельності, стверджує: якщо при проведенні прямої, яка перетинає інші дві прямі, внутрішні кути з одного боку утворюють у сумі менше 180°, то ці дві прямі у своєму продовженні перетинаються на цьому боці площини. Графічне зображення цієї аксіоми наведене на рис. 10 нижче.

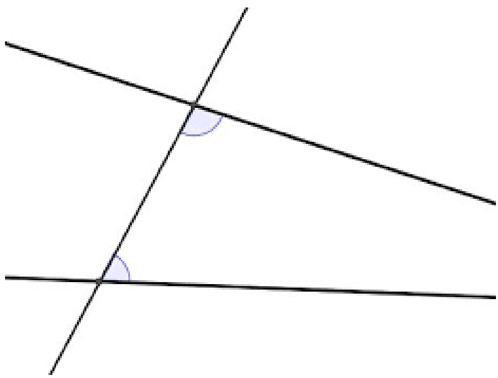


Рис. 10. Аксіома паралельності.

Математики довго сперечалися про самоочевидність цього постулату, а сумнів у ньому в XVIII-XIX століттях призвів до створення неевклідової геометрії та революційного перегляду основ геометрії як науки.

Переходячи до розгляду дедуктивного методу в «Началах», необхідно відзначити, що дедукція не передбачає факту існування об'єкта, що визначається, — його треба встановити. Для цього необхідно розв'язати задачу виду «чи існує такий предмет, як...». У роботі Евкліда для побудови геометричних об'єктів використовуються тільки циркуль і лінійка, інших інструментів не дається. Отже, єдині існуючі точки — ті, які виникають у місцях перетину прямих ліній і кіл.

Після того, як об'єкт побудовано і задачу розв'язано, потрібно переконатися, що він саме такий, як потрібно, тобто побудова відповідає характеристикам, даним у визначенні.

Для цього використовувалися теореми. Вони «встановлюють існування» як дане; вони говорять «ось об'єкт» і констатують, що між різними твердженнями є логічний зв'язок.

Для розв'язання задач необхідний аналіз, тобто знання деяких базових відомостей, які дозволяють побудувати об'єкт. Наприклад, якщо дана сторона AB, потрібно подумати, які інструменти знадобляться для побудови рівностороннього трикутника. Для цього можна уявити його вже побудованим і розглянути, що пов'язує всі його частини. У теоремах же головне — синтез від постулатів до необхідного результату. На рис. 11 нижче представлена пропозиція 1 першої книги.

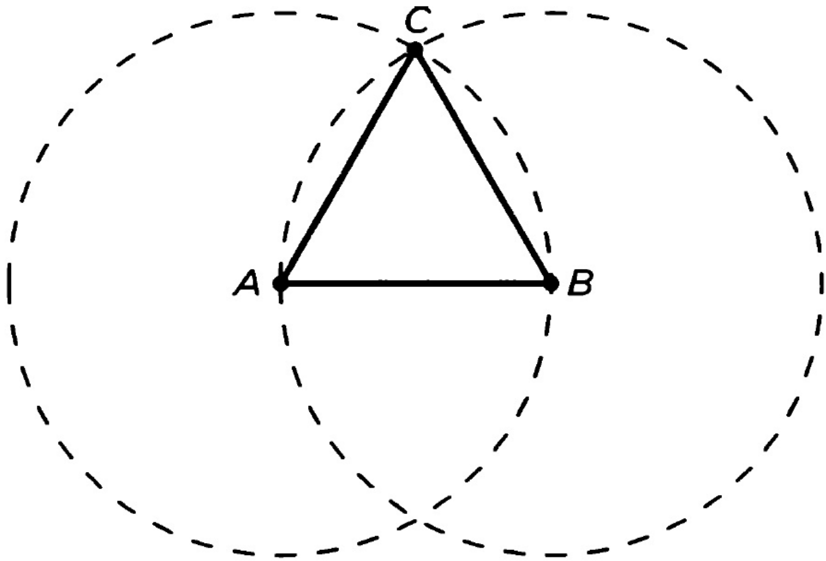


Рис. 11. Рівносторонній трикутник із заданою довжиною сторони.

2.4 Танграм, золотий переріз і піфагорійська зірка.

Одним із найважливіших досягнень китайської геометрії було винайдення танграма, що дозволяє складати різні фігури з однаковою площею. Давньогрецькі математики розвинули й узагальнили цю техніку, надавши їй величезного дедуктивного потенціалу. Зокрема, метод танграма дозволив Евклідові довести одну з основоположних теорем давньогрецької геометрії, знамениту теорему Піфагора, і розв'язати задачі тисячолітньої давнини, успадковані від месопотамських мислителів.

Танграм (сім дощечок майстерності) — це головоломка, як на рис. 12

нижче, яка складається з семи гральних танів — плоских геометричних фігур, що складаються в різні форми. Задача головоломки — створити задану форму (на основі тільки контуру силуету) з використанням усіх семи танів, які заборонено накладати один на одного.

Це одна з найпопулярніших головоломок такого типу у світі. Китайський психолог назвав танграм «найдавнішим психологічним тестом світу», хоча й створеним для розваги, а не для аналізу.

Згідно з легендою, одного разу монах дав своєму учневі завдання здійснити подорож для того, щоб намалювати сутність різноманітної краси світу тільки на одній керамічній дощечці. На жаль, дощечка розбилася на сім шматків, і учень ніяк не міг її знову зібрати в квадратну форму.

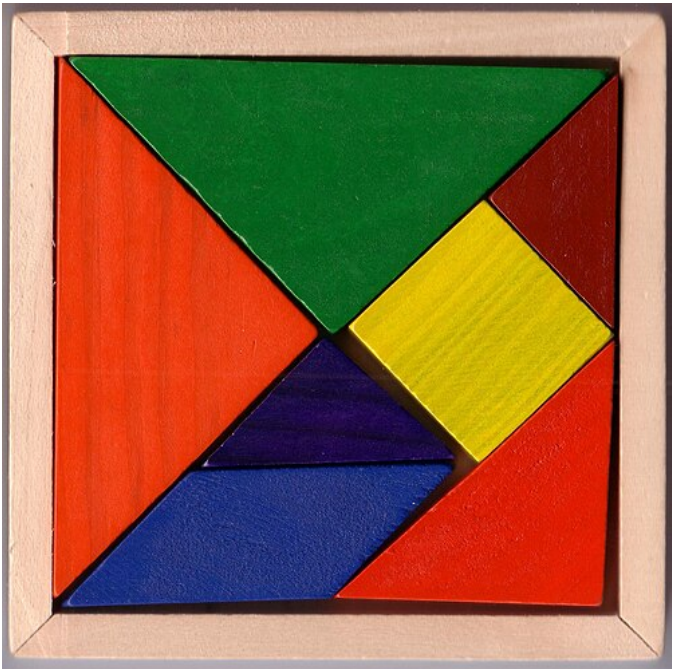


Рис. 12. Танграм.

Він намагався це зробити багато днів поспіль, намалював численні зразки та зображення. Зрештою, учень зрозумів: немає сенсу подорожувати світом, тому що легко можна знайти всю красу і різноманітність світу в семи шматках розбитої дощечки.

На рис. 13 а) нижче показаний приклад «Два ченці», б) – «Магічна чаша для гральних кубиків з Восьмої книги Тана» (1903). Кожна з цих чаш створена з одних і тих самих семи елементів, однак перша чаша – повна, а дві інші містять порожнечі різної форми (зверніть увагу, що чаша ліворуч коротша за дві інші; а та, що посередині, трохи ширша тієї, що праворуч).

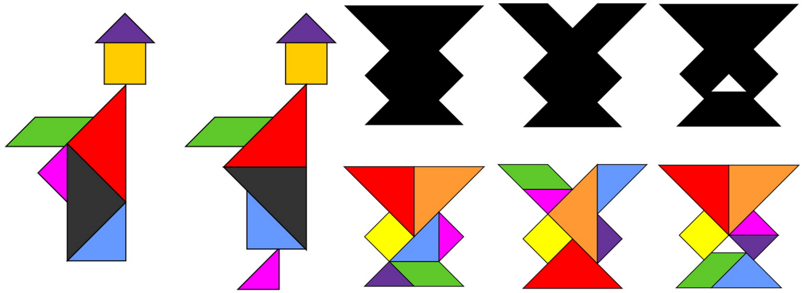


Рис. 13. Парадоксальні фігури танграма.

Якщо вибрати одиницю вимірювання таким чином, що сім елементів можуть бути зібрані в квадрат зі стороною одиниця і площею — квадратна одиниця, то сім елементів будуть наступними:

- 2 великих прямокутних трикутники (гіпотенуза 1, сторони $\frac{\sqrt{2}}{2}$, площа $\frac{1}{4}$);
- 1 середній прямокутний трикутник (гіпотенуза $\frac{\sqrt{2}}{2}$, сторони $\frac{1}{2}$, площа $\frac{1}{8}$);
- 2 маленьких прямокутних трикутники (гіпотенуза $\frac{1}{2}$, сторони $\frac{\sqrt{2}}{4}$, площа $\frac{1}{16}$);
- 1 квадрат (сторони $\frac{\sqrt{2}}{4}$, площа $\frac{1}{8}$);
- 1 паралелограм (сторони: $\frac{1}{2}$ і $\frac{\sqrt{2}}{4}$, площа $\frac{1}{8}$).

Серед цих семи танів паралелограм є особливим, оскільки він не має осьової симетрії, а лише обертальну симетрію, і тому його дзеркальне зображення може бути отримане лише перевертанням цього елемента. Тому це єдиний тан, який при складанні певних фігур слід перевертати.

Тільки з текстів 19-го століття було створено понад 6500 задач для танграма, і поточне число постійно зростає. Однак відомо, що кількість фігур є скінченною.

Fu Traing Wang і Chuan-Chin Hsiung у 1942 році довели, що існує лише 13 опуклих конфігурацій танграма (тобто таких, у яких відрізок, проведений між будь-якими двома точками фігур конфігурації, повністю проходить через тіло конфігурації), як на рис. 14 нижче.

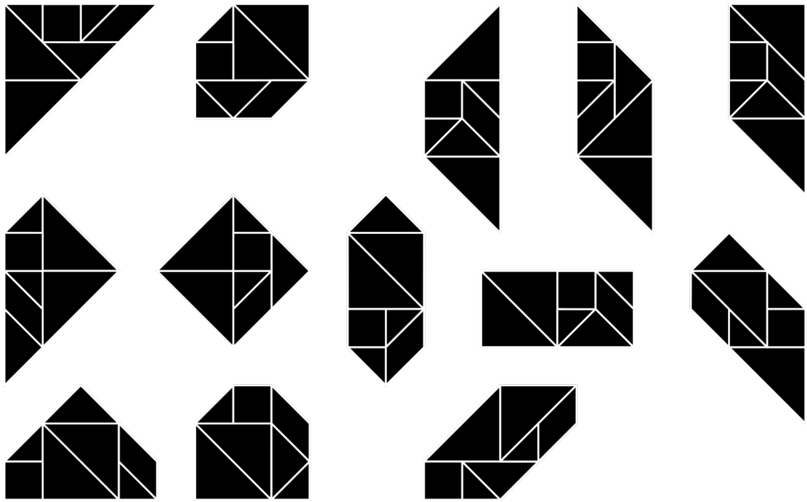


Рис. 14. 13 опуклих конфігурацій танграма.

Золотий переріз та піфагорійська зірка.

Золотий переріз (гармонічний поділ) — співвідношення частин і цілого, при якому відношення частин між собою і цілого до більшої частини рівні. Такі співвідношення спостерігаються в природі, відкриті в науці та дотримуються у творах мистецтва, що, на думку багатьох, надає їм особливої гармонії. Його також називають золотим поділом (коли мається на увазі певна найбільша частина), золотим числом, божественною пропорцією або, в термінології Евкліда, поділом у крайньому та середньому відношенні. Це співвідношення зазвичай позначається великою грецькою літерою Φ (фі) на честь давньогрецького скульптора й архітектора Фідія та відповідає значенню:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339874948948204586834365638117720309\ldots \qquad (1)$$

Це ірраціональне число, тобто число, яке, як і $\sqrt{2}$ не може бути представлене у вигляді раціонального дробу (з цілим чисельником та знаменником). На «золотих відрізках» базуються різні системи та способи пропорціювання в архітектурі, їх співвідношення є універсальним.

Звідси назва, яка вперше з'явилася в епоху Відродження, зокрема в трактаті францисканського ченця, математика Луки Пачолі *«Божественна пропорція»* (лат. *De Divina Proportione*, 1509 р.), але закономірність подібних відношень була відома набагато раніше: у Стародавній

Месопотамії, Єгипті та античній Греції. Історично в давньогрецькій математиці золотим перерізом називався поділ відрізка точкою на дві частини так, що *більша частина відноситься до меншої, як весь відрізок до більшої* (як на рис. 15 нижче):

$$\frac{A}{B} = \frac{A+B}{A} \tag{2}$$

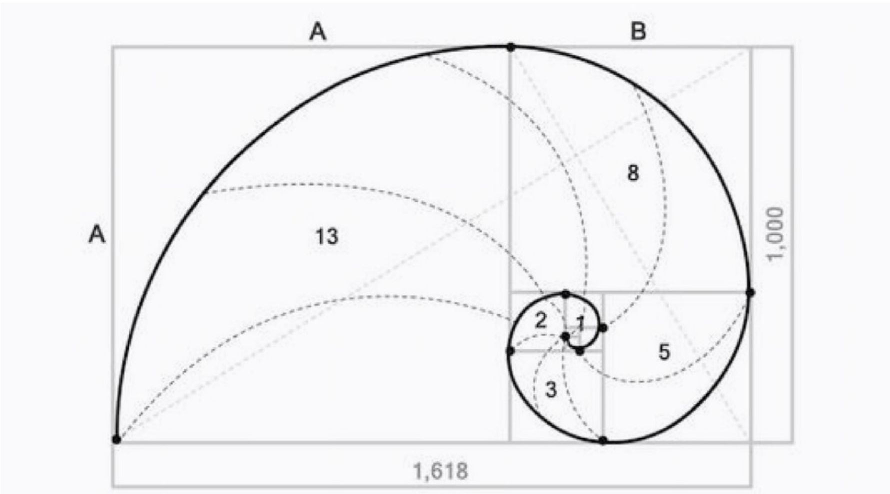


Рис. 15. Золотий переріз.

Це поняття було поширене не тільки на відрізки, але й на довільні величини.

З вихідної рівності (наприклад, приймаючи $A + B$ за 1, A за x і B за невідому змінну y, і розв'язуючи отриману систему рівнянь $x + y = 1$; $\frac{x}{y} = \frac{1}{x}$) виходить квадратне рівняння:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \tag{3}$$

А після його розв'язання два корені:

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \tag{4}$$

$$-\Phi = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \tag{5}$$

Φ можна представити у вигляді нескінченного ланцюжка квадратних коренів:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}} \tag{6}$$

Φ також представляється у вигляді нескінченного ланцюгового дробу:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \tag{7}$$

Підхідними дробами слугують відношення послідовних чисел Фібоначчі $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ або $\frac{F_n}{F_{n-1}}$.

Таким чином,

$$\Phi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} \tag{8}$$

де F_n — n-те число Фібоначчі.

Перші кілька підхідних дробів:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1 \tag{9}$$

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2 \tag{10}$$

$$\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \tag{11}$$

$$\frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} \approx 1{,}667 \tag{12}$$

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1{,}6 \tag{13}$$

$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1{,}625 \tag{14}$$

Евклід використовував золотий переріз для проміжного етапу побудови правильного п'ятикутника, зокрема, щоб отримати рівнобедрений трикутник, у якого кути при основі були б удвічі більші за кут при вершині. Цю дивовижну побудову можна пояснити, тільки припустивши, що у Евкліда вже був приклад такого п'ятикутника, причому ідеального, і що, аналізуючи цю фігуру, він прийшов до висновку про необхідність вищевказаного трикутника. Дійсно, при розгляді п'ятикутника видно, що дві діагоналі та одна його сторона утворюють рівнобедрений трикутник, кути в основі якого вдвічі більші за кут у вершині. Діагоналі EB і AD перетинаються в точці F, яка ділить їх у крайньому та середньому співвідношенні. Правильний п'ятикутник мав особливе значення для піфагорійської школи, символом якої, як кажуть, була п'ятикутна зірка, що утворюється шляхом проведення діагоналей усередині пентагона, як на рис. 16 нижче.

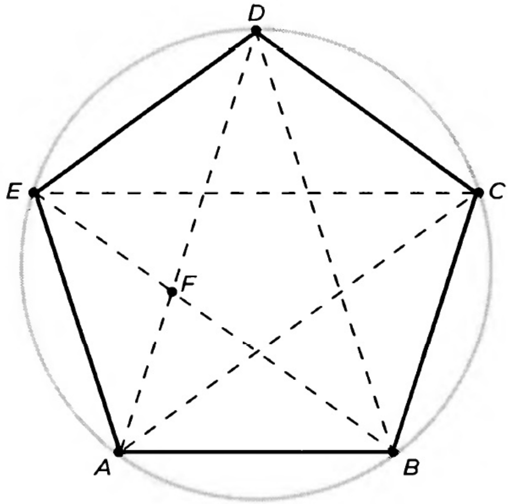


Рис. 16. Рівнобедрені трикутники та пентагон.

2.5 Поліедри (Платонові тіла) і Евклід.

Чи існують усі п'ять Платонових тіл? Побудувати перші три (тетраедр, гексаедр (куб) та октаедр) відносно легко, але у випадку з ікосаедром та додекаедром це значно складніше — саме тому Гіпсікл відвів значну частину книги XIV побудовам цих фігур. Евклід у пропозиціях з 13 по 17 книги XIII пояснює ці фігури і виводить їхні сторони відповідно до діаметра сфери, в яку вони вписані. Задача зводиться до того, щоб побудувати коло, що описане навколо однієї з граней багатогранника. Ця побудова є результатом аналізу, як і в прикладі з правильним п'ятикутником та піфагорійською зіркою. На рис. 17 нижче показано 5 Платонових тіл, існування яких і неможливість побудови інших доведені Евклідом.

Відео (2 хвилини 30 сек.): Александрійська бібліотека і Евклід:
https://youtu.be/dY6U-LlRoHc

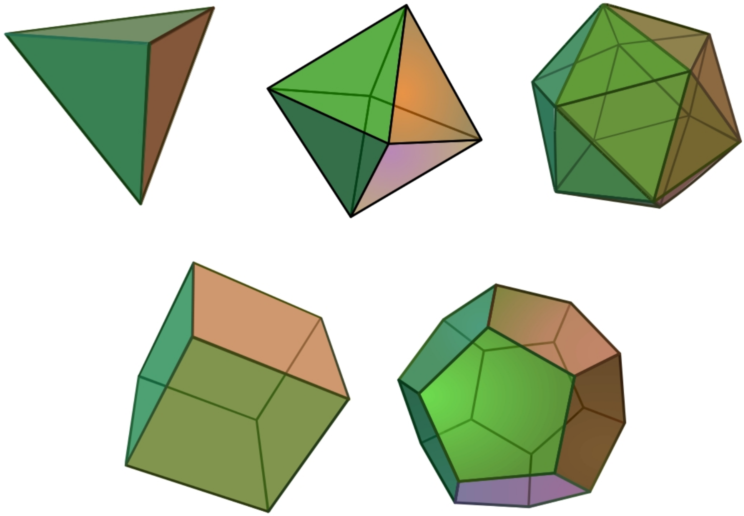


Рис. 17. Платонові тіла.

Найнезвичайнішу побудову одного з них запропонував Лука Пачолі у творі «Про божественну пропорцію».

Цей трактат відомий не тільки тим, що в ньому крайні та середні співвідношення отримали одну з найяскравіших назв, але й завдяки своєму науковому змісту, а також чудовим малюнкам поліедрів роботи самого Леонардо да Вінчі.

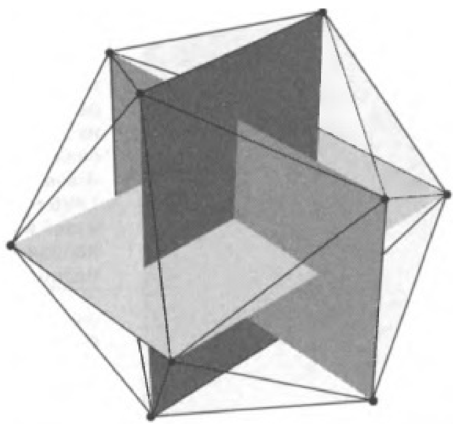


Рис. 18. Каркас ікосаедра з трьох «золотих» прямокутників.

У 1507 році Пачолі зробив точний переклад «Начал» латиною і доповнив їх побудовами. Як видно на рис. 18, він вставив один в одного три рівних золотих прямокутники перпендикулярно один до одного по середній паралелі. Потім йому залишалося тільки з'єднати найближчі одна до одної вершини. Далі, щоб побудувати додекаедр, італієць з'єднав центри граней ікосаедра, і готово!

На рис. нижче наведено 3-D побудову ікосаедра на основі золотих прямокутників, аналогічно до того, як це робив Пачолі: а) - побудова грані; в) - побудова п'яти граней при одній вершині; г) - результат. У цьому випадку отримуємо б) - поділ відрізка в пропорції золотого перерізу.

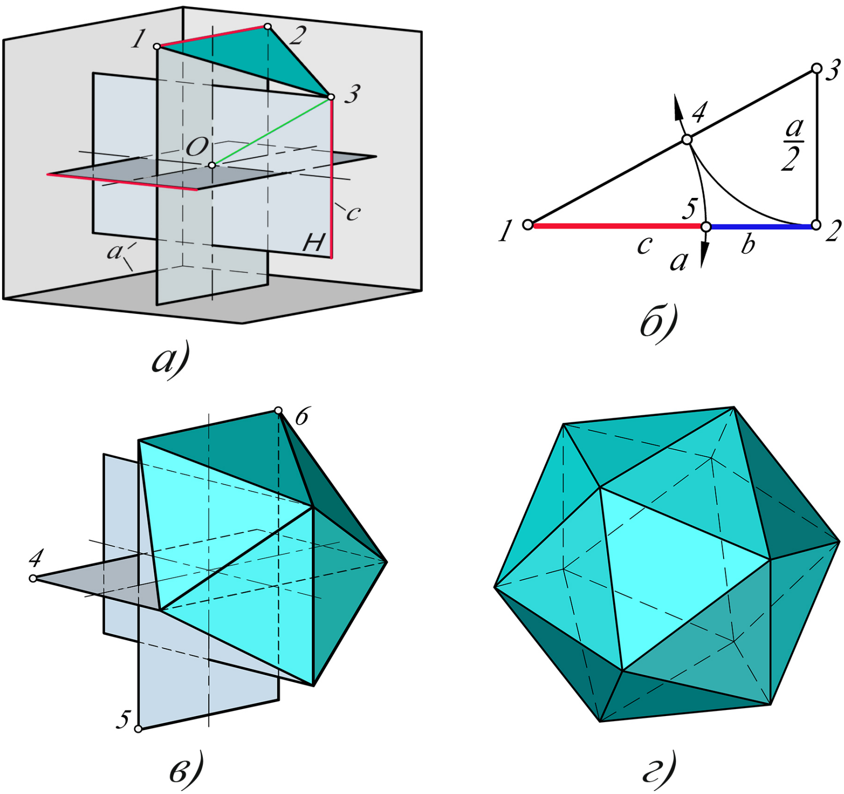


Рис. 19. Правильний ікосаедр на основі золотого перерізу.

Задля розширення світогляду, розглядаючи Платонівські тіла, згадаємо деякі цікаві здобутки відомих математиків, які також досліджували поліедри.

Ейлером у 1752 р. була виведена формула, що пов'язує число вершин (В), граней (Г) і ребер (Р) будь-якого опуклого багатогранника простим співвідношенням: В + Г = Р + 2.

Також правильний багатогранник може бути комбінаторно описаний символом Шлефлі (p, q), де: (p) — число ребер у кожній грані; (q) — число ребер, що сходяться в кожній вершині. Символи Шлефлі для правильних багатогранників наведено в табл. 2.

Табл. 2. Символи Шлефлі правильних багатогранників.

Багатогранник	Вершини	Ребра	Грані	Символ Шлефлі
тетраедр	4	6	4	$\{3,3\}$
гексаедр (куб)	8	12	6	$\{4,3\}$
октаедр	6	12	8	$\{3,4\}$
додекаедр	20	30	12	$\{5,3\}$
ікосаедр	12	30	20	$\{3,5\}$

У 1811 році французький математик Огюстен Коші встановив, що існує всього 4 правильних зірчастих тіла, які не є з'єднаннями Платонових і зірчастих тіл (у них грані перетинаються між собою). До 4 правильних зірчастих тіл належать описані в 1619 році Йоганном Кеплером малий зірчастий додекаедр та великий зірчастий додекаедр, а також великий додекаедр і великий ікосаедр, відкритий у 1809 році Луї Пуансо, як на рис. 20 нижче. Решта правильних зірчастих багатогранників є або з'єднаннями Платонових тіл, або з'єднаннями тіл Кеплера — Пуансо.

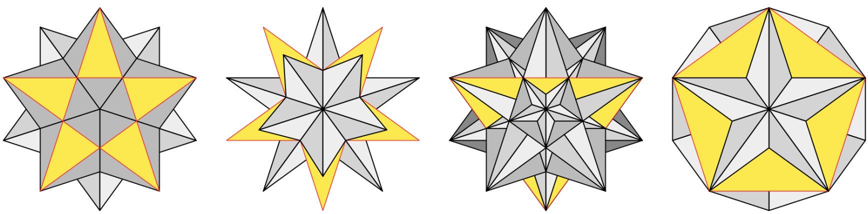


Рис. 20. Тіла Кеплера-Пуансо.

І, нарешті, у чотиривимірному просторі всього налічується 6 правильних багатогранників (політопів).

- **5-комірник (або симплекс, пентахорон):** Це найпростіший правильний 4D політоп, що складається з 5 вершин, 10 ребер, 10 граней (трикутників) і 5 об'ємних комірок (тетраедрів).

- **8-комірник (або тесеракт, 4-куб):** Це 4D аналог куба. Він має 16 вершин, 32 ребра, 24 грані (квадрата) і 8 комірок (кубів).

- **16-комірник (або гексадекахорон):** Він двійчастий до 8-комірника. Має 8 вершин, 24 ребра, 32 грані (трикутника) і 16 комірок (тетраедрів).

- **24-комірник (або ікоситетрахорон):** Це єдиний правильний 4D політоп, який не має аналогів серед платонових тіл у 3D. Він має 24 вершини, 96 ребер, 96 граней (трикутників) і 24 комірки (октаедри).

- **120-комірник (або гекатонікосахорон):** Це 4D аналог додекаедра. Він має 600 вершин, 1200 ребер, 720 граней (п'ятикутників) і 120 комірок (додекаедрів).

- **600-комірник (або гексакосихорон):** Він двійчастий до 120- комірника і є 4D аналогом ікосаедра. Має 120 вершин, 720 ребер, 1200 граней (трикутників) і 600 комірок (тетраедрів).

Ці фігури дуже складно візуалізувати в нашому тривимірному світі (рис. 21), але математично вони строго визначені та вивчаються в геометрії вищих вимірів.

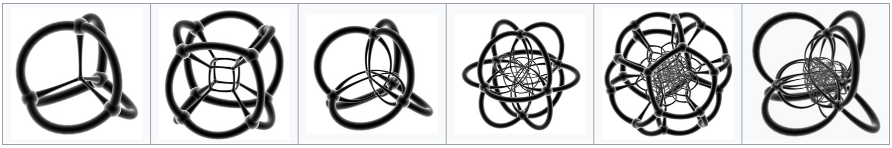


Рис. 21. Правильні багатогранники в 4-вимірному просторі.

2.6 Число пі, квадратура круга та парадокс піци.

Одним з головних досягнень піфагорійської школи було відкриття можливості побудувати квадратуру (квадрат, рівний за площею до будь-якої плоскої фігури з багатьма сторонами). Але чи є це справедливим для круга та інших фігур з однією або всіма сторонами, що є дугами або іншими кривими? Це питання займало не тільки математиків, але й мислителів, і з часом вираз «квадратура круга» став синонімом нерозв'язної задачі.

У другій половині XIX століття англієць Генрі Рінд придбав папірус, датований приблизно 1650 роком до н. е. і названий згодом його ім'ям. Цей папірус, у свою чергу, був копією ще давнішого папірусу, 1800 року до н. е., і містив задачі щодо визначення об'єму циліндричних ємностей для зберігання зерна. Його автор, писар Ахмес, хотів дізнатися площу кола, що лежить в основі циліндра, що привело його до визначення числа π. У давнину його зазвичай вважали рівним 3. Однак Ахмес запропонував точніше значення π, приблизно звівши коло до восьмикутника.

Дано квадрат, що складається з дев'яти одиниць по сторонах. Розділимо його на дев'ять квадратів так, що сторона середнього квадрата буде дорівнювати трьом цілим одиницям (рис. 22 нижче).

Від загальної площі віднімемо площу чотирьох прямокутних трикутників з вершинами, що утворюються при проведенні діагоналей кутніх квадратів. Площа отриманого восьмикутника буде дорівнювати

$$9^2 - 4 \times \frac{3 \times 3}{2} = 81 - 18 = 63$$

одиниці у квадраті. Побудуємо коло з діаметром, рівним 9 одиницям і площею, максимально наближеною до 63 одиниць у квадраті (для зручності розрахунку квадратного кореня беремо 64). Значення π при цьому приблизно буде дорівнювати

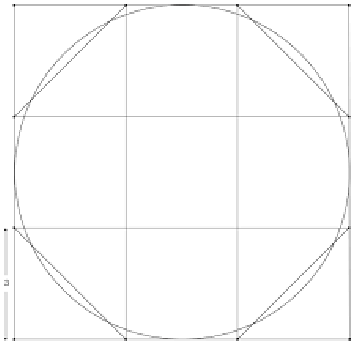


Рис. 22. Наближення Ахмеса для π.

$$\pi = \frac{64}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3{,}16\ldots$$

Розв'язання задачі квадратури круга «грецьким» способом, тобто за допомогою лінійки і циркуля, було недосяжним для геометрів протягом багатьох століть. У 414 році до н. е. афінський драматург Аристофан назвав свого персонажа, який хвалився тим, що побудував квадратуру кола, шарлатаном. Але труднощі не завадили багатьом видатним математикам робити спроби там, де зазнали поразки попередники. Микола Кузанський (1401–1464), Оронцій Фінеус (1494–1555) і П'єр де Сен-Бенсан (1584–1667) опублікували фантастичні методи отримання квадратури кола, які виявилися хибними. У той же час Джеймс Грегорі (1638–1675) і Йоганн Бернуллі (1667–1748) розробили різні способи, що дозволяють підійти до розв'язання цієї задачі з іншого боку. Німецький учений Йоганн Ламберт (1728–1777) першим довів, що число π є ірраціональним. Його співвітчизник Фердинанд фон Ліндеман у 1880 році відкрив, що π — ще й трансцендентне число, тобто не може бути коренем многочлена з раціональними коефіцієнтами. Це робило неможливою побудову квадратури круга за допомогою тільки лінійки і циркуля. Так довелося відмовитися від розв'язання тисячолітньої задачі, а мрії легіону шукачів квадратури круга, серед яких були англійський філософ Томас Гоббс і навіть Наполеон, пішли прахом.

Парадокс піци.

Загадка: спочатку квадрат, потім коло, а наприкінці трикутник, що це одним словом? (як ви знаєте по грі спочатку, піца). Тепер до математики.

Парадокс: Що вигідніше, 2 піци діаметром 30 або одна 45 см?

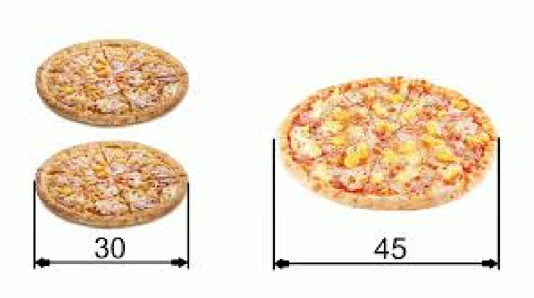


Рис. 23. Парадокс піци.

Розглянемо (рис. 23) кола діаметром $d = 30\,\text{см}$ і $d = 45\,\text{см}$. Площа кола обчислюється за формулою:

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Площа однієї піци діаметром 45 см

$$S_{45} = \pi \left(\frac{45}{2}\right)^2 = \pi \cdot 22{,}5^2 = \pi \cdot 506{,}25 \approx 1590{,}43\,\text{см}^2$$

Площа двох піц діаметром 30 см

$$S_{30} = \pi \left(\frac{30}{2}\right)^2 = \pi \cdot 15^2 = \pi \cdot 225 \approx 706{,}86\,\text{см}^2$$

$$2 \cdot S_{30} \approx 2 \cdot 706{,}86 = 1413{,}72\,\text{см}^2$$

У результаті:

$$S_{45} - 2 \cdot S_{30} \approx 1590{,}43 - 1413{,}72 = 176{,}71\,\text{см}^2$$

Таким чином, одна піца діаметром 45 см дає на 176,71 см^2 більше, ніж дві піци діаметром 30 см. Отже, математично одна велика піца вигідніша за дві менші, незважаючи на уявну «подвійну» порцію.

2.7 Нескінченність простих чисел і решето Ератосфена.

Нескінченність множини простих чисел Евклід довів таким чином:

Припустимо, що існує скінченна множина простих чисел, наприклад, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, де n — це скінченне число простих. Розглянемо число N, яке дорівнює добутку всіх цих простих чисел, збільшеному на одиницю:

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

Тепер розглянемо дільники числа N. Це число не може ділитися ні на одне з простих $p_1, p_2, \ldots, p_n$, оскільки при діленні на будь-яке з них залишається остача 1. Отже, N або є простим числом, або ділиться на якесь інше просте число, яке не входить до початкового набору $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Якщо N просте, то воно додає нове просте число до нашого набору. Якщо ж N складене, то серед його дільників повинно бути хоча б одне просте число, яке не збігається ні з одним із $p_1, p_2, \ldots, p_n$. У будь-якому разі, це суперечить припущенню про те, що множина простих чисел скінченна.

Таким чином, це припущення хибне, і, отже, простих чисел нескінченно багато.

Решето Ератосфена.

Решето Ератосфена — це алгоритм знаходження всіх простих чисел до деякого цілого числа n, який приписують давньогрецькому математику Ератосфену Кіренському. Назва алгоритму говорить про принцип його роботи: алгоритм здійснює фільтрацію списку чисел від 2 до n. У міру проходження списку складені числа виключаються, а прості залишаються.

Для знаходження всіх простих чисел не більше заданого числа n, слідуючи методу Ератосфена, потрібно виконати наступні кроки:

1. Виписати підряд усі цілі числа від двох до n (2, 3, 4, ..., n).
2. Нехай змінна p спочатку дорівнює двом — першому простому числу.
3. Закреслити в списку числа від 2р до n, рахуючи кроками по p (це будуть числа, кратні p: $2p$, $3p$, $4p$, ...).
4. Знайти перше незакреслене число в списку, більше ніж p, і присвоїти значенню змінної p це число.
5. Повторювати кроки 3 і 4, поки можливо.

Тепер усі незакреслені числа в списку — це всі прості числа від 2 до n. На практиці, алгоритм можна покращити наступним чином. На кроці № 3 числа можна закреслювати, починаючи відразу з числа p в квадраті, тому що всі менші числа, кратні p, обов'язково мають простий дільник менше p, і вони вже будуть закреслені до цього часу. І, відповідно, зупиняти алгоритм можна, коли p в квадраті стане більше, ніж n.

Приклад для $n = 30$

Запишемо натуральні числа, починаючи від 2 до 30 в ряд:
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Перше число в списку, 2 — просте. Пройдемо по ряду чисел, закреслюючи всі числа, кратні 2 (тобто кожне друге, починаючи з 4, тобто 2^2):
2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ 15 ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ 21 ~~22~~ 23 ~~24~~ 25 ~~26~~ 27 ~~28~~ 29 ~~30~~

Наступне незакреслене число, 3 — просте. Пройдемо по ряду чисел, закреслюючи всі числа, кратні 3 (тобто кожне третє, починаючи з 9, тобто 3^2):
2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ 25 ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~

Наступне незакреслене число, 5 — просте. Пройдемо по ряду чисел, закреслюючи всі числа, кратні 5 (тобто кожне п'яте, починаючи з 25, тобто 5^2):
2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~12~~ 11 ~~14~~ ~~15~~ 13 ~~16~~ ~~18~~ 17 ~~20~~ ~~21~~ 19 ~~22~~ ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ 23 ~~28~~ 29 ~~30~~

Наступне незакреслене число — 7. Його квадрат, 49, більший за 30, тому на цьому роботу завершено. Усі складені числа вже закреслені, залишилися тільки прості:

$$2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad 23 \quad 29$$

2.8 Алгоритм Евкліда.

Для знаходження найбільшого спільного дільника, а також для виведення його найважливіших властивостей застосовується алгоритм Евкліда. Він полягає у наступному. Нехай a і b — додатні цілі числа. Маємо послідовність рівностей:

$$\left.\begin{aligned}
&a = bq_1 + r_2, && 0 < r_2 < b,\\
&b = r_2q_2 + r_3, && 0 < r_3 < r_2,\\
&r_2 = r_3q_3 + r_4, && 0 < r_4 < r_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &&\\
&r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n, && 0 < r_n < r_{n-1},\\
&r_{n-1} = r_nq_n, &&
\end{aligned}\right\}$$

Послідовність закінчується тоді, коли отримаємо деякий залишок $r_{n+1} = 0$. Це неминуче, бо ряд $b, r_2, r_3, \dots$ як ряд спадних цілих не може містити більш ніж b додатних членів.

Дійсно, розглядаючи рівності (1), йдучи зверху вниз, переконуємось, що спільні дільники чисел a і b збігаються зі спільними дільниками чисел r_2 і r_3, чисел r_3 і r_4, $\dots$, чисел r_{n-1} і r_n, зрештою, зі спільними дільниками одного числа r_n. Одночасно маємо

$$\gcd(a,b) = \gcd(b,r_2) = \gcd(r_2,r_3) = \ldots = \gcd(r_{n-1},r_n) = r_n.$$

Отримуємо такі результати:

1. Сукупність спільних дільників чисел a і b збігається із сукупністю дільників їхнього найбільшого спільного дільника.

2. Цей найбільший спільний дільник дорівнює r_n, тобто останньому ненульовому залишку алгоритму Евкліда.

Наприклад, застосуємо алгоритм Евкліда для знаходження $\gcd(525, 231)$. Отримуємо (допоміжні обчислення зліва):

$$\begin{array}{rrll}
1) & 525 & |231 & \\
 & -462 & |2 & (231 \times 2 = 462) \\
\hline
 & 63 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrll}
2) & 231 & |63 & \\
 & -189 & |3 & (63 \times 3 = 189) \\
\hline
 & 42 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrll}
3) & 63 & |42 & \\
 & -42 & |1 & (42 \times 1 = 42) \\
\hline
 & 21 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrll}
4) & 42 & |21 & \\
 & -42 & |2 & (21 \times 2 = 42) \\
\hline
 & 0 & &
\end{array}$$

1) $525 = 231 \cdot 2 + 63$,

2) $231 = 63 \cdot 3 + 42$,

3) $63 = 42 \cdot 1 + 21$,

4) $42 = 21 \cdot 2$.

Останній додатній залишок дорівнює $r_4 = 21$. Отже, $\gcd(525, 231) = 21$.

2.9 Евклід і піфагорові трійки.

Евклід також розглянув задачу отримання піфагорових трійок — трьох натуральних чисел, що підтверджують теорему Піфагора, наприклад 3, 4, 5; 5, 12, 13 і так далі, тобто таких чисел a, b і c, для яких $a^2 + b^2 = c^2$.

Ймовірно, у Давньому Вавилоні знали метод знаходження піфагорових трійок, про що свідчить вавилонська табличка, яку називають Plimpton 322. У ній містяться трійки, записані у шістдесятковій системі.

(Про цю табличку та гномони ми згадували в статті, присвяченій Піфагору).

Цьому видатному давньогрецькому математику приписується авторство методу, який дозволяє отримати ці числа, ґрунтуючись на гномоні квадратних чисел. Квадратне число — це таке, яке можна подати у вигляді n^2. Для того щоб скласти піфагорову трійку, в якій катет і гіпотенуза — два послідовних числа, гномон теж має бути квадратом, тобто $2n+1 = k^2$, де k — непарне число. Отже,

$$n = \frac{k^2-1}{2},\ k \text{ непарне.}$$

Так можна отримати трійки $n = \frac{k^2-1}{2}$, k, $n+1 = \frac{k^2+1}{2}$, де k — непарне число, що утворює такі гномони (рис. 24).

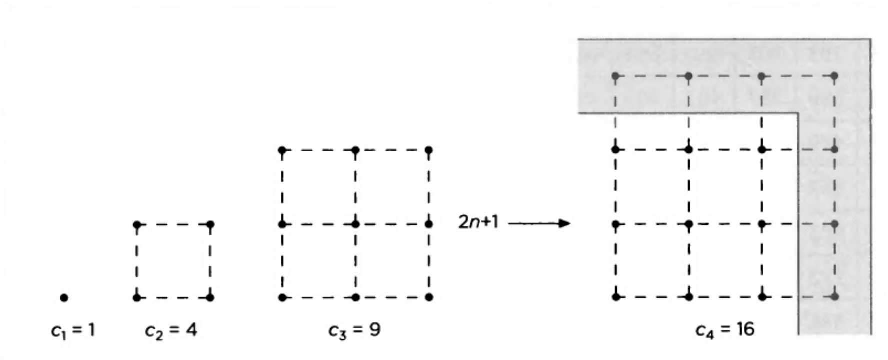


Рис. 24. Гномон непарного квадратного числа.

За допомогою таких підстановок можна отримати нескінченну кількість піфагорових трійок, як показано у табл. 3, але не всі: наприклад, тут бракує трійки 8, 15, 17, у якій різниця між катетом і гіпотенузою дорівнює двом одиницям.

Табл. 3. Піфагорові трійки для непарних чисел.

$a = k$, де k непарне	3	5	7	9	11	13	15	...
$b = n = \frac{k^2-1}{2}$	4	12	24	40	60	84	112	...
$c = n+1 = \frac{k^2+1}{2}$	5	13	25	41	61	85	113	...

Платону приписують узагальнення цього методу Піфагора. Він запропонував перейти від $(n-1)^2$ до $(n+1)^2$. Для цього треба скласти два гномони: $2n-1$, що дозволяє перейти від $(n-1)^2$ до n^2, і $2n+1$, що дозволяє перейти від n^2 до $(n+1)^2$. Усього треба додати $4n$. Тобто $(n-1)^2+4n=(n+1)^2$. Отже, n має бути квадратним числом: $n=k^2$. Так ми отримуємо трійки $k^2-1, 2k$ і k^2+1. При $k=4$ ми отримаємо вже згадану трійку 8, 15, 17. Це узагальнено у вигляді табл. 4 нижче.

Табл. 4. Піфагорові трійки за методом Платона.

k	2	3	4	5	6	7	8	...
$a=k^2-1$	3	8	15	24	35	48	63	...
$b=2k$	4	6	8	10	12	14	16	...
$c=k^2+1$	5	10	17	26	37	50	65	...

Наведені таблиці (табл. 3 та 4) різняться: у першій представлені взаємно прості трійки, тобто такі, які не мають спільного дільника; у другій трійки у стовпцях з непарним k можна поділити на 2, і ми отримаємо деякі значення першої таблиці. Можна сказати, що перша таблиця включена в другу. Але чи існує алгоритм, що дозволяє отримати всі можливі піфагорові трійки? Відповідь на це питання позитивна, і дає її сам Евклід у лемі 1 книги X:

Існують два квадратних числа, які разом утворюють ще один квадрат.

Евклід використав алгоритм

$$a=\lambda^2-\mu^2, \quad b=2\lambda\mu, \quad c=\lambda^2+\mu^2,$$

де λ і μ — взаємно прості числа, що мають різну парність. Ця умова необхідна для того, щоб трійки не повторювалися і всі їхні числа були простими, без спільних дільників. Дійсно, нас цікавлять тільки прості трійки, адже очевидно, що при будь-якому натуральному k натуральними будуть $3k$, $4k$, $5k$, бо 3, 4 і 5 — натуральні. Усе вищесказане справедливе для будь-якої піфагорової трійки a, b, c.

2.10 Коло стає квадратом.

Розглянемо рівняння кола в стандартній формі:

$$x^2+y^2=1 \tag{15}$$

Це рівняння описує коло радіусом 1 із центром на початку координат, як на рис. 25 нижче.

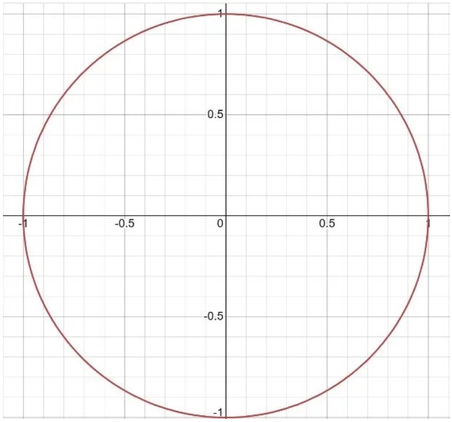


Рис. 25. Коло радіусом 1 із центром на початку координат.

Тепер почнемо зводити степені кожного члена до квадрату, і подивимося, як змінюється графік:

- Для степеня 4 (2 в квадраті за попереднім показником степеня):

$$x^4 + y^4 = 1 \tag{16}$$

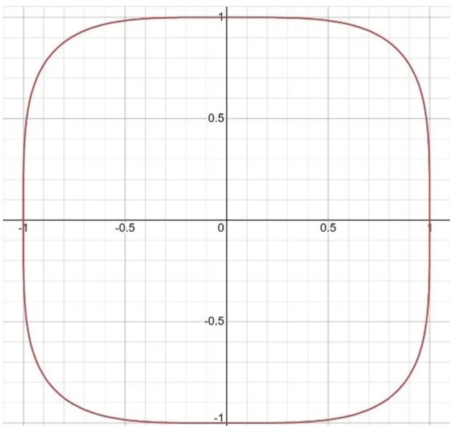


Рис. 26. Зміна кривизни для 4-го степеня.

- Для степеня 16 (4 в квадраті за попереднім показником степеня):

$$x^{16} + y^{16} = 1 \tag{17}$$

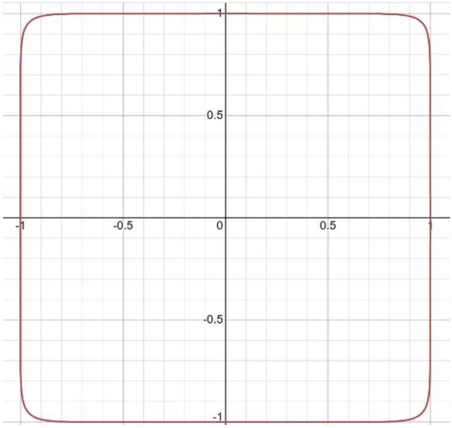


Рис. 27. Зміна кривизни для 16-го степеня.

- Для степеня 256 (16 у квадраті за попереднім показником степеня):

$$x^{256} + y^{256} = 1 \tag{18}$$

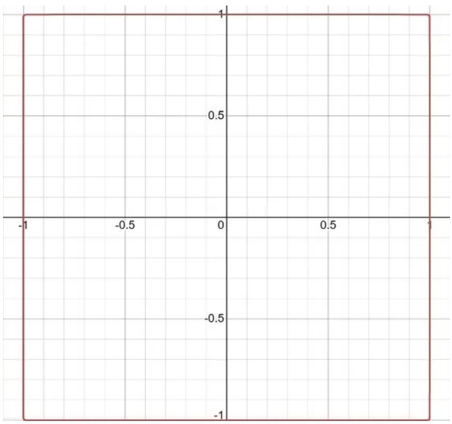


Рис. 28. Зміна кривизни для 256-го степеня.

Зі збільшенням степеня рівняння $x^{2n}+y^{2n} = 1$ описує фігуру, яка візуально наближається до квадрата. Це відбувається тому, що при великих n значення x^{2n} і y^{2n} стають значними тільки поблизу $|x| = 1$ і $|y| = 1$, що й формує кути, характерні для квадрата.

Завдання для самостійної роботи.

1. Доведіть ірраціональність числа $\sqrt{2}$, використовуючи метод від супротивного (доведення Евкліда). Поясніть, чому це відкриття стало кризою в піфагорійській математиці.
2. Побудуйте за допомогою циркуля та лінійки: а) рівносторонній трикутник; б) правильний шестикутник; в) бісектрису кута. Обґрунтуйте кожну побудову, спираючись на постулати Евкліда.
3. Сформулюйте п'ятий постулат Евкліда (про паралельні прямі) у трьох різних еквівалентних формах. Поясніть, чому саме цей постулат викликав найбільше дискусій серед математиків.
4. Використовуючи танграм, складіть: а) квадрат; б) трикутник; в) п'ятикутник. Обчисліть площі всіх семи елементів танграма, якщо площа повного квадрата дорівнює 64 см².
5. Знайдіть відношення золотого перерізу в п'ятикутній зірці (пентаграмі). Доведіть, що діагональ правильного п'ятикутника ділиться стороною у відношенні золотого перерізу.
6. Обчисліть для кожного з п'яти Платонових тіл (тетраедр, куб, октаедр, додекаедр, ікосаедр): а) кількість вершин, ребер і граней; б) перевірте формулу Ейлера $V - E + F = 2$.
7. За допомогою методу Архімеда (вписаних та описаних многокутників) оцініть значення числа π, використовуючи правильні шестикутники. Порівняйте результат зі справжнім значенням.
8. Застосуйте решето Ератосфена для знаходження всіх простих чисел від 1 до 200. Скільки простих чисел міститься в цьому діапазоні?
9. Використовуючи алгоритм Евкліда, знайдіть найбільший спільний дільник чисел: а) 1071 і 462; б) 2024 і 748. Запишіть послідовність кроків алгоритму.
10. За формулою Евкліда для піфагорових трійок ($a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, де $m > n$) знайдіть п'ять піфагорових трійок для різних значень m і n.
11. Побудуйте конічні перерізи (еліпс, парабола, гіпербола) як перерізи конуса площиною під різними кутами. Поясніть геометричні властивості кожної кривої.
12. Розв'яжіть задачу про квадратуру круга: чи можна за допомогою циркуля та лінійки побудувати квадрат, площа якого дорівнює площі даного круга? Обґрунтуйте відповідь.

13. Доведіть теорему про суму кутів трикутника, використовуючи п'ятий постулат Евкліда про паралельні прямі.
14. Побудуйте за допомогою золотого перерізу прямокутник з відношенням сторін $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Дослідіть його властивості при послідовному відрізанні квадратів.

Питання для самоперевірки.

1. Хто такий Евклід Олександрійський? Що відомо про його життя та наукову діяльність?
2. Що являє собою трактат «Начала» Евкліда? Скільки книг він містить і які розділи математики в ньому висвітлені?
3. Перелічіть п'ять постулатів Евкліда. У чому полягає їх фундаментальне значення для геометрії?
4. Що таке аксіоматичний метод? Як Евклід застосував дедуктивний підхід у «Началах»?
5. Чому п'ятий постулат (аксіома паралельності) викликав сумніви математиків протягом двох тисячоліть? До яких відкриттів це призвело?
6. Що таке конічні перерізи? Які криві (еліпс, парабола, гіпербола) отримуються при перерізі конуса площиною?
7. Як довести ірраціональність $\sqrt{2}$? Чому це відкриття було драматичним для піфагорійців?
8. Що таке танграм? Яка його історія та математичне значення? Скільки фігур можна скласти з семи елементів танграма?
9. Дайте визначення золотого перерізу. Де в природі та мистецтві зустрічається це відношення?
10. Що таке пентаграма (п'ятикутна зірка)? Як вона пов'язана з золотим перерізом та піфагорійською символікою?
11. Які п'ять Платонових тіл ви знаєте? Чому існує рівно п'ять правильних многогранників?
12. Сформулюйте теорему про нескінченність простих чисел. Як Евклід довів цю теорему?
13. Опишіть алгоритм Евкліда для знаходження найбільшого спільного дільника. Чому цей алгоритм вважається одним із найдавніших?

14. Що таке квадратура круга? Чому ця задача не може бути розв'язана за допомогою циркуля та лінійки?

15. Як пов'язане число π з площею та довжиною кола? Які методи наближення π використовували давні математики?

16. Що таке решето Ератосфена? Як за його допомогою знаходити прості числа?

17. Яка формула Евкліда для генерації піфагорових трійок? Чи всі піфагорові трійки можна отримати цією формулою?

18. Які побудови можливі за допомогою циркуля та лінійки? Які класичні задачі на побудову є нерозв'язними?

19. Як «Начала» Евкліда вплинули на розвиток математики та наукового методу в цілому?

Творчі завдання.

1. Створіть інтерактивну модель, що демонструє конструкцію всіх п'яти Платонових тіл та їх розгортки.

2. Підготуйте історичний огляд «Від Евкліда до Гільберта: еволюція аксіоматичного методу».

3. Розробіть набір головоломок на основі танграма різної складності для учнів молодших класів.

4. Створіть художній проєкт «Золотий переріз у природі та архітектурі» з фотографіями та математичними обчисленнями.

5. Напишіть програму, що реалізує алгоритм Евкліда та візуалізує послідовність кроків для заданої пари чисел.

6. Дослідіть використання Платонових тіл у філософії Платона (чотири стихії та Всесвіт). Підготуйте презентацію про зв'язок математики та філософії.

7. Знайдіть приклади використання золотого перерізу в сучасному дизайні (логотипи, веб-дизайн, типографіка). Дослідіть застосування конічних перерізів у фізиці (траєкторії планет, параболічні антени, гіперболічна навігація).

8. Проаналізуйте використання правильних многогранників у кристалографії та молекулярній хімії. Вивчіть застосування алгоритму Евкліда в криптографії та теорії кодування.

Архімедова сила уяви: як античний геній зважував світ і обчислював нескінченність.

Чим більше я гладшаю, тим дешевше приймати ванну!

© Архімед

***

Як казав Архімед по п’ятницях — дайте мені склянку віскаря, і я тут усе переверну!!!

3.1 Математична спадщина Архімеда Сіракузського.

Міжнародний математичний союз заснував визначну нагороду – медаль Філдса, яка раз на чотири роки вручається одному або кільком (до шести) математикам, які отримали вагомі здобутки у своїй науковій галузі. Ця нагорода становить найвищу почесть, якої може досягти математик, оскільки для цієї науки Нобелівської премії не передбачено. На медалі вибитий рядок римського поета Марка Манілія, який обрамляє рельєфний портрет Архімеда: *Transire suum pectus mundoque potiri*, що у перекладі звучить як «Перевершити людську природу і підкорити Всесвіт» (рис. 1).

Рис. 1. Профіль Архімеда на медалі Філдса.

Роботи Архімеда (287—212 рр. до н.е.) стосувалися майже всіх галузей математики того часу: йому належать дослідження з геометрії, арифметики, алгебри. Він знайшов усі напівправильні многогранники, які тепер носять його ім'я, значно розвинув вчення про конічні перерізи, дав геометричний спосіб розв'язання кубічних рівнянь виду $x^2(a \pm x) = b$, корені яких він знаходив за допомогою перетину параболи та гіперболи. Архімед також провів повне дослідження цих кривих, тобто знайшов, за яких умов вони матимуть дійсні додатні різні корені та за яких корені будуть співпадати (аналогічно як у моделі на рис. 2 нижче).

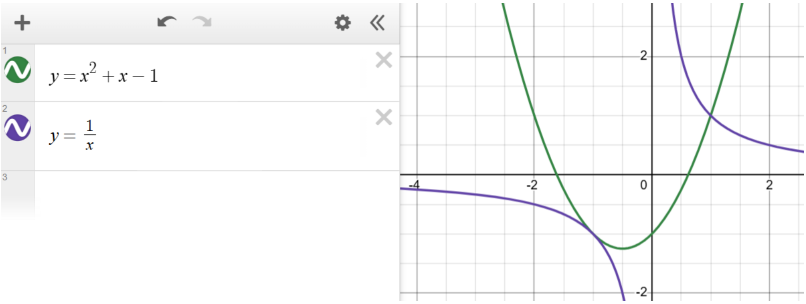


Рис. 2. Геометричний спосіб розв'язання кубічних рівнянь.

Однак головні математичні досягнення Архімеда стосуються проблем, які нині відносять до галузі математичного аналізу. Греки до Архімеда зуміли визначити площі багатокутників і круга, об'єм призми, циліндра, піраміди та конуса. Але тільки Архімед знайшов набагато більш загальний метод обчислення площ або об'ємів: для цього він удосконалив і віртуозно застосовував метод вичерпування Евдокса Книдського. У своїй роботі «Послання до Ератосфена про метод» (іноді називається «Метод механічних теорем») він використовував нескінченно малі для обчислення об'ємів. Згодом ідеї Архімеда лягли в основу інтегрального числення.

У трактаті «Квадратура параболи» Архімед довів, що площа сегмента параболи, який відтинається від неї прямою, становить $\frac{4}{3}$ від площі трикутника, вписаного в цей сегмент (див. рис. 30-35 у "Сила математичного аналізу"). Для доведення Архімед підрахував суму нескінченного ряду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{4}{3} \tag{1}$$

Кожний доданок ряду — це площа трикутників, вписаних у неохоплену попередніми членами ряду частину сегмента параболи.

Історичне відео: Архімед. Давньогрецький математик (7 хвилин українською): youtube.com/watch?v=NMOY4W_3TMs

Як відомо, в математиці, природничих науках і техніці дуже важливо вміти знаходити найбільші та найменші значення змінних величин — їхні екстремуми.

Наприклад, як серед циліндрів, вписаних у кулю, знайти циліндр, що має найбільший об'єм?

Рис. 3. «Цицерон знаходить могилу Архімеда». Бенджамін Вест, 1804 рік.

Усі такі задачі нині можуть бути розв'язані за допомогою диференціального числення. Архімед першим побачив зв'язок цих задач із проблемами визначення дотичних і показав, як розв'язувати задачі на екстремуми.

Також він зумів встановити, що об'єми конуса та кулі, вписаних у циліндр, і самого циліндра співвідносяться як 1 : 2 : 3. Найкращим своїм досягненням він, за Цицероном, вважав визначення поверхні та об'єму кулі — задачу, яку до нього ніхто не міг розв'язати. Архімед навіть просив вибити на своїй могилі кулю, вписану в циліндр (на рис. 3 наведено картину «Цицерон знаходить могилу Архімеда» пензля Б. Веста).

Окрім переліченого, вчений обчислив площу поверхні для сегмента кулі та витка відкритої ним «спіралі Архімеда», визначив об'єми сегментів кулі, еліпсоїда, параболоїда і двопорожнистого гіперболоїда обертання.

Наступна концептуальна задача, розв'язана вченим, стосується геометрії кривих. Нехай дана деяка крива лінія. Як визначити дотичну до неї в будь-якій точці? Або, якщо перекласти цю проблему на мову фізики, нехай нам відомий шлях деякого тіла в кожен момент часу. Як визначити його швидкість у будь-якій точці? Перший загальний метод розв'язання цієї задачі був знайдений Архімедом і згодом був покладений в основу диференціального числення.

Величезне значення для розвитку математики мало обчислене Архімедом відношення довжини кола до діаметра. У роботі «Про вимірювання кола» Архімед дав своє знамените наближення для числа π: «архімедове число» $\frac{22}{7}$. Більше того, він зумів оцінити точність цього наближення: $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Для доведення він побудував для кола вписаний і описаний 96-кутники та обчислив довжини їхніх сторін. Він також довів, що площа круга дорівнює πr^2, тобто $\frac{r}{2}$, помноженому на довжину кола ($2\pi r$), яка обмежує цей круг.

Серед інших досягнень – однойменна теорема, лема та аксіома:

- Теорема Архімеда:

  «Усі 3 висоти трикутника перетинаються в одній точці», яка тепер називається ортоцентром. Це поняття вперше в грецькій математиці використано в «Книзі лем», хоча явного доведення існування ортоцентра Архімед не навів. Тим не менш, до середини XIX століття ортоцентр часто називали архімедовою точкою (рис. 4).

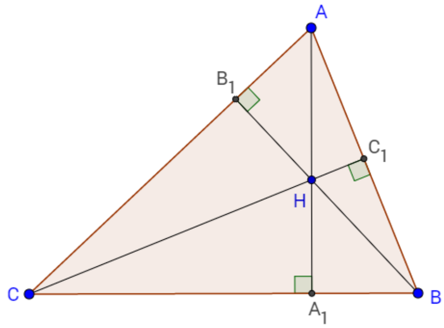


Рис. 4. Ортоцентр.

- Лема Архімеда:

  Якщо коло α торкається хорди MN кола β в точці B, а кола β торкається в точці A, тоді AB є бісектрисою кута MAN (рис. 5).

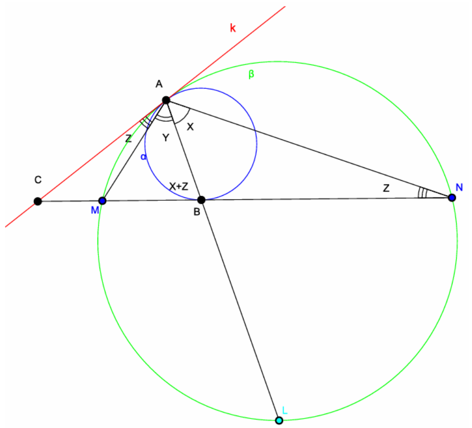


Рис. 5. Лема Архімеда.

- Аксіома Архімеда:

  У роботі «Про кулю та циліндр» Архімед постулює, що будь-яка величина при її додаванні до себе достатню кількість разів перевищить будь-яку задану величину. Тобто, якщо є дві величини, a і b, і a менша за b, то, взявши a доданком достатню кількість разів, можна перевершити b (рис. 6):

$$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n} > b \qquad (2)$$

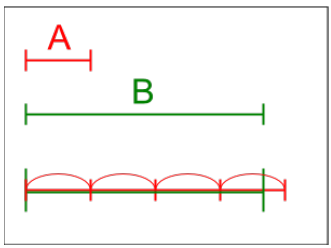


Рис. 6. Аксіома Архімеда.

Цікаве відео: Формула, яку ви знали, але не розуміли (16 хвилин): https://www.youtube.com/watch?v=ezHDaQYClp8

Архімед був людиною з широкими зв'язками як у політичних, так і в наукових колах. Джерела, що дійшли до нас, підтверджують, що вчений вів жваве листування з Ератосфеном Кіренським, який згадується в книгах з історії науки як людина, що першою виміряла радіус Землі (причому вимірювання він виконав із надзвичайною точністю). І з ним, і з іншими вченими свого часу Архімед часто обмінювався листами. Його збережені трактати починаються з особистого листа, що становить водночас передмову до самої наукової праці. Відомо також про тісні зв'язки Архімеда з Гієроном II, царем Сіракуз і, крім того, його родичем. Це Гієрон II спонукав Архімеда до побудови багатьох механізмів, переважна більшість з яких були військовими машинами. Якраз завдяки його дружбі з царем відомі деякі деталі біографії вченого. Наприклад, ми знаємо зі слів Архімеда про те, що його батько Фідій був астрономом, і це, ймовірно, вплинуло на його освіту.

Рис. 7. «Архімед керує обороною Сіракуз». Томас Ральф Спенс, 1895 рік.

Історичний момент, на який припало життя сіракузького мудреця, був непростим: йдеться про епоху Пунічних воєн. Сіракузи займали стратегічне становище між римлянами і карфагенянами, що стало актуальним, коли між цими двома могутніми державами спалахнула війна. Епоха, в якій випало жити вченому, справила вплив на коло його наукових і технічних пошуків. Безсумнівно, розповідь про оборону Сіракуз не може обійтися без опису внеску в неї Архімеда. На рис. 7 наведено полотно пензля Т. Р. Спенса «Архімед керує обороною Сіракуз».

Саме завдяки цьому внеску його часто уявляють як великого інженера, який настільки успішно побудував захист міста, що завдяки його винаходам Сіракузи два роки витримували римську облогу!

3.2 Дайте мені точку опори, і я переверну Землю!

У VIII книзі «Математичного зібрання» Папп Александрійський розповідає про Архімеда та його геніальні роздуми про важіль. За словами автора, великий сиракузький вчений одного разу проголосив знамените речення: «Дайте мені точку опори, і я переверну Землю!». На рис. 8 нижче можна бачити гравюру, що демонструє крилатий вислів.

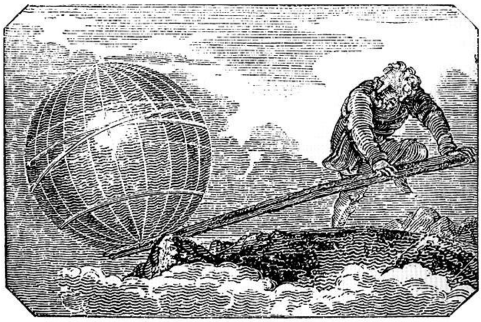


Рис. 8. «Архімед перевертає Землю», гравюра 1824 року.

Цей афоризм підкреслює могутність механіки, але давайте розберемося, наскільки реалістичним є таке твердження. Уявімо, що для нашого гіпотетичного експерименту ми використовуємо важіль першого роду (з опорою посередині). Землю моделюємо як матеріальну точку, розташовану всього в 1 м від точки опори.

Важливе зауваження: насправді Земля не має ваги в звичному розумінні, оскільки вільно рухається в космічному просторі, не спираючись на інші тіла. Однак для ілюстрації принципу припустимо, що ми встановили наш «суперважіль» на якійсь «суперпланеті», яка слугує опорою. Таким чином, вага Землі врівноважується зусиллям на іншому кінці важеля.

Питання: на якій відстані від опори повинен стояти Архімед, щоб, прикладаючи зусилля, скажімо, в 60 кг, зрушити Землю?

Маса Землі $M \approx 6 \times 10^{24}$ кг. Зусилля Архімеда $F_A = 60$ кг (в одиницях сили, еквівалентно $60 \times g$, де g — прискорення вільного падіння, але в пропорції коефіцієнт g скоротиться).

За законом важеля моменти сил рівні:

$$F_Z \cdot l_Z = F_A \cdot l_A, \tag{3}$$

де:

- $F_Z = M \cdot g$ — вага Землі,
- $l_Z = 1$ м — плече для Землі,
- $F_A = 60 \cdot g$ — зусилля Архімеда,
- l_A — плече для Архімеда (шукана відстань).

Підставляємо і спрощуємо (g скорочується):

$$(M \cdot g) \cdot 1 = (60 \cdot g) \cdot l_A \implies l_A = \frac{M}{60} = \frac{6 \times 10^{24}}{60} = 10^{23} \text{ м.} \quad (4)$$

Ця відстань — 10^{23} метрів! Щоб усвідомити масштаб, переведемо в світлові роки. Світловий рік (позначається як ly від англ. *light-year*) – це астрономічна одиниця довжини, що використовується для вимірювання відстаней у космосі. Вона визначається як відстань, яку проходить світло (або будь-яке електромагнітне випромінювання) у вакуумі за один юліанський рік зі швидкістю світла у вакуумі. Це не одиниця часу, а саме відстані, а юліанський рік передбачає часовий інтервал для розрахунку.

Швидкість світла у вакуумі: $c = 299\,792\,458$ м/с.

Юліанський рік — 365,25 сонячних діб (це середнє значення з урахуванням високосних років) або в секундах:

$$T = 365{,}25 \times 24 \times 3600 = 31\,557\,600 \text{ с.} \quad (5)$$

Підсумок:

$$1 \text{ ly} = c \times T = 299\,792\,458 \text{ м/с} \times 31\,557\,600 \text{ с} = 9\,460\,730\,472\,580\,000 \text{ м.} \quad (6)$$

Округлюючи до 11 знака, 1 ly $= 9{,}46073047258 \times 10^{15}$ м. Тоді довжина важеля:

$$l_A \text{ (ly)} = \frac{10^{23}}{9{,}46073047258 \times 10^{15}} \approx 1{,}057 \times 10^{7} \text{ ly} \approx 1{,}06 \times 10^{7} \text{ ly.} \quad (7)$$

Це понад 10,5 млн світлових років! Для порівняння, відстань до найближчої великої галактики Андромеди — 2,5 мільйона світлових років (на рис. 9 нижче вона на фото в ультрафіолетових променях).

Рис. 9. Галактика Андромеди в ультрафіолетових променях.

Для оцінки радіуса і діаметра Всесвіту візьмемо його вік — близько 13 700 мільйонів років ($1{,}37 \times 10^{10}$ років). У спрощеній моделі (без розширення) радіус Всесвіту приблизно дорівнює цьому значенню в світлових роках, а діаметр

$$D = 2 \times 1{,}37 \times 10^{10} = 2{,}74 \times 10^{10}\ \text{ly} = 27\,400\ \text{млн ly}. \tag{8}$$

Кількість важелів, які вкладуться в діаметр Всесвіту

$$N = \frac{2{,}74 \times 10^{10}}{1{,}06 \times 10^{7}} \approx 2{,}59 \times 10^{3} = 2590. \tag{9}$$

З урахуванням космологічного розширення реальний діаметр спостережуваного Всесвіту сягає 93 мільярди світлових років ($9{,}3 \times 10^{10}$ ly), що потребує приблизно 8800 важелів (як видно з табл.1).

Табл. 1. Важіль Архімеда у порівнянні.

Масштаб	**Значення**	**Порівняння**
Довжина важеля	$1{,}06 \times 10^{7}$ ly	1 важіль
Діаметр Чумацького Шляху	$\approx 3 \times 10^{5}$ ly	0,03 важеля
Відстань до Андромеди	$2{,}5 \times 10^{6}$ ly	0,24 важеля
Діаметр Всесвіту	$2{,}74 \times 10^{10}$ ly	2590 важелів
Діаметр (з розширенням)	$9{,}3 \times 10^{10}$ ly	8800 важелів

Переворот Землі Архімед, безумовно, розумів метафорично: важіль дозволяє керувати гігантськими силами за допомогою малих зусиль, і його крилатий вислів — дещо поетична ілюстрація цього принципу механіки (рис. 10).

Рис. 10. Дайте мені точку опори, і я переверну Землю!

3.3 Скільки потрібно піщинок, щоб заповнити Всесвіт?

Книга «Обчислення піщинок» (грецькою — «Псамміт») є науково-популярною роботою Архімеда, на рис. 11 наведено її сучасну версію.

У трактаті вчений ставить питання, скількома піщинками можна було б заповнити Сиракузи — чи нескінченна їхня кількість? І відповідає, що скінченна. Потім він обчислює, скільки піщинок вмістила б Сицилія, скільки знадобилося б для наповнення всіх гір Землі... І так аж до числа піщинок, необхідних для заповнення Всесвіту.

> *Тому ясно, що кількість піщинок, рівна за розміром сфері нерухомих зірок, наявність якої припускає Аристарх, менша, ніж 1000 міріад «восьмих» чисел.*

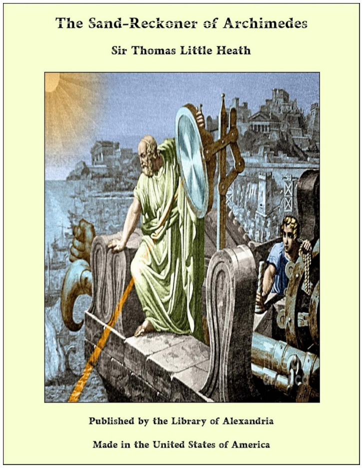


Рис. 11. Сучасна книга «Sand-Reckoner of Archimedes».

Запропонована Архімедом у «Обчисленні піщинок» числова система відома як система октад, і свого часу вона мала великий потенціал, хоча й залишилася невідомою для більшості математиків. До епохи Архімеда використовувалися терміни одиниця, десяток, сотня, тисяча і міріада (10 000). Він же запропонував піти далі міріади. Взявши ці 5 чисел і їхні добутки, він розбив їх на вісім розрядів, як показано в табл. 2.

Табл. 2. Система числення Архімеда.

Архімед	**Математичний запис**	**Назва**
Одиниця	$1 = 10^0$	Один
Десяток	$10 = 10^1$	Десять
Сотня	$100 = 10^2$	Сто
Тисяча	$1000 = 10^3$	Тисяча
Міріада	$10\,000 = 10^4$	Десять тисяч
Десяток міріад	$10 \cdot 10\,000 = 10^5$	Сто тисяч
Сотня міріад	$100 \cdot 10\,000 = 10^6$	Мільйон
Тисяча міріад	$1000 \cdot 10\,000 = 10^7$	Десять мільйонів
Міріада міріад	$10\,000 \cdot 10\,000 = 10^8$	Сто мільйонів

Таким чином, він отримав систему, основою якої є 10^8 — число, що іменується октадою. Кожного разу при перевищенні відповідного розряду число переходить у наступний, з назвами, наведеними в табл. 3 нижче.

Табл. 3. Розряди чисел у системі Архімеда.

Діапазон	Назва і перше число розряду
Від 1 до $10^8 - 1$	«Перші числа», перше число цього розряду — 1
Від 10^8 до $10^{16} - 1$	«Другі числа», перше число розряду — 10^8
Від 10^{16} до $10^{24} - 1$	«Треті числа», перше число розряду — 10^{16}
і так далі...	

Архімед назвав числа до 10^8 «першими числами», а 10^8 назвав «одиницею других чисел». Множення цієї одиниці на числа до міріади міріад породжують «другі числа» аж до

$$10^8 \cdot 10^8 = 10^{16}.$$

Число 10^{16} стало «одиницею третіх чисел», яка таким же чином породжувала треті числа. Продовжуючи аналогічні міркування, Архімед дійшов до міріадо-міріадних чисел, тобто до

$$(10^8)^{(10^8)} = 10^{8 \cdot 10^8}.$$

Після цього Архімед назвав усі наведені числа «числами першого періоду», а останнє $10^{8 \cdot 10^8}$ — «одиницею другого періоду». Після цього він побудував числа другого періоду, множачи цю одиницю на числа першого періоду. Продовжуючи таким чином побудову, Архімед прийшов до чисел міріадоміріадного періоду. Найбільшим числом, названим Архімедом, стало

Назва	Число
Міріада	10^4
Гугол	10^{100}
Асанкхейя	10^{140}
Гуголплекс	$10^{10^{100}}$
Друге число Скьюза	$10^{10^{10^{1000}}}$
Мега	2[5] (у нотації Мозера)
Мегістон	10 [5] (у нотації Мозера)
Мозер	2[2[5]] (у нотації Мозера)
Число Грема	G63 (в нотації Грема)
Стасплекс	G100 (в нотації Грема)

Рис. 12. Великі числа.

$$\left((10^8)^{(10^8)}\right)^{(10^8)} = 10^{8 \cdot 10^{16}}$$

або ж одиниця з 80 трильйонами нулів!

На рис. 12 вище наведено для порівняння великі числа, включно з міріадою, яку вдало використав Архімед (інші - придумані пізніше).

Для підрахунку піщинок на основі цієї системи, Архімед зробив припущення, що Всесвіт сферичний (укладений у «сферу віддалених зірок»), і відношення діаметра Всесвіту до діаметра орбіти Землі навколо Сонця дорівнює відношенню діаметра орбіти Землі навколо Сонця до діаметра Землі. Для обчислення верхньої межі розміру Всесвіту Архімед спеціально завищував свої оцінки. Він припустив, що довжина земного екватору не більше 300 міріад стадіїв (близько 500 000 км), хоча він і вказує, що деякі вчені отримали результат у 30 міріад стадіїв. Також Архімед припустив, що Місяць не більший за Землю, а Сонце не більше, ніж у тридцять разів більше Місяця, причому він вказує, що Евдокс Кнідський і Фідій (при деяких прочитаннях — батько Архімеда) наводили оцінку в 9 і 12 разів відповідно (насправді діаметр Сонця в 109 разів більший за діаметр Землі і в 400 разів більший за діаметр Місяця). На рис. 13 нижче показана модель планетарію Архімеда, створеного для відображення його моделі устрою Всесвіту.

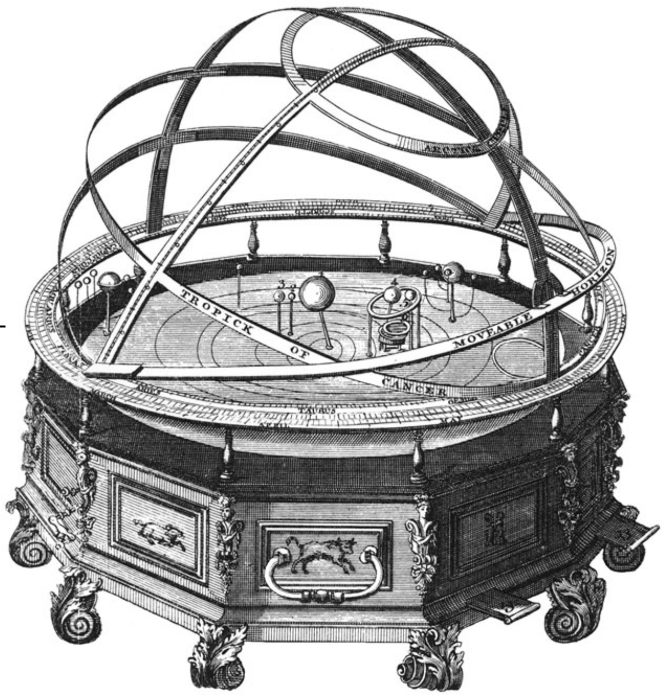


Рис. 13. Планетарій Архімеда.

Для вимірювання кутового діаметра Сонця (тобто кута, який займає Сонце на колі небесної сфери) Архімед проводив експеримент, що виконувався на світанку, коли світло достатньо слабке, щоб можна було дивитися прямо на Сонце. Для цього він прикріплював до кінця лінійки невеликий циліндр і віддаляв його так, щоб він якраз затуляв собою Сонце. При розрахунках Архімед враховував розмір зіниці і робив спеціальні вимірювання для того, щоб знайти його.

У результаті вимірювань було отримано, що кутовий діаметр Сонця більший за $\frac{1}{200}$ частину прямого кута. З цього вимірювання Архімед показує, що діаметр Сонця більший за сторону вписаного в небесну сферу тисячокутника. При цьому він вперше в історії розглядає паралакс, зауважуючи різницю між спостереженнями сходу Сонця з центру Землі і з її поверхні.

На основі отриманих даних Архімед підрахував, що діаметр Всесвіту не більше 10^{14} стадіїв (близько двох світлових років). Також він припустив, що в об'ємі макового зернятка поміщається не більше міріади піщинок, а діаметр макового зернятка не менше сорокової частини дюйма. Зрештою Архімед показав, що Всесвіт може містити в собі не більше 10^{63} піщинок. Для порівняння — сучасна оцінка числа елементарних частинок у відомій нам частині Всесвіту становить від 10^{79} до 10^{81}, що за порядком величини якраз відповідає числу елементарних частинок у 10^{63} піщинках масою 1 мікрограм!

Говорячи про великі числа від античності до сучасності, потрібно згадати принаймні ті, що вказані на рис. 12 вище. Цікаво, що факторіал гугола більший за гуголплекс: $10^{100}! = 10^{9{,}9565705518\times10^{101}}$. Якщо надрукувати гуголплекс у книгах, кожна з яких міститиме мільйон знаків (400 сторінок, 50 рядків на сторінці, 50 знаків у рядку), то знадобиться $10^{(10^{100}-6)}$ таких книг. Якщо кожна книга важитиме навіть 100 грамів, то їхня загальна маса становитиме $10^{(10^{100}-7)}$ кілограмів. Для порівняння, маса Землі становить $5{,}972\cdot10^{24}$ кілограмів, а маса Чумацького Шляху — $6\cdot10^{42}$ кілограмів.

3.4 Золота корона, закон Архімеда, клепсидра та айсберг.

Тиран Сиракуз Гієрон, отримавши від ювеліра золоту корону, запідозрив його у підмішуванні срібла.

Тому звернувся за допомогою до Архімеда, який, саме досліджуючи це завдання, вивів принцип виштовхувальної сили: на тіло, занурене в рідину, діє виштовхувальна сила F_A, що дорівнює вазі витісненої рідини: $F_A = \rho\cdot g\cdot V$, де V — об'єм зануреної частини, ρ — густина рідини, $g \approx 9{,}8$ м/с^2.

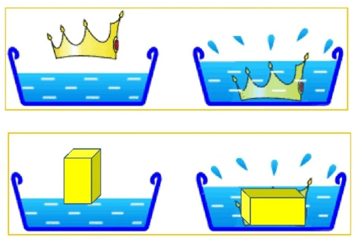


Рис. 14. Порівняння об'єму корони та золотого зливка.

Взявши для порівняння об'ємів срібний та золотий зливки по 1000 грамів (густина срібла $\rho_с = 10{,}5$ г/см^3, золота $\rho_з = 19{,}3$ г/см^3), отримаємо (рис. 14):

$$V_{\text{с}} = \frac{m_{\text{с}}}{d_{\text{с}}} = \frac{1000}{10{,}5} \approx 95{,}2\ \text{см}^3, \tag{10}$$

$$V_{\text{з}} = \frac{m_{\text{з}}}{d_{\text{з}}} = \frac{1000}{19{,}3} \approx 51{,}8\ \text{см}^3. \tag{11}$$

Припустимо, корона — 70% золота (700 г) і 30% срібла (300 г):

$$V_{\text{к}} = \frac{700}{19{,}3} + \frac{300}{10{,}5} \approx 36{,}3 + 28{,}6 = 64{,}9\ \text{см}^3. \tag{12}$$

Тоді $51{,}8 < 64{,}9 < 95{,}2$, що доводить домішку. Різниця із золотом $\Delta V \approx 13{,}1$ см^3.

У циліндричній ємності діаметром, скажімо, 20 см (площа $S = \pi \cdot 10^2 \approx 314$ см^2) підйом висоти $h = V/S$:

$$\text{для золота } h = \frac{51{,}8}{314} \approx 0{,}165\ \text{см}, \tag{13}$$

$$\text{для корони } h = \frac{64{,}9}{314} \approx 0{,}207\ \text{мм}, \tag{14}$$

$$\text{різниця } \Delta h = 0{,}042\ \text{см}. \tag{15}$$

0,42 мм – занадто мало для точного вимірювання в такій ємності. Альтернатива: клепсидра (водяний годинник), де різниця порядку 10 см^3 вимірюється легше і точніше.

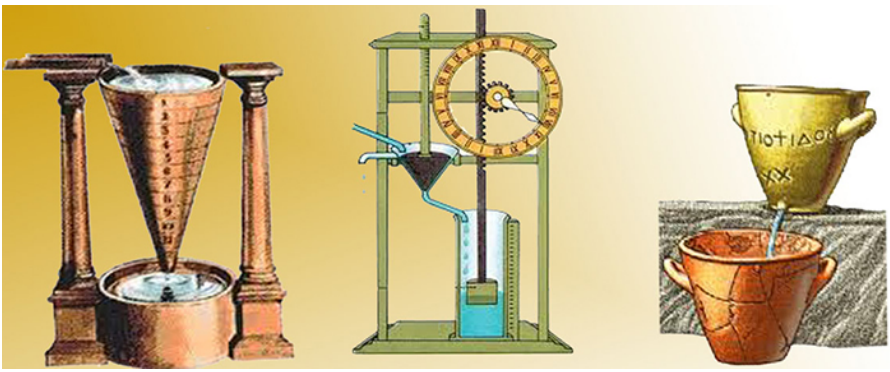


Рис. 15. Водяні годинники давнини.

Для чого винайшли клепсидри – водяні годинники? Сонячні годинники не могли вимірювати час у темряві, а потрібні були такі механізми, які відображали б хід часу і вдень, і вночі. І ще вони мали відміряти рівні відрізки часу в рівних кількостях. Водяні годинники могли це виконувати на відміну від сонячних.

Найдавніші єгипетські водяні годинники датуються близько 1500 р. до н. е. (на рис. 15 ліворуч). Згідно з розкопками, відомо також, що давні греки вже з 325 р. до н. е. застосовували схожі пристрої. Вони назвали такі годинники «клепсидрами». Це перекладається як «водяні крадії» (від дав.-гр. «красти, приховувати» + «вода»).

Найпростіші зразки грецьких клепсидр, ймовірно, авторства Ктесібія Олександрійського (на рис. 15 праворуч) – це посудини або ємності з отвором майже біля самого дна. Верхня посудина знаходиться під нахилом, і з неї капає вода в іншу ємність. У нижній чаші були позначки на внутрішній стороні, які позначали години.

Також є припущення, що Архімед для знаходження домішки срібла використовував важіль і терези. Зливок і корона по 1000 грам урівноважені в повітрі. Тоді у воді:

$$F'_{з} = mg - V_{з}\rho_{в}g = 1000g\left(1 - \frac{\rho_{в}}{\rho_{з}}\right), \tag{16}$$

$$F'_{к} = mg - V_{к}\rho_{в}g = 1000g\left(1 - \frac{\rho_{в}}{\rho_{к}}\right), \tag{17}$$

де $\rho_{в} \approx 1$ г/см^3, $\rho_{к} = 0{,}7\rho_{з} + 0{,}3\rho_{с} \approx 14{,}59$ г/см^3.

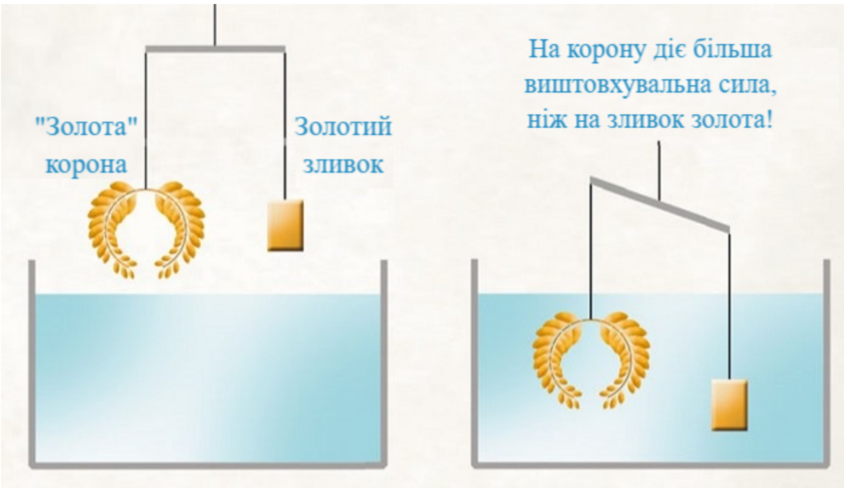


Рис. 16. Метод зважування.

Підставляючи значення: $\rho_{з} = 19{,}3$ г/см^3 (золото), $\rho_{с} = 10{,}5$ г/см^3

(срібло):

$$\rho_{\text{к}} = 0{,}7 \times 19{,}3 + 0{,}3 \times 10{,}5 = 13{,}51 + 3{,}15 = 16{,}66 \text{ г/см}^{3}$$

Тоді:

$$F'_{\text{з}} = 1000g\left(1 - \frac{1}{19{,}3}\right) \approx 1000g \times 0{,}948 = 948g, \tag{18}$$

$$F'_{\text{к}} = 1000g\left(1 - \frac{1}{16{,}66}\right) \approx 1000g \times 0{,}940 = 940g. \tag{19}$$

$F'_{\text{к}} < F'_{\text{з}}$, терези нахиляться до зливка, виявляючи домішку. Метод простий і точний.

Цікаво, що, знаючи закон Архімеда, можна обчислити підводну частину айсберга. Для плаваючого тіла:

$$\rho_{\text{льоду}} V g = \rho_{\text{води}} V_{\text{під}} g, \tag{20}$$

звідки частка підводної частини:

$$\frac{V_{\text{під}}}{V} = \frac{\rho_{\text{льоду}}}{\rho_{\text{води}}} = \frac{0{,}92}{1{,}025} \approx 0{,}90. \tag{21}$$

Таким чином, близько 90% об'єму айсберга приховано під водою — саме тому зіткнення з ним було таким фатальним для «Титаніка», чия команда бачила лише оманливо малу верхівку крижаного гіганта!

Рис. 17. Айсберг.

3.5 Невсіс і трисекція кута методом Архімеда.

Невсіс, що можна перекласти з давньогрецької як «нахил» – це техніка геометричних побудов. Вона полягає в тому, щоб побудувати відрізок певної довжини між двома кривими так, що він (або його продовження) пройде через задану точку. Йдеться про ручну побудову: на лінійці позначаються дві крайні точки відрізка, а потім лінійка зсувається, поки дані точки не ляжуть на відповідні криві. Можна сказати, що це такий геометричний «рахунок на пальцях».

Під впливом платонівського ідеалізму, який пронизував грецьку математику за часів Архімеда, усі математичні доведення ділилися відповідно до певної ієрархії, що відображала їхню красу та вишуканість. Якщо побудову можна було виконати за допомогою лінійки та циркуля, треба було користуватися тільки ними. Якщо ні, то задача «спускалася» на рівень нижче, скажімо, до конічних перерізів. Невсіс можна було застосовувати лише в тих випадках, коли інший розв'язок був неможливий.

Трисекція кута за допомогою невсісу.

1. Маємо кут $\alpha = \angle POM$ (рис. 18). Необхідно побудувати кут β, величина якого втричі менша за даний: $\alpha = 3\beta$.

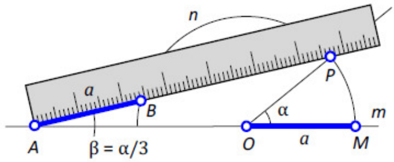


Рис. 18. Метод невсісу для трисекції кута.

2. Побудуємо коло довільного радіуса a з центром у точці O. Нехай сторони кута перетинаються з колом у точках P і M. Продовжимо сторону OM вихідного кута.

3. Узявши лінійку невсісу, відклавши на ній a, і використовуючи пряму OM як напрямну, точку P як полюс, а півколо як цільову лінію, будуємо відрізок AB. Отримаємо кут $\angle PAM$, рівний одній третині вихідного кута α.

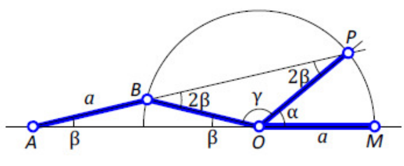


Рис. 19. Трисекція кута (доведення).

4. Розглянемо трикутник ABO (рис. 19). Оскільки $AB = BO = a$, то трикутник рівнобедрений, і кути при його основі рівні: $\angle BAO = \angle BOA = \beta$.

5. Кут $\angle PBO$ як зовнішній кут трикутника ABO дорівнює 2β.

6. Трикутник BPO також рівнобедрений, кути при його основі дорівнюють 2β, а кут при вершині $\gamma = 180° - 4\beta$. З іншого боку, $\gamma = 180° - \beta - \alpha$. Отже, $180° - 4\beta = 180° - \beta - \alpha$, а значить, $\alpha = 3\beta$.

3.6 Сила математичного аналізу: число π, метод вичерпування та нескінченність.

Першим провісником обчислення нескінченно малих величин можна назвати питання досягнення границі поділу та нескінченності, описані у відомих апоріях Зенона Елейського (490-430 до н.е.). Розглянута ним процедура дихотомії – послідовного поділу навпіл – була розширена Архімедом і застосована у трактатах «Про квадратуру параболи» та «Про вимірювання кола». В останньому стверджується:

> *Кожне коло дорівнює прямокутному трикутнику, один із катетів якого дорівнює радіусу кола, а інший – довжині кола.*

Мається на увазі рівність їхніх площ

$$S_{\text{трикутника}} = \frac{\text{основа} \cdot \text{висота}}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2,$$

як на рис. 20 нижче:

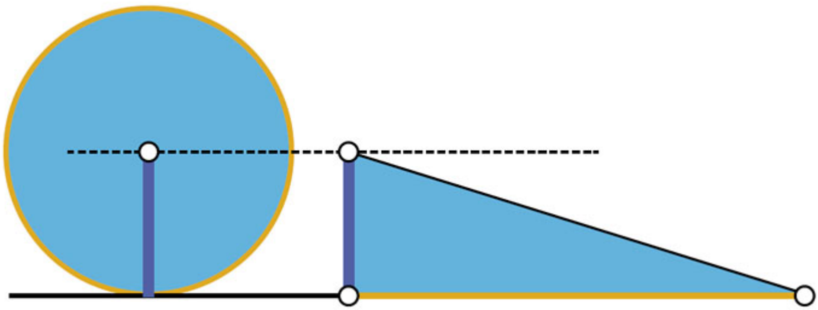


Рис. 20. Площа кола дорівнює трикутнику, висота якого — радіус, а основа — довжина кола.

Як Архімед дійшов до цього? Все завдяки силі матаналізу. Здавна люди помічали, що всі кола, по суті, являють собою одну й ту саму фігуру, тільки різних розмірів – більше або менше. Було зрозуміло, що пропорції в них однакові, тобто співвідношення між довжиною кола та її діаметром є величиною сталою. А значить, якщо розділити довжину кола на її діаметр, ми завжди отримаємо одне й те саме число, певну сталу π.

Але що це за число і як його знайти? Ускладнює завдання те, що кола круглі. Якби вони складалися з прямих ліній, ніяких проблем не було б. Знайти площі трикутників, квадратів і п'ятикутників легко. Але криволінійні фігури, такі як кола, набагато складніші.

Ключ до знаходження площі криволінійних фігур — уявити, що вони складаються з багатьох маленьких прямих шматочків. Це не зовсім правда, але це працює за умови, що ви доводите це до границі й уявляєте нескінченно багато шматочків, кожен з яких нескінченно малий.

Це ключова ідея, що лежить в основі всього математичного аналізу!

Ось один із способів використати цю ідею для знаходження площі кола. Почнемо з поділу площі на чотири рівні чверті й переставимо їх наступним чином (рис. 21).

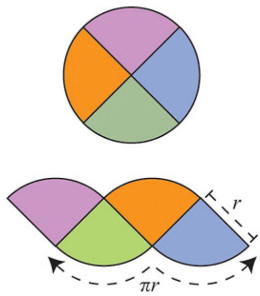


Рис. 21. Коло, поділене на 4 сектори й перебудоване в зубчасту фігуру.

Дивна зубчаста фігура внизу має ту саму площу, що й коло, хоча це може здатися малоінформативним, оскільки ми не знаємо й її площі. Але, принаймні, ми знаємо два важливих факти про неї. По-перше, дві дуги вздовж її основи мають загальну довжину πr, рівно половину довжини кола вихідного круга (тому що інша половина кола враховується двома дугами зверху). По-друге, прямі сторони секторів мають довжину r, оскільки кожна з них спочатку була радіусом кола.

Аналогічно повторимо процес поділу на вісім секторів (рис. 22).

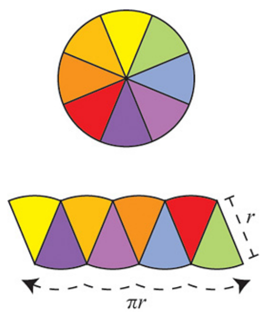


Рис. 22. Коло, поділене на 8 секторів і перебудоване в зубчасту фігуру.

Зубчаста фігура тепер виглядає звичніше. Дуги зверху й знизу не так сильно виражені, ліва й права сторони зубчастої фігури менше нахилені. Незважаючи на ці зміни, два факти, згадані для чотирьох секторів, як і раніше справедливі: дуги внизу все ще мають сумарну довжину πr, і кожна сторона все ще має довжину r. І, звичайно, зубчаста фігура все ще має ту саму площу, що й раніше — площу шуканого кола — оскільки це просто перестановка восьми секторів кола.

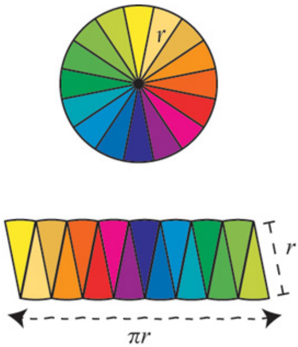


Рис. 23. Коло, поділене на 16 секторів і перебудоване у фігуру, близьку до прямокутника.

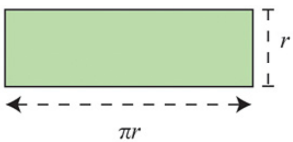


Рис. 24. Гранична фігура — прямокутник із шириною πr і висотою r.

В оригіналі Архімед почав з апроксимації кола багатокутником з кількістю сторін набагато більше чотирьох (рис. 25).

Потім він розрізав багатокутник на трикутники і «розгорнув його» вздовж периметра в зубчасту лінію з клинів. Ця розгортка не змінила загальну площу, тому «паркан» з трикутників має ту саму площу, що й вихідний багатокутник (рис. 26 нижче).

У міру того як ми беремо все більше й більше секторів, відбувається щось дивовижне: зубчаста фігура наближається до прямокутника. Дуги стають більш плоскими, а сторони стають майже вертикальними (рис. 23).

У границі нескінченно великої кількості секторів фігура стає прямокутником (рис. 24). Як і раніше, два факти все також справедливі: цей прямокутник має основу шириною πr і бічну сторону висотою r.

Завдання стало простішим: площа прямокутника дорівнює його ширині, помноженій на висоту, тому множення πr на r дає площу πr^2 для прямокутника. А оскільки перебудована фігура завжди має ту саму площу, що й коло, це і є відповідь для кола!

Тепер, якщо співвіднести площу прямокутника і площу трикутника з висотою, рівною бічній стороні r, стане очевидним, що довжина основи буде вдвічі більшою, тобто $2\pi r$!

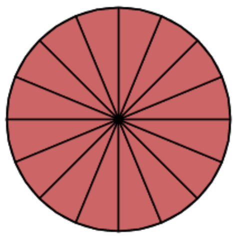


Рис. 25. Багатокутна апроксимація кола.

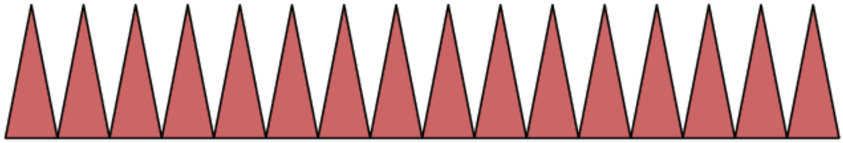


Рис. 26. Розгортка багатокутника.

Потім Архімед нагадав, що площа трикутника дорівнює половині його основи, помноженій на висоту: це означає, що якщо застосувати зсув до трикутника, площа залишиться незмінною, оскільки ні основа, ні висота не змінюються в ході цієї процедури (рис. 27).

І так Архімед зсував усі трикутники вздовж зубчастої лінії вліво, поки всі їхні вершини не збіглися на перпендикулярі до крайнього лівого ребра (рис. 28).

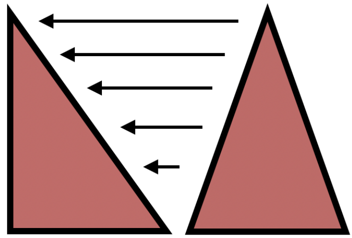


Рис. 27. Зсув трикутника залишає площу незмінною.

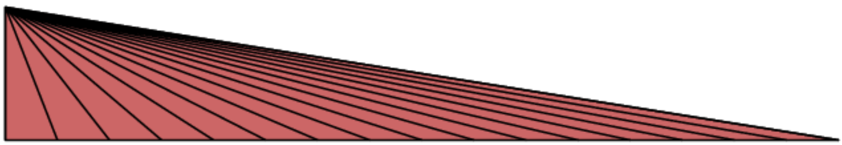


Рис. 28. Зсув зубчастої лінії утворює прямокутний трикутник.

Таким чином, для кожного правильного n-кутника Архімед зміг знайти точний прямокутний трикутник, який має ту саму площу і висота якого дорівнює радіусу багатокутника, а основа — периметру. Потім Архімед дуже ретельно довів, що коли кількість сторін багатокутника прямує до нескінченності, різниця його площі й площі кола прямує до нуля, і різниця його катета-основи та довжини кола також прямує до нуля. Отже, коло повинно мати ту саму площу, що й прямокутний трикутник з катетами, що дорівнюють довжині кола та радіусі!

Аналогічну стратегію дихотомії Архімед використовував для наближеного обчислення числа π. Він замінював коло багатокутником, а потім продовжував подвоювати число сторін, щоб наблизитися до ідеальної округлості. Але замість того, щоб задовольнитися наближенням невизначеної точності, він методично обмежував π, поміщаючи коло між вписаними та описаними багатокутниками для фігур, починаючи з 6 і закінчуючи 96 сторонами (рис. 29).

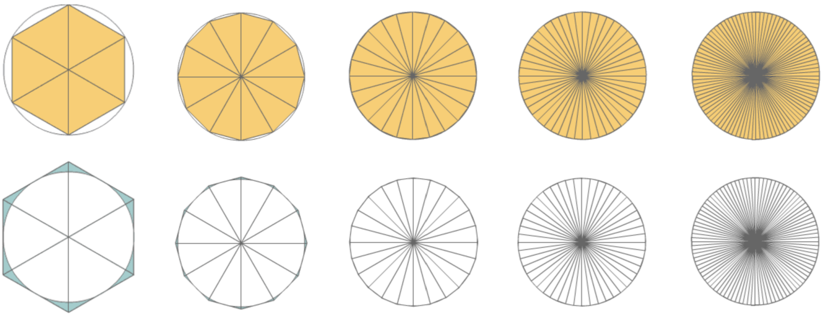


Рис. 29. Вписані та описані багатокутники з 6, 12, 24, 48 і 96 сторонами.

Потім він обчислював периметри й площі цих внутрішніх і зовнішніх багатокутників, починаючи з шестикутника й послідовно просуваючись до 12, 24, 48 і, зрештою, 96 сторін.

Результати для 96-кутників дозволили йому довести, що

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}, \tag{22}$$

а це відповідає дуже хорошому наближенню $\pi = \frac{22}{7}$.

У табл. 4 нижче наведені значення, що обмежують число π знизу й зверху, знайдені Архімедом за допомогою багатокутників з кількістю сторін, що послідовно зростає.

Табл. 4. Наближення числа π.

Сторони (n)	**Вписаний n-кутник**	**Описаний n-кутник**
6	3.0	3.464
12	3.1058	3.2154
24	3.1326	3.1597
48	3.1394	3.1461
96	3.1410	3.1427

Цей підхід відомий як «метод вичерпування» через те, як він обмежує невідоме число π між двома відомими числами, які «стискають» його з обох боків. Межі звужуються з кожним подвоєнням, тим самим вичерпуючи простір для маневру для π.

У границі нескінченно великої кількості сторін як верхня, так і нижня межі збігалися б до π. На жаль, ця границя не так проста, як попередня, де зубчаста фігура перетворилася на прямокутник. Таким чином, π залишається таким же невловимим, як і раніше. Ми можемо виявити все більше й більше його цифр — поточний рекорд становить понад 2,7 трильйона десяткових знаків — але ми ніколи не дізнаємося його повністю!

Згідно з іще одним цікавим міркуванням, яке можна знайти в трактаті «Про вимірювання кола», площа вписаного в квадрат кола відноситься до площі цього квадрата як $\frac{11}{14}$.

Площа кола:

$$S_{\text{кола}} = \pi r^2$$

Площа квадрата:

$$S_{\text{квадрата}} = (2r)^2 = 4r^2$$

Співвідношення, які їх пов'язують:

$$\frac{S_{\text{кола}}}{S_{\text{квадрата}}} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$$

Те, що з'ясував Архімед:

$$\frac{S_{\text{кола}}}{S_{\text{квадрата}}} = \frac{11}{14}$$

Звідси:

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{11}{14} \Rightarrow \pi \approx 3{,}14$$

Квадратура параболи.

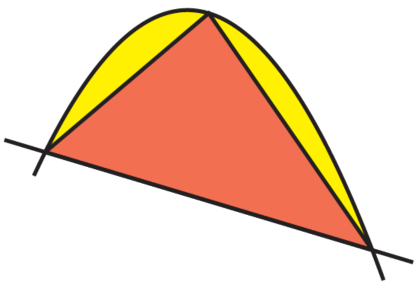


Рис. 30. Параболічна область і найбільший вписаний у неї трикутник.

В іншому трактаті – «Про квадратуру параболи» Архімед знайшов площу, обмежену сегментом параболи й прямою лінією (рис. 30):

«Площа поверхні, обмеженої параболою і прямою, що її перетинає, на 1/3 більша за площу трикутника з основою, рівною відрізку даної прямої, і висотою, рівною параболі».

Спочатку описавши, як знайти найбільший вписаний трикутник (використовуючи обчислення дотичних ліній до параболи), Архімед відзначає, що цей трикутник ділить область, що залишилася, на дві нові параболічні області. І він може заповнити їх найбільшими трикутниками теж!

Ці два трикутники потім ділять область параболи, що залишилася, на чотири нові параболічні області, кожна з яких має свій найбільший трикутник, і так далі (рис. 31).

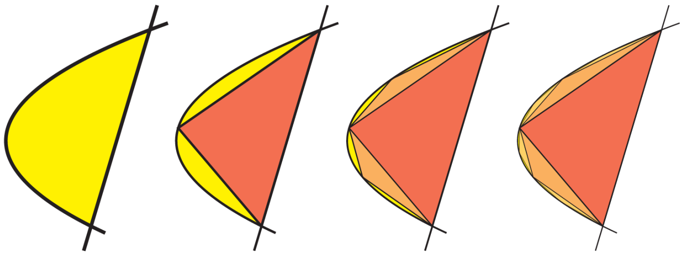


Рис. 31. Нескінченне наближення Архімеда для параболічного сегмента.

Архімед доводить, що в границі, якщо виконати це нескінченну кількість разів, трикутники повністю заповнюють параболічний сегмент, не залишаючи жодної площі. Таким чином, залишається тільки скласти площі цих нескінченно багатьох трикутників. І тут він виявляє цікаву закономірність: загальна площа трикутників на кожному етапі становить $\frac{1}{4}$ загальної площі трикутників на попередньому етапі.

Якщо A_k — площа на k-му етапі, Архімед стверджує, що $A_k = \frac{1}{4}A_{k-1}$. Таким чином

$$A_0, \quad A_1 = \frac{1}{4}A_0, \quad A_2 = \frac{1}{4^2}A_0, \quad A_3 = \frac{1}{4^3}A_0, \quad \ldots$$

І загальна площа є нескінченною сумою

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots = A_0\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right)$$

Тепер Архімеду залишається тільки знайти суму цього ряду. Для нас, сучасних людей, це не проблема: ми одразу впізнаємо в цьому геометричну прогресію

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

Але чому вона називається геометричною? Можливо, частково тому, що Архімед був першою людиною, яка знайшла суму такого ряду, зробивши це повністю геометрично. Ігноруючи провідний множник A_0, ми можемо інтерпретувати всі дроби як пропорції площі квадрата. Перший член каже нам взяти чверть квадрата, наступний член каже взяти ще чверть від чверті, і так далі. Повторюючи цей процес нескінченно, Архімед у підсумку отримує фігуру, де виділені квадрати на діагоналі представляють завершену нескінченну суму (рис. 32, 33 і 34).

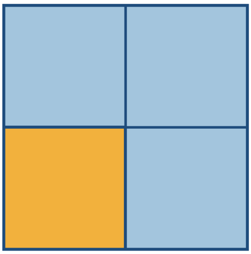


Рис. 32. $A_1=\frac{1}{4}$.

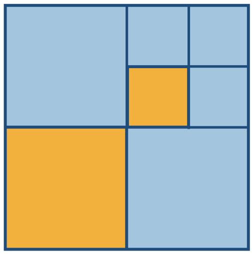


Рис. 33. $A_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$.

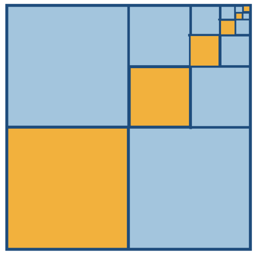


Рис. 34. $A_k=\frac{1}{4}A_{k-1}$.

Потім він відзначає, що це точно одна третина площі квадрата, який їх обмежує, оскільки дві додаткові ідентичні копії цієї послідовності повністю заповнюють його (просто зсуньте наші квадрати вліво або вниз). Таким чином, ця нескінченна сума точно дорівнює $\frac{1}{3}$, і тому загальна площа дорівнює A_0 плюс це, або $A_0\cdot\frac{4}{3}$ (рис. 35).

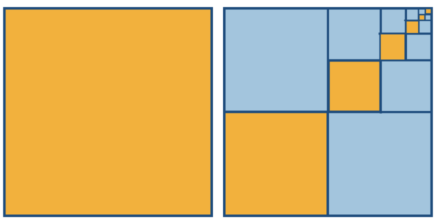


Рис. 35. Площа параболи – сума жовтих областей квадратів.

Відео з майже Архімедівським доведенням сум геометричної прогресії (7 хвилин): https://www.youtube.com/watch?v=JteQEN1XPyc

Назва (альтернативна назва)	Шлефлі Коксетер	Прозорий	Непрозорий	Розгортка	Вершинна фігура
Зрізаний тетраедр	{3,3}	(Обертання)			3.6.6
Кубооктаедр (ромботетраедр)	r{4,3} або rr{3,3} або	(Обертання)			3.4.3.4
Зрізаний куб	t{4,3}	(Обертання)			3.8.8
Зрізаний октаедр (зрізаний тетратераедр)	t{3,4} або tr{3,3} або	(Обертання)			4.6.6
Ромбокубооктаедр (малий ромбокубооктаедр)	rr{4,3}	(Обертання)			3.4.4.4
Зрізаний кубооктаедр (великий ромбокубооктаедр)	tr{4,3}	(Обертання)			4.6.8
Кирпатий куб (кирпатий кубоктаедр)	sr{4,3}	(Обертання)			3.3.3.3.4
Ікосододекаедр	r{5,3}	(Обертання)			3.5.3.5
Зрізаний додекаедр	t{5,3}	(Обертання)			3.10.10
Зрізаний ікосаедр	t{3,5}	(Обертання)			5.6.6
Ромбоікосододекаедр (малий ромбоікосододекаедр)	rr{5,3}	(Обертання)			3.4.5.4
Ромбозрізаний ікосододекаедр	tr{5,3}	(Обертання)			4.6.10
Кирпатий додекаедр (кирпатий ікосододекаедр)	sr{5,3}	(Обертання)			3.3.3.3.5

Рис. 36. Архімедові тіла.

3.7 Тривимірні архімедові тіла та архімедові графи.

Архімедові тіла (рис. 36) – це 13 опуклих багатогранників, які здебільшого виходять з Платонових тіл «зрізанням кутів», тобто мають як грані два або більше типів правильних багатокутників, що примикають до ідентичних вершин. Тут «ідентичні вершини» означають, що для будь-яких двох вершин існує ізометрія всього тіла, яка переводить одну вершину в іншу.

Архімедові тіла названі на честь Архімеда, який обговорював їх у нині втраченій праці. Папп посилається на цю роботу і стверджує, що Архімед перелічив 13 багатогранників. За часів Відродження художники та математики цінували чисті форми і перевідкрили їх усі. Ці дослідження були майже повністю завершені близько 1620 року Іоганном Кеплером, який визначив поняття призм, антипризм і неопуклих тіл, відомих як тіла Кеплера-Пуансо. (Про них і про Платонові тіла-багатогранники ми говорили раніше в «П'яти постулатах геометрії Всесвіту Евкліда»: https://www.doi.org/10.5281/zenodo.17286062)

Подовжений квадратний гіробікупол (псевдоромбокубооктаедр).

Кеплер, можливо, знайшов також *подовжений квадратний гіробікупол* (псевдоромбокубооктаедр) – принаймні, він стверджував, що існує 14 архімедових тіл. Однак його опубліковані переліки включають лише 13 однорідних багатогранників.

Цікаво, що іон полiванадату $[V_{18}O_{42}]^{12-}$ має псевдоромбокубооктаедральну структуру, в якій кожна квадратна грань діє як основа піраміди VO_5 (рис. 37).

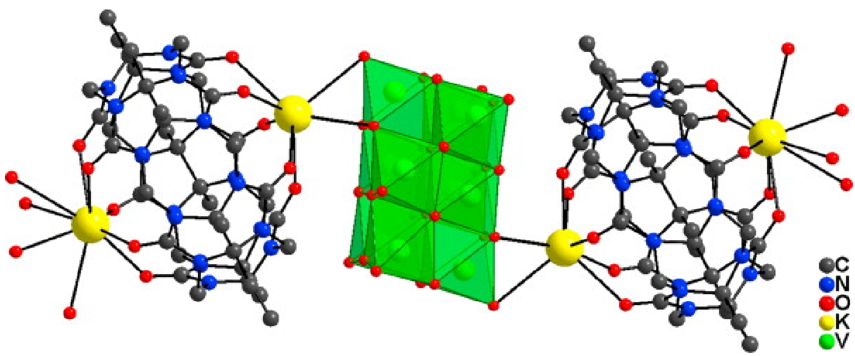


Рис. 37. Молекула поліванадату.

У теорії графів архімедів граф (рис. 38) – це граф, який утворює скелет одного з архімедових тіл. Отже, існує 13 архімедових графів, і всі вони є регулярними, поліедральними (а отже, також 3-вершинно зв'язними планарними) та гамільтоновими (мають шлях, який проходить через кожну вершину даного графа рівно один раз).

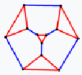
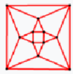
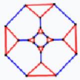
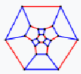
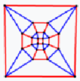
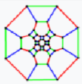
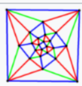
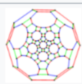
Назва	Граф	Степінь	Ребер	Вершин	Порядок
Граф зрізаного тетраедра		3	18	12	24
Граф кубооктаедра		4	24	12	48
Граф зрізаного куба		3	36	24	48
Граф зрізаного октаедра		3	36	24	48
Граф ромбокубооктаедра		4	48	24	48
Граф зрізаного кубооктаедра (Великий ромбокубооктаедр)		3	72	48	48
Граф кирпатого куба		5	60	24	24
Граф ікосододекаедра		4	60	30	120
Граф зрізаного додекаедра		3	90	60	120
Граф зрізаного ікосаедра		3	90	60	120
Граф ромбоікосододекаедра		4	120	60	120
Граф ромбозрізаного ікосододекаедра		3	180	120	120
Граф кирпатого додекаедра		5	150	60	60

Рис. 38. Архімедові графи.

Перше чітке твердження про існування псевдоромбокубооктаедра було зроблено в 1905 році Дунканом Соммервілем. Ґрунтуючись на існуванні псевдоромбокубооктаедра, Грюнбаум запропонував термінологічну відмінність, в якій архімедове тіло визначається як таке, що має одну й ту саму вершинну фігуру в кожній вершині (включаючи подовжений квадратний гіробікупол), тоді як однорідний багатогранник визначається як тіло, у якого будь-яка вершина симетрична будь-якій іншій (що виключає гіробікупол).

Подовжений квадратний гіробікупол або псевдоромбокубооктаедр (або подовжений чотирисхилий повернутий бікупол) – тіло, яке зазвичай не вважається архімедовим тілом, хоча його грані є правильними багатокутниками і багатокутники навколо кожної вершини ті самі, але, на відміну від 13 архімедових тіл, багатогранник не має глобальної симетрії, яка переводить будь-яку вершину в будь-яку іншу (хоча Грюнбаум пропонував додати багатогранник до традиційного списку архімедових тіл як 14-те тіло).

3.8 Куля, вписана в циліндр, і Делоська задача про подвоєння куба.

Співвідношення об'ємів циліндра та вписаної в нього кулі дорівнює $\frac{3}{2}$. *Співвідношення площ поверхні циліндра та вписаної в нього кулі також дорівнює* $\frac{3}{2}$:

Це твердження 34 трактату «Про кулю і циліндр», що містить результат, яким найбільше пишався Архімед (рис. 39):

$$\frac{V_{\text{циліндра}}}{V_{\text{кулі}}} = \frac{3}{2}, \quad \frac{S_{\text{циліндра}}}{S_{\text{кулі}}} = \frac{3}{2}$$

Він зміг знайти абсолютно точне співвідношення між об'ємами кулі та циліндра, в який вона вписана. Йдеться про випадок, коли діаметр кулі дорівнює як діаметру основи циліндра, так і його висоті. Об'єм циліндра виходить у півтора рази $\left(\frac{3}{2}\right)$ більше об'єму кулі. Таке ж співвідношення і у площ їхніх поверхонь. Як ми вже говорили, Архімед навіть заповів висікти зображення кулі, вписаної в циліндр, на своєму надгробному пам'ятнику замість епітафії. У I столітті до н. е. Цицерону, за його словами, вдалося побачити цей надгробок. До нашого часу він, на жаль, не зберігся.

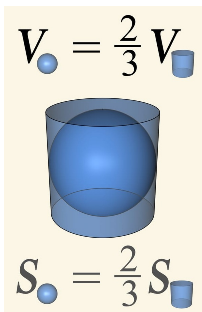


Рис. 39. Куля і циліндр.

На рис. 40 на одній стороні терезів знаходиться прямий круговий циліндр, а на іншій стороні — прямий круговий конус і півсфера.

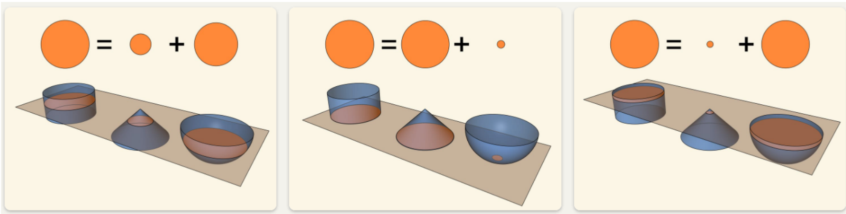


Рис. 40. Урівноваження циліндра, півсфери та конуса.

Справа в тому, що якщо ми проведемо площину, паралельну основам фігур, площа кола, яке утворюється в перерізі циліндра, дорівнює сумі площ кіл, які утворюються в перерізі даного конуса і сфери. Неважко (у наш час!) перевірити прямим обчисленням, що рівність площ буде справедлива для будь-якого положення січної площини.

Делоська задача

У V столітті до н. е. Афіни спустошила епідемія чуми, однією з жертв якої став знаменитий Перікл (495–429 рр. до н. е.), афінський політичний діяч, якому вдалося зібрати в Афінах багато талановитих людей з усіх кінців грецького світу. Тоді група афінян вирішила йти до оракула Аполлона в Дельфах, щоб дізнатися, як можна зупинити чуму. За переказами, отримана відповідь була такою: треба зробити новий кубічний вівтар замість старого так, щоб за об'ємом він був рівно вдвічі більше (рис. 41).

В цій легенді – в одному з двох її варіантів – ставиться знаменита задача подвоєння куба, відома як «Делоська задача»: як побудувати куб об'ємом удвічі більше заданого, використовуючи тільки лінійку і циркуль.

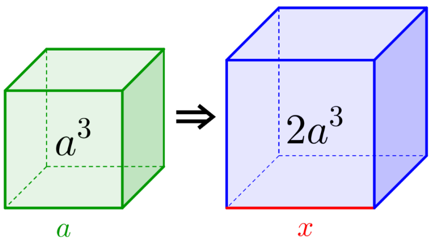


Рис. 41. Подвоєння куба.

З книги Архімеда «Про кулю і циліндр» зрозуміло: він цілком усвідомлював, що для подвоєння куба неможливо йти простим інтуїтивним шляхом – просто подвоїти його ребро. Адже якщо ребро куба $l_1 = a$, його об'єм становитиме $V_1 = a^3$; подвоївши ребро $l_2 = 2a$, ми отримаємо об'єм нового куба $V_2 = (2a)^3 = 8a^3$, а це означає, що $V_2 = 8V_1$. Об'єм куба не подвоївся, а збішився у вісім разів.

Сьогодні ми знаємо, що розв'язати «Делоську задачу» за допомогою виключно лінійки і циркуля неможливо, тому що її розв'язок є ірраціональним числом. Так, щоб подвоїти куб з ребром a, ребро нового куба має дорівнювати

$$l_{\text{нове}} = a\sqrt[3]{2}$$

3.9 Стомахіон, спіралі, арбелос і салінон.

У математиці спіраль — це крива, яка виходить з точки і віддаляється від неї в міру обертання навколо цієї точки. Спіраль є підтипом вихрових візерунків — широкої групи, яка також включає концентричні об'єкти.

Рис. 42. Виробничий ніж у формі спіралі Архімеда.

Двовимірна, або плоска спіраль може бути легко описана з використанням полярних координат, де радіус r є монотонною неперервною функцією кута φ:

$$r = r(\varphi)$$

Коло можна розглядати як вироджений випадок (функція не є строго монотонною, а радше сталою).

У декартових координатах крива має параметричне представлення:

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi$$

Спіраль Архімеда (рис. 42 і 43) являє собою криву, утворену точкою, яка з постійною швидкістю віддаляється від вершини променя, що обертається з постійною кутовою швидкістю навколо своєї вершини ($r = a\varphi$).

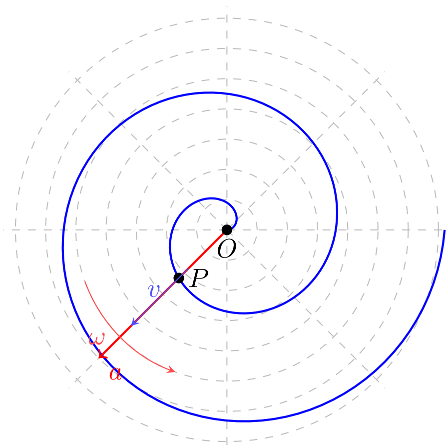


Рис. 43. Спіраль Архімеда.

Крім спіралі Архімеда, деякі з найважливіших типів двовимірних спіралей (рис. 44):

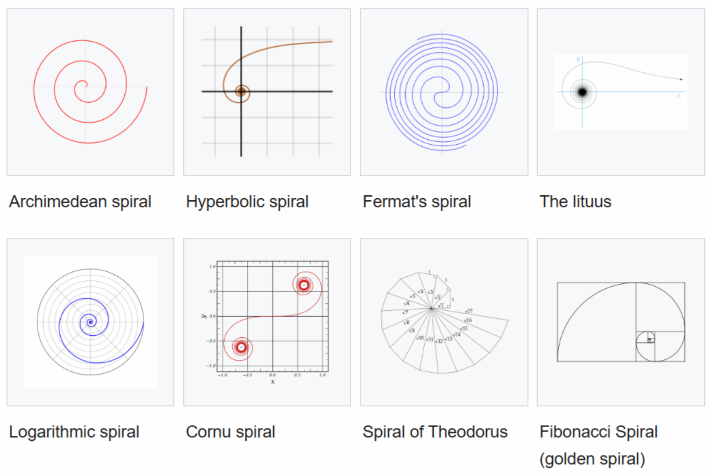


Рис. 44. Види спіралей.

- ***Гіперболічна спіраль:*** $r = \frac{a}{\varphi}$,
- ***Спіраль Ферма:*** $r = a\varphi^{1/2}$,
- ***Літуус:*** $r = a\varphi^{-1/2}$,
- ***Логарифмічна спіраль:*** $r = ae^{k\varphi}$,
- ***Спіраль Корню*** або ***клотоїда:*** параметричне представлення через інтеграли Френеля

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du, \quad y(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du,$$

- ***Спіраль Фібоначчі*** та ***золота спіраль:*** побудовані на основі послідовності Фібоначчі з кутовим кроком $\theta = \frac{2\pi}{\varphi^2} \approx 137{,}5$, де $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотий перетин. Золота спіраль є логарифмічною спіраллю з коефіцієнтом зростання, пов'язаним із золотим перетином: $r = a\varphi^{2\theta/\pi}$,
- ***Спіраль Теодора:*** апроксимація спіралі Архімеда, складена з прилеглих прямокутних трикутників. (Про неї раніше ми згадували в роботі https://www.doi.org/10.5281/zenodo.17100433 – «Піфагор — архітектор числового порядку»).

У трактаті «Про спіралі» Архімед вивчає спіраль, що згодом отримала його ім'я, і розглядає дуже цікаву її властивість:

> *«Поверхня, обмежена спіраллю при першому оберті, становить третину кола, якого вона торкається».*

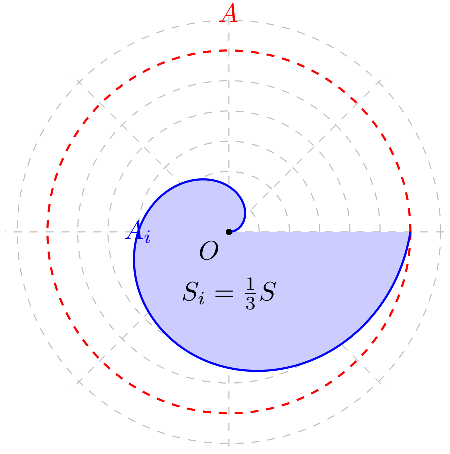


Рис. 45. Площа, обмежена спіраллю після одного повного обороту.

Вищесказане Архімед доводить методом вичерпування, а також використовує доведення від супротивного, констатуючи, що площа утвореної фігури не може бути ні більшою, ні меншою за третину кола (рис. 45).

Деякі фахівці стверджують, що глибинною метою, яку Архімед переслідував у своєму трактаті «Про спіралі», було знайти розв'язання задач подвоєння куба, трисекції кута і квадратури кола, хоча при цьому доведеться знехтувати однією з початкових умов: задачу треба було розв'язувати виключно за допомогою циркуля і лінійки, а побудова спіралі потребує кінематичних операцій.

Стомахіон - гра-головоломка.

У давньогрецькій геометрії Стомахіон (Остомахіон), також відомий як *loculus Archimedius* (від латинського «скринька Архімеда») або синтомахіон – математичний трактат, приписуваний Архімеду.

Слово «Остомахіон» походить від грецького *osteon* «кістка» і *mache* «боротьба, битва, змагання».

Стомахіон (рис. 46) був головоломкою, схожою на танграм, в яку, можливо, грали кілька осіб фігурками, зробленими з кістки. Достеменно невідомо, що з'явилося раніше –

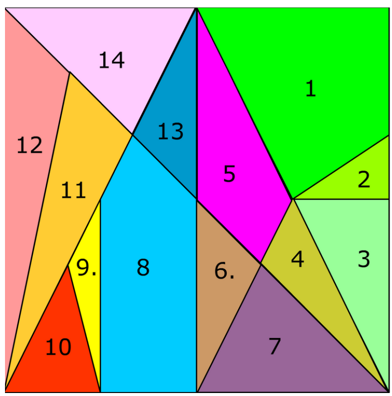


Рис. 46. Один із способів складання стомахіона.

геометричне дослідження Архімедом цієї фігури чи гра.

Гра являє собою головоломку з 14 частин, що утворюють квадрат. Якщо ми накладемо фігури зі «Стомахіона» на квадрат стороною в 12 клітинок, площа кожної фігури буде такою ж, як на рис. 46.

Одна з форм гри, про яку свідчать класичні тексти, – це створення різних об’єктів, тварин, рослин шляхом перестановки частин: слон, дерево, собака, що гавкає, корабель, меч, вежа тощо (рис. 47). Інше припущення полягає в тому, що за допомогою неї тренували та розвивали навички пам’яті у молодих людей.

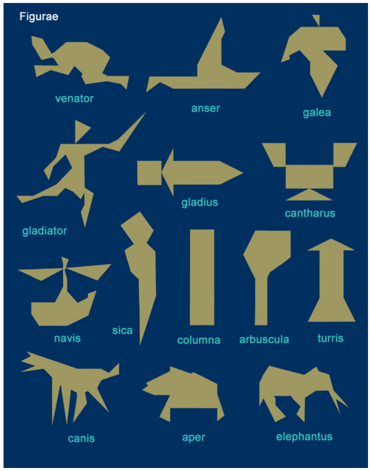


Рис. 47. Фігури стомахіона.

Джеймс Гоу у своїй «Короткій історії грецької математики» (1884) у виносках зазначає, що метою було скласти частини назад у коробку, і цю точку зору також висловлював У. У. Раус Болл у деяких проміжних виданнях «Математичних есе і розваг».

Лише в 2003 році вдалося провести строгий комбінаторний аналіз, який показав, що існує 17 152 способи скласти фігури зі «Стомахіона» в цілий квадрат (без повороту або дзеркального відображення).

Однак цей підрахунок був поставлений під сумнів, оскільки збережені зображення головоломки показують її в прямокутнику, а не в квадраті, і повороти або відображення частин могли бути недозволеними.

Арбелос (чоботарський ніж).

У «Книзі лем» представлена геометрична фігура *арбелос*, що грецькою означає «чоботарський ніж», оскільки за формою вона нагадує цей інструмент. Арбелос – фігура, обмежена трьома дотичними одна до одної половинами кіл. На рис. 48 арбелос відповідає затемненій частині.

У цієї фігури є деякі цікаві властивості, які можна було б включити в початковий курс геометрії.

Можливо, найцікавіша з них — це так звані «спарені кола Архімеда» (або «кола-близнюки»): з точки C добудовується перпендикуляр до прямої AB до перетину з колом найбільшого діаметра. Даний перпендикуляр ділить арбелос на дві фігури. Потім в кожну з цих отриманих фігур вписують кола C_1 і C_2 так, щоб вони торкалися з різних боків перпендикуляра, і кожне з них торкалося великого та малого кола.

Цікаво, що площі цих кіл будуть рівні незалежно від місцезнаходження точки C, через що їх і називають *колами-близнюками Архімеда*. Існують також інші кола, пов'язані з арбелосом, вони теж носять особисті назви — коло Аполлонія, коло Паппа і коло Банкофа.

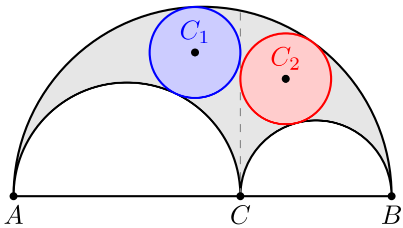


Рис. 48. Арбелос з «колами-близнюками» Архімеда (C_1 і C_2).

Салінон (сільничка).

Ще одна фігура, представлена в «Книзі лем», називається *салінон*, що, згідно з інтерпретацією історика математики Томаса Хіта, означає «сільничка».

На рис. 49 нижче A, D, O, E і B – п'ять точок, що лежать на одній прямій, таких, що $AO = OB$ і $AD = EB$. В одній півплощині побудовані півкола з діаметрами AB, AD і EB. В іншій півплощині побудоване півколо з діаметром DE. Фігура, обмежена цими півколами, і є салінон.

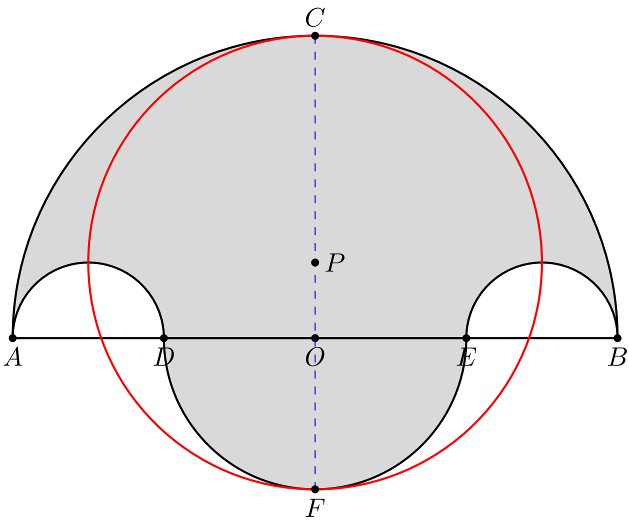


Рис. 49. Салінон і коло рівної йому площі (показане червоним).

3.10 Задача Архімеда про биків.

На розв'язання якої математичної задачі в історії пішло найбільше часу, понад 2000 років? Це задача Архімеда про биків — трактат 287–212 рр. до н. е., у якому античний учений поставив математичну задачу, повне розв'язання якої було знайдено лише в 1965 році!

«Задачу про биків» виявив Готхольд Ефраїм Лессінг у грецькому рукописі, що складається з вірша у 44 рядки, текст задачі було опубліковано у Брауншвейзі в 1773 році. Авторство Архімеда в знавців античності не викликає сумнівів, оскільки і за стилем, і за характером трактат відповідає математичним епіграмам тієї епохи. Задача про биків авторства Архімеда згадується в одному з античних схоліїв (коментарів) до діалогу Платона «Хармід, або Про розсудливість». У давньогрецькій міфології бики Геліоса (рис. 50), також звані волами Сонця, — це бики, що випасалися на острові Тринакія (вважається сучасною Сицилією).

Рис. 50. Супутники Одіссея викрадають биків Геліоса (фреска Пеллегріно Тібальді, 1554/56).

Архімед пропонує читачеві знайти кількість худоби бога Сонця Геліоса за таких умов:

- у Геліоса було чотири стада, кожне з яких відрізнялося за кольором;
- кількість білих биків дорівнювала $= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$ темних + рудим бикам;
- темних биків $= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$ строкатих + рудим бикам;
- строкатих биків $= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)$ білих + рудим бикам;
- білих корів $= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$ темного стада;
- темних корів $= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$ строкатого стада;
- строкатих корів $= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$ рудого стада;
- рудих корів $= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)$ білого стада.

Після цього Архімед пропонує знайти кількість биків і корів різного кольору, вказуючи, що той, у кого це вийде, не є невігласом.

Друга частина задачі включає додаткові умови:

- кількість білих і темних биків — квадратне число;

- кількість строкатих і рудих биків — трикутне число.

Той, хто зможе за цих умов визначити число голів худоби в стадах Геліоса, на думку Архімеда, є мудрецем.

Розв'язання першої частини задачі зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Якщо позначити кількість биків відповідного кольору символами Б, Т, С і Р, а корів — б, т, с і р, то перші рівняння можна відобразити таким чином:

- $\text{Б} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\text{Т} + \text{Р} \rightarrow 6\text{Б} = 5\text{Т} + 6\text{Р}$;
- $\text{Т} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\text{С} + \text{Р} \rightarrow 20\text{Т} = 9\text{С} + 20\text{Р}$;
- $\text{С} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)\text{Б} + \text{Р} \rightarrow 42\text{С} = 13\text{Б} + 42\text{Р}$.

Послідовно розв'язуючи всі сім рівнянь, отримаємо такі значення (на рис. 51 показано найменше можливе розв'язання задачі, кожна окрема іконка представляє собою близько 10^{206543} тварин):

Б — 10 366 482

Т — 7 460 514

С — 7 358 060

Р — 4 149 387

б — 7 206 360

т — 4 893 246

с — 3 515 820

р — 5 439 213

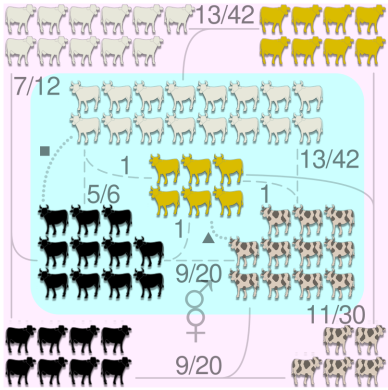


Рис. 51. Розв'язання задачі Архімеда про биків.

Таким чином, загальна кількість голів худоби у Геліоса становила 50 389 082. Друга частина задачі, тобто пошук розв'язання, яке задовольняло б умовам першої і другої частини, зводиться до рівняння Пелля (діофантове рівняння виду $x^2 - ny^2 = 1$, де n — натуральне число, що не є квадратом). Її розв'язання було опубліковано в 1880 році. Загальна кількість биків приблизно дорівнює $7{,}76 \times 10^{206\,544}$. Щоб записати всі 206 545 цифр, необхідно 660 сторінок по 2500 знаків на кожній!

І, наостанок, цікаве відео: Як обдурити, використовуючи наочні докази (18 хвилин): https://www.youtube.com/watch?v=unJxBIsM6iA

Список використаних джерел

1. Воскобойніков В. Про Йосипа Прекрасного, Архімеда, Миколая Чудотворця, Феодосія Печерського, Авраама Лінкольна, Джона Ленона, Біла Гейтса. Київ: Грані-Т, 2008. 144 с. (Серія «Життя видатних дітей»).

2. Піфагор. Філософський енциклопедичний словник / В. І. Шинкарук (гол. редкол.) та ін.; Інститут філософії імені Григорія Сковороди НАН України. Київ: Абрис, 2002. С. 481.

3. Туренко В. Е. Між земним і небесним: тексти піфагорійців. Київ: Дух і Літера, 2025. 704 с.

4. Туренко В. Чи був Піфагор політиком? (історико-філософська спроба переосмислення). Політологічний вісник. 2022. № 88. С. 149–159.

5. Узбек К. М. Антична математика і становлення системних підвалин філософського раціоналізму: дис. ... д-ра філос. наук: 09.00.09. Київ, 2005. 39 с.

6. Узбек К. М. Фрагменти побудови античної науки, філософії і культури. Донецьк: Східний видавничий дім, 2010. 234 с.

7. Українська радянська енциклопедія: у 12 т. / гол. ред. М. П. Бажан; редкол.: О. К. Антонов та ін. 2-ге вид. Київ: Головна редакція УРЕ, 1974–1985.

8. Artmann B. Euclid's «Elements» and its prehistory. Apeiron. 1991. Vol. 24. P. 1–47.

9. Boyer C. B. A History of Mathematics. New York: Wiley, 1991. ISBN 0-471-54397-7.

10. Brooker M. I. H., Connors J. R., Slee A. V. Euclid. CD-ROM. Melbourne: CSIRO-Publ., 1997.

11. Burton H. E. The optics of Euclid. J. Opt. Soc. Amer. 1945. Vol. 35. P. 357–372.

12. Clagett M. Archimedes in the Middle Ages. Madison, WI: University of Wisconsin Press, 1964–1984. 5 vols.

13. Dijksterhuis E. J. Archimedes. Princeton: Princeton University Press, 1987. ISBN 0-691-08421-1.

14. Fowler D. H. An invitation to read Book X of Euclid's Elements. Historia Mathematica. 1992. Vol. 19. P. 233–265.

15. Gow M. Archimedes: Mathematical Genius of the Ancient World. Enslow Publishers, Inc., 2005. ISBN 0-7660-2502-0.

16. Hasan H. Archimedes: The Father of Mathematics. Rosen Central, 2005. ISBN 978-1-4042-0774-5.

17. Heath T. L. Works of Archimedes. Dover Publications, 1897. ISBN 0-486-42084-1.

18. Itard J. Lex livres arithmetiqués d'Euclide. Paris: Hermann, 1961.

19. Knorr W. R. The evolution of the Euclidean Elements. Dordrecht: Reidel, 1975.

20. Mueller I. Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements. Cambridge (Mass.): MIT Press, 1981.

21. Netz R., Noel W. The Archimedes Codex. Orion Publishing Group, 2007. ISBN 0-297-64547-1.

22. Pickover C. A. Archimedes to Hawking: Laws of Science and the Great Minds Behind Them. Oxford: Oxford University Press, 2008. ISBN 978-0-19-533611-5.

23. Seidenberg A. Did Euclid's Elements, Book I, develop geometry axiomatically? Archive for History of Exact Sciences. 1975. Vol. 14. P. 263–295.

24. Simms D. L. Archimedes the Engineer. Continuum International Publishing Group Ltd., 1995. ISBN 0-7201-2284-8.

25. Stein S. Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka? Mathematical Association of America, 1999. ISBN 0-88385-718-9.

26. Taisbak C. M. Division and logos. A theory of equivalent couples and sets of integers, propounded by Euclid in the arithmetical books of the Elements. Odense UP, 1982.

27. Tannery P. La géometrié grecque. Paris: Gauthier-Villars, 1887.