Від механічного калькулятора до теорії монад: універсальний розум Лейбніца в інтегруванні світу ідей.

***

Нова вчителька математики, запитавши клас, хто такі Ньютон і Лейбніц, отримала відповідь, що це сучасний гурт – дует співаків, у якому обидва ще й мають нетрадиційну орієнтацію!

Вся в шоці та сльозах, математичка біжить до завуча і докладно розповідає про те, що сталося. Завуч, уважно вислухавши: «Ну, що Ви так переживаєте?! Діти не зобов'язані знати напам'ять імена всіх закордонних футболістів!»

У вчительки ще більший шок, прибігши до директора, розповідає йому про те, що їй відповів завуч. Директор: «Господи, ну подумаєш, переплутав наш завуч голлівудських акторів із футболістами, що тут страшного!»

1.1 Нотація Лейбніца: диференціал, похідна та інтегральне числення.

Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716) – один із найвеличніших мислителів, чия математична спадщина мала вирішальне значення для розвитку науки. Народився він 1 липня 1646 року в Лейпцигу і став одним з останніх універсальних геніїв – філософом, математиком, фізиком, юристом, істориком та дипломатом. Його внесок у математику неможливо переоцінити: він незалежно від Ньютона створив математичний аналіз, розробив бінарну систему числення, заклав основи математичної логіки та зробив суттєвий внесок у багато інших галузей математики.

Як виглядав Лейбніц? Ви можете бачити офіційний портрет та неофіційний бюст, на якому немає великої перуки, що слугувала причиною насмішок навіть у той час. Імовірно, Лейбніц носив перуку, щоб приховати кісту на голові (рис. 1).

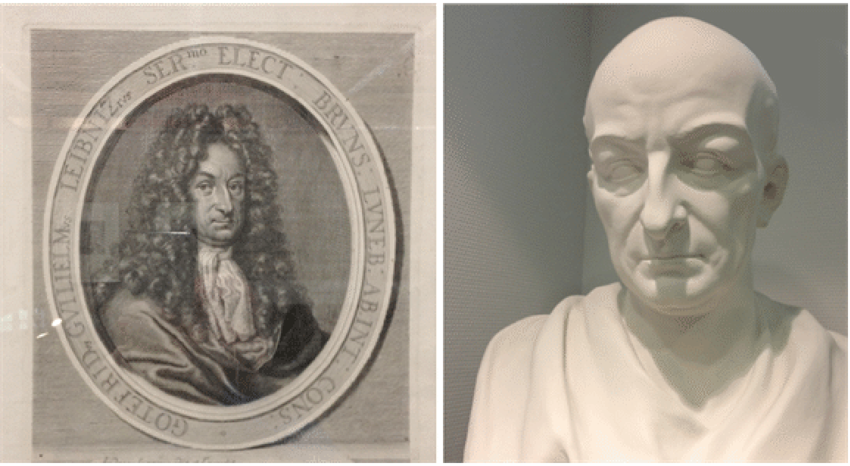


Рис. 1. Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716)

Як особистість, Лейбніц був ввічливим і стриманим. У певному сенсі його можна було б назвати диваком, який намагався докопатися до суті речей. Вважається, що йому було дуже важко налаштуватися на розмову зі співрозмовником. Лише небагато інтелектуалів того часу, у тому числі й Лейбніц, ніколи не одружувалися; проте наш герой тим не менш користувався успіхом у дам.

Як придворна людина, Лейбніц завжди прагнув піднятися якомога вище, але, не маючи пристрасті до полювання чи випивки, він не вписувався у вищі кола, на які працював. Наприкінці життя, коли Георг Перший з Ганновера став королем Англії, Лейбніц мав відправитися з ним до Англії. Але Лейбніц, перш ніж вирушити туди, повинен був написати історичну працю, над якою він нібито працював уже 30 років. Якби він встиг дописати її до своєї смерті, та йому дозволили б відпливти до Англії, то тоді у нього міг би бути вельми цікавий діалог з Ньютоном.

В архіві Лейбніца, окрім його паперів та калькулятора, є ще одна річ – складний стілець, який він брав із собою у подорожі і яким він користувався також як столом у каретах, щоб продовжувати писати в дорозі.

Лейбніц завжди турбувався про свій статус – часто підписувався як *Gottfried von Leibniz*, хоча ніхто не знав, звідки взялася ця частка *von*. Як ще один символ відзнаки за свої відкриття, він хотів мати медаль, яка була б присвячена двійковим числам (рис. 2). Він розробив детальний зовнішній вигляд, на якому був присутній надпис *omnibus ex nihilo ducendis; sufficit unum* («все може бути виведене з нічого; все, що потрібно – це 1»). Але цю медаль йому так ніхто і не зробив.

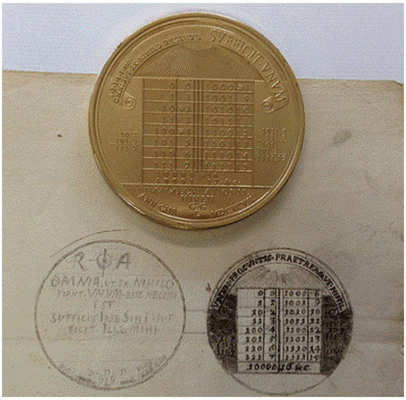


Рис. 2. Медаль, розроблена Лейбніцем, що демонструє бінарну систему.

Головним математичним досягненням Лейбніца стало створення диференціального та інтегрального числення. Працюючи незалежно від Ньютона, Лейбніц розробив власний підхід, заснований на концепції нескінченно малих величин.

Нотація Лейбніца

Одним із найвеличніших досягнень Лейбніца стала розробка математичної нотації, яка використовується досі:

- $\frac{dy}{dx}$ – похідна функції
- $\int f(x)\,dx$ – інтеграл функції
- $\frac{d^n y}{dx^n}$ – похідна n-го порядку
- dx, dy – диференціали
- $:$ – знак ділення
- $\cdot$ – знак множення

Ця нотація виявилася настільки вдалою, що перевершила флюксіонні позначення Ньютона ($\dot{x}$, $\ddot{x}$) і стала стандартом у математиці.

Концепція диференціала

Лейбніц ввів поняття диференціала dx як нескінченно малого приросту змінної x. Для функції $y = f(x)$ диференціал визначається як:

$$dy = f'(x)\,dx \tag{1}$$

Він інтерпретував диференціал через співвідношення сторін нескінченно малого трикутника, що дало змогу пов'язати локальні властивості кривої з її аналітичним виразом (рис. 3).

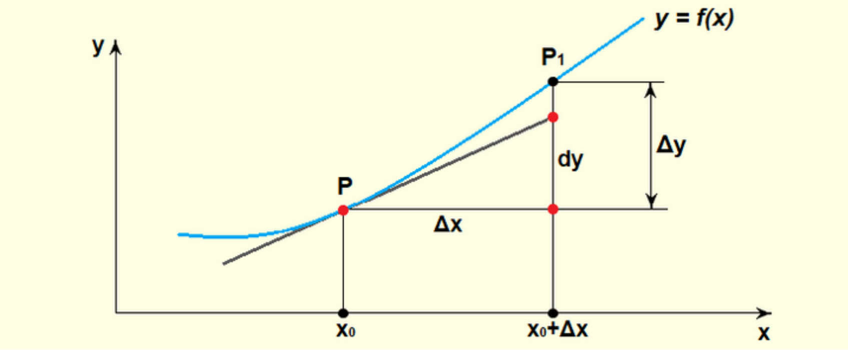


Рис. 3. Геометрична інтерпретація диференціала: дотична до кривої.

Похідна функції в нотації Лейбніца записується як:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2}$$

Правила диференціювання Лейбніца

Нехай $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – диференційовні функції. Тоді:

1. Правило суми: $d(u + v) = du + dv$
2. Правило добутку: $d(uv) = u\,dv + v\,du$
3. Правило частки: $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
4. Правило складної функції: якщо $y = f(u)$, $u = g(x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{3}$$

Інтегральне числення

Лейбніц ввів символ інтеграла $\int$ (стилізована літера S від лат. summa – сума), розуміючи інтеграл як суму нескінченно великого числа нескінченно малих величин:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{4}$$

де $F'(x) = f(x)$.

Основна теорема інтегрального числення

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і $F(x)$ – її первісна, то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{5}$$

Ця теорема встановлює фундаментальний зв'язок між диференціюванням та інтегруванням.

Формула Лейбніца: правило для похідної добутку

Лейбніц узагальнив правило диференціювання добутку на похідні вищих порядків:

Для n-ї похідної добутку двох функцій $u(x)$ та $v(x)$:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)} \tag{6}$$

де $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – біноміальні коефіцієнти (рис. 4).

Для $n = 2$:

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'' \tag{7}$$

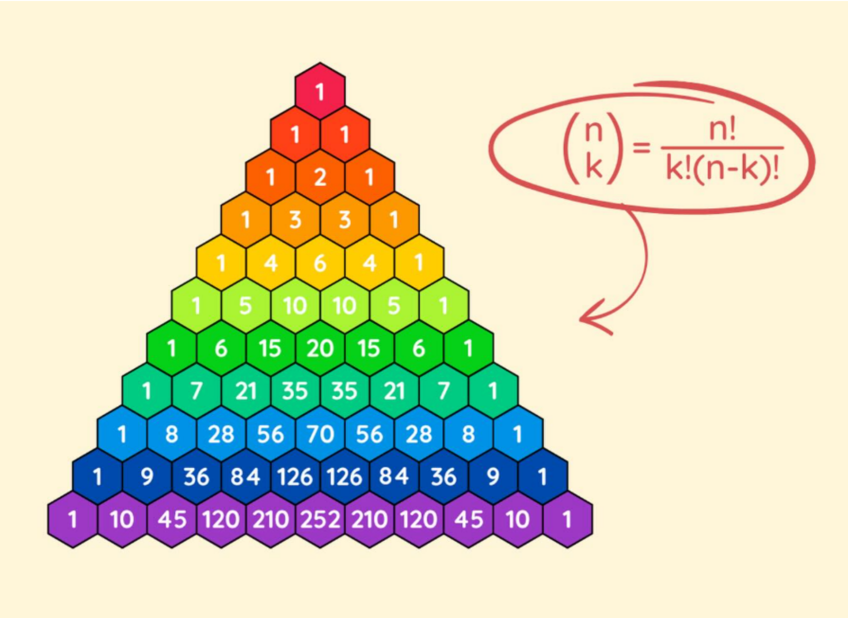


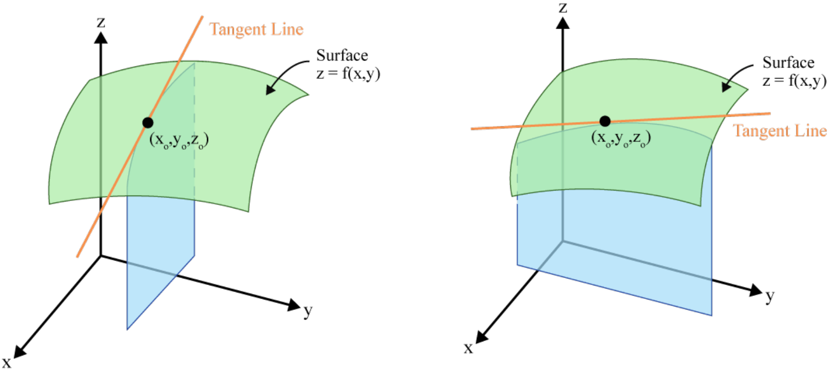
Рис. 4. Комбінації – елементи трикутника Паскаля.

1.2 Розвиток аналізу багатьох змінних і кратні інтеграли.

Хоча сучасний символ часткової похідної ∂ був запроваджений пізніше (остаточно закріпившись у працях Карла Якобі в XIX столітті), саме лейбніцівська концепція диференціала зробила можливим опис функцій багатьох змінних. Лейбніц розглядав диференціал dz як повну зміну величини, що виникає внаслідок нескінченно малих змін її аргументів, що стало фундаментом для всієї подальшої математичної фізики.

Функції кількох змінних та часткові похідні

Лейбніц, який у 1692 році першим ввів у математику термін «функція», заклав підґрунтя для дослідження залежностей від багатьох параметрів. У своїх роботах він оперував частковими приростами, хоча й позначав їх звичайним символом d, вказуючи в контексті, які змінні залишаються сталими. Геометричну інтерпретацію цих операцій як нахилу дотичних до поверхні у відповідних напрямках наочно продемонстровано на рис. 5.



Slope of the surface in the x-direction

Slope of the surface in the y-direction

Рис. 5. Геометрична інтерпретація часткових похідних.

У сучасній нотації ці часткові похідні мають вигляд:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \tag{8}$$

Повний диференціал та умова цілісності

Одним із найважливіших внесків Лейбніца є концепція повного диференціала. Він першим зрозумів, що для функції $z = f(x, y)$ загальна зміна виражається як сума часткових змін:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{9}$$

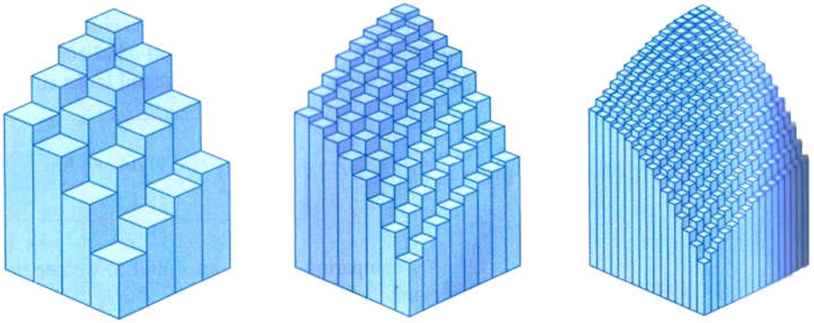
Лейбніц також розробив критерій «точного диференціала», помітивши, що для більшості фізичних задач порядок диференціювання не має значення:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{10}$$

Це спостереження згодом було строго доведене як теорема Шварца і стало ключовим для розвитку термодинаміки та теорії потенціалу.

Кратні інтеграли та елементи об'єму

Лейбніц розглядав інтегрування як підсумовування ($summa$) нескінченної кількості нескінченно малих елементів. У випадку багатьох змінних це привело до ідеї підсумовування «елементів об'єму» ($f(x, y)dxdy$). Процес такого наближення об'єму через сумування прямокутних стовпчиків наочно представлено на рис. 6. Як видно з ілюстрації, при збільшенні кількості розбиттів (n, m) дискретна сума дедалі точніше відтворює реальну форму поверхні.



(a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$ (b) $m = n = 8$, $V \approx 44.875$ (c) $m = n = 16$, $V \approx 46.469$

Рис. 6. Об'єм під поверхнею як границя суми елементарних стовпчиків.

Хоча Лейбніц зазвичай використовував один знак $\int$, логіка його числення прямо вела до сучасних подвійних інтегралів:

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy \tag{11}$$

Повторне інтегрування та заміна змінних

Для обчислення площ та об'ємів Лейбніц та його послідовники (зокрема брати Бернуллі) використовували метод послідовного інтегрування за кожною змінною окремо. Це дозволило звести кратний інтеграл до повторного:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx \tag{12}$$

Заміна змінних та Якобіан

Розвиток лейбніцівської алгебри диференціалів призвів до створення у XIX столітті теорії заміни змінних у кратних інтегралах. Ключовим елементом цього процесу є **якобіан** — визначник матриці частинних похідних, який описує швидкість зміни координат:

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{13}$$

Як наочно продемонстровано на рис. 7, якобіан відіграє роль локального коефіцієнта трансформації простору.

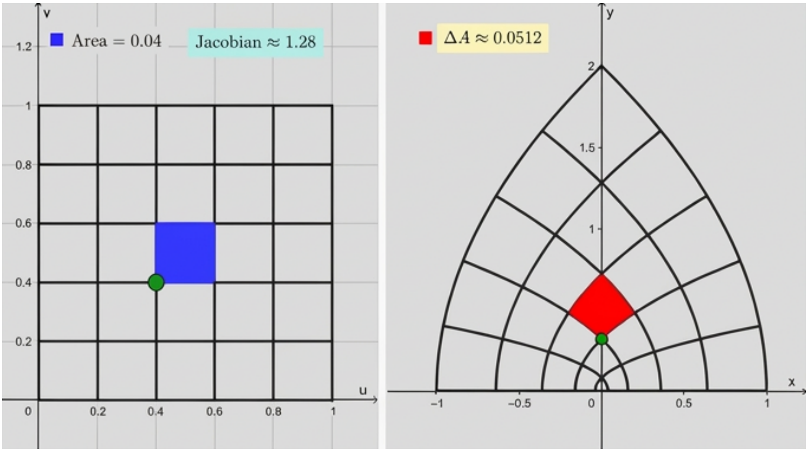


Рис. 7. Геометричний зміст Якобіана: зміна площі елементарної комірки при трансформації координат.

Він показує, у скільки разів змінюється площа нескінченно малого елемента при переході від прямокутної сітки (u, v) до криволінійної (x, y). На наведеному прикладі початкова площа комірки $du\,dv = 0{,}04$ при множенні на якобіан $J \approx 1{,}28$ дає нову площу $\Delta A \approx 0{,}0512$.

Без урахування цього масштабувального множника обчислення інтеграла в новій системі координат було б неможливим, оскільки закон збереження міри (площі чи об'єму) був би порушений:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v)) \cdot |J(u,v)|\,du\,dv \tag{14}$$

Диференціювання під знаком інтеграла (Правило Лейбніца)

Особливим досягненням вченого є формула для диференціювання інтеграла, що залежить від параметра. Цей результат, відомий сьогодні як **інтегральне правило Лейбніца**, пов'язує аналіз однієї та багатьох змінних. Геометрична суть цього правила (рис. 8) полягає у тому, що загальна зміна площі під кривою ΔA складається з варіації самої функції та зміщення меж інтегрування:

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = \underbrace{f(b(t),t)\cdot b'(t)}_{\text{зміна межі } b} - \underbrace{f(a(t),t)\cdot a'(t)}_{\text{зміна межі } a} + \underbrace{\int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\,dx}_{\text{зміна самої функції}} \tag{15}$$

На рис. 8 наочно продемонстровано ці складові: доданок ③ відповідає за приріст площі через рух правої межі $b(t)$, доданок ② — за зміну через рух лівої межі $a(t)$, а центральна область ① відображає зміну площі внаслідок вертикального зміщення самого графіка функції $f(x,t)$ із плином часу.

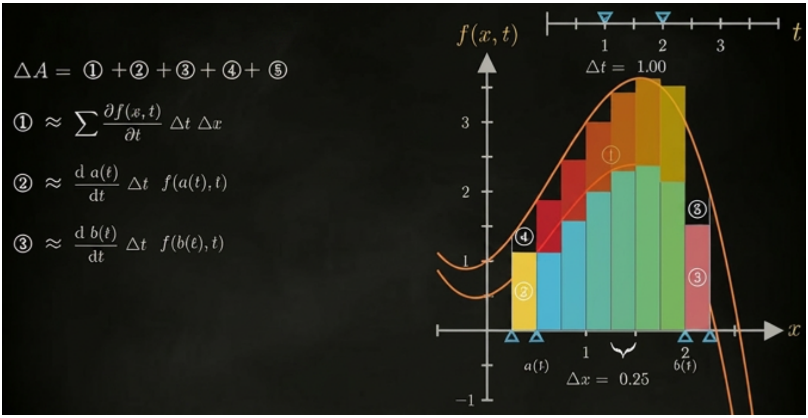


Рис. 8. Геометрична інтерпретація правила Лейбніца.

Це правило продемонструвало неймовірну гнучкість символіки Лейбніца та дозволило розв'язувати складні задачі механіки, де межі інтегрування самі є функціями часу.

1.3 Теорія рядів, π і трикутник Лейбніца.

Лейбніц зробив фундаментальний внесок у теорію нескінченних рядів, отримавши багато важливих результатів. Одним із знаменитих результатів Лейбніца стала формула для обчислення π:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \tag{16}$$

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Використовуючи геометричну прогресію:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \quad \text{при } |x| < 1 \tag{17}$$

Інтегруючи від 0 до 1:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\, dx \tag{18}$$

Ліва частина дорівнює $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, тому

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \tag{19}$$

і як наслідок

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right) = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \ldots \tag{20}$$

На рис. 9 представлено візуальне порівняння збіжності різних нескінченних рядів до числа π.

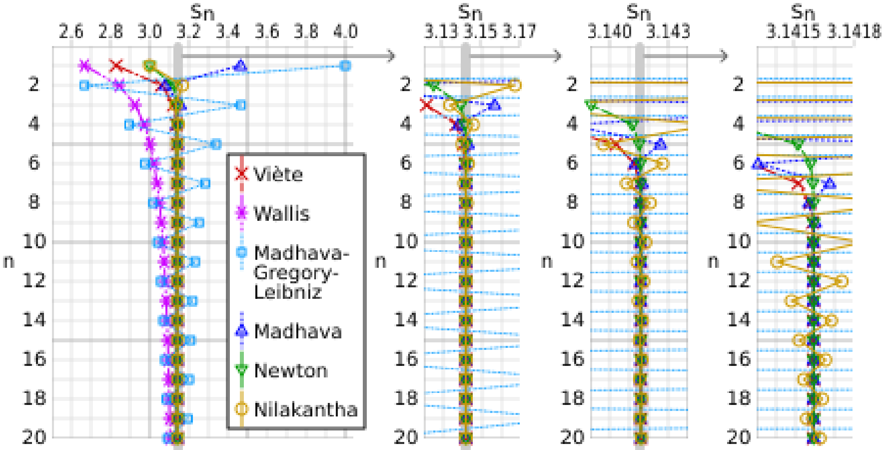
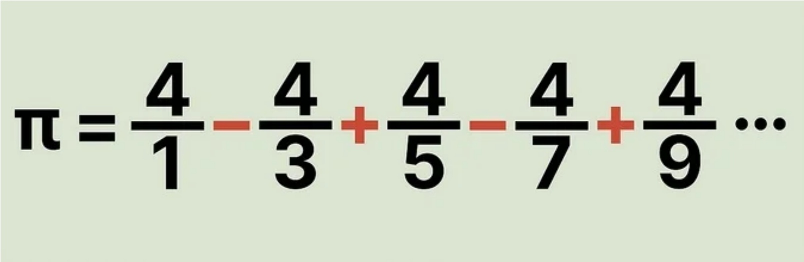


Рис. 9. Порівняння збіжності рядів для обчислення π.

Ряд Лейбніца (на графіку позначений як *Madhava-Gregory-Leibniz*) демонструє характерну «зигзагоподібну» траєкторію. Це наочно ілюструє властивість знакопочережного ряду: кожна наступна часткова сума почергово то перевищує точне значення π, то є меншою за нього, поступово «затискаючи» результат у вужчий діапазон.

Проте графік також виявляє основний недолік цього методу — надзвичайно повільну збіжність. Навіть після 20-ти ітерацій (крайня нижня точка на першому графіку) значення S_n все ще суттєво відхиляється від цільової позначки. Для порівняння, методи Ньютона чи Нілаканти наближаються до π значно швидше, що стає очевидним при десятикратному масштабуванні (наступні підграфіки), де амплітуда коливань ряду Лейбніца все ще залишається помітною, тоді як інші лінії вже зливаються з центральною віссю.

Хоча швидкість наближення до результату є низькою, сама структура отриманого виразу вражає своєю математичною лаконічністю та симетрією. Безпосередній вигляд формули, яку Лейбніц використовував для обчислення π, представлено на рис. 10. Вона демонструє, як фундаментальна константа геометрії може бути виражена через нескінченну суму простих дробів з непарними знаменниками.



$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} \cdots$$

Рис. 10. Візуальне представлення ряду Лейбніца для безпосереднього обчислення числа π.

Цікаво, що пошук подібних закономірностей триває і в наш час. Існує безліч наближень і формул, які дають наближений вираз числа Ейлера e, числа π та інших ірраціональних чисел. У 2012 році американський математик-аматор Харлан Бразерс (Harlan J. Brothers) зумів пов'язати число Ейлера з трикутником Паскаля. Він вивів і довів формулу:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n-1}S_{n+1}}{S_n^2} = e,$$

де S_n — добуток чисел у n-му рядку трикутника.

Раніше, 2007 року, інший математик-ентузіаст Джонас Толоза (Jonas Castillo Toloza) виявив зв'язок між π та оберненими трикутними числами (які розташовані на одній із діагоналей трикутника Паскаля). Трохи згодом було знайдено елегантніше доведення.

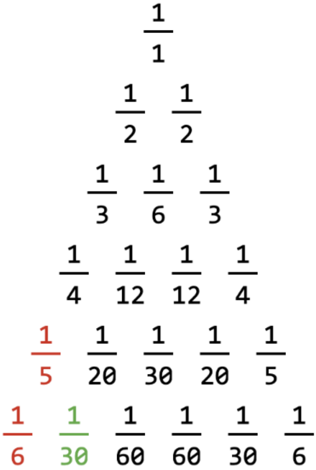
Трикутник Паскаля має зв'язок і з іншим добре відомим рядом — гармонійним. Цей ряд складається з нескінченної кількості гармонік натурального ряду:

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

Цей ряд можна використати для створення іншого цікавого трикутника, який називають гармонічним трикутником Лейбніца (рис. 6).

У цьому варіанті елементи гармонічного ряду розташовуються вздовж двох головних діагоналей. Усі елементи ліворуч них дорівнюють різниці дробу, розташованого зверху і праворуч по діагоналі та праворуч від елемента. Праворуч — аналогічно, тільки дзеркально. Наприклад, $\frac{1}{30} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$.

Другу діагональ у трикутнику Лейбніца називають телескопічним рядом: $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \dots$ Трикутник Лейбніца певною мірою є протилежністю трикутника Паскаля. Щоб отримати число, потрібно скласти два числа, що стоять під ним, наприклад: $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.



$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \frac{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & \\
 & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & \\
\frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6}
\end{array}$$

Рис. 11. Трикутник Лейбніца.

Щоб із трикутника Лейбніца отримати паскалівський, потрібно поділити перший член у n-му рядку на кожен інший у цьому самому рядку. Наприклад, у п'ятому рядку отримаємо:

$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5} : \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} : \frac{1}{20} \quad \frac{1}{5} : \frac{1}{30} \quad \frac{1}{5} : \frac{1}{20} \quad \frac{1}{5} : \frac{1}{5}$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

Цікаво, що трикутник Лейбніца був відомий і до нього. Італійський математик П'єтро Менголі, намагаючись розв'язати проблему квадратури кола, вивів цей трикутник і використовував його для роботи з нескінченними рядами та обчислення площ.

Глибокий зв'язок між гармонійним трикутником Лейбніца та арифметичним трикутником Паскаля дозволяє виявити не лише закономірності в підсумовуванні рядів, а й дивовижну внутрішню симетрію числових структур. Зокрема, якщо розглянути властивості подільності елементів цих трикутників на різні числа, виникають складні фрактальні візерунки. На рис. 12 показаний трикутник Паскаля з елементами кратності два(А), три(Б), п'ять(В) і сім(Г).

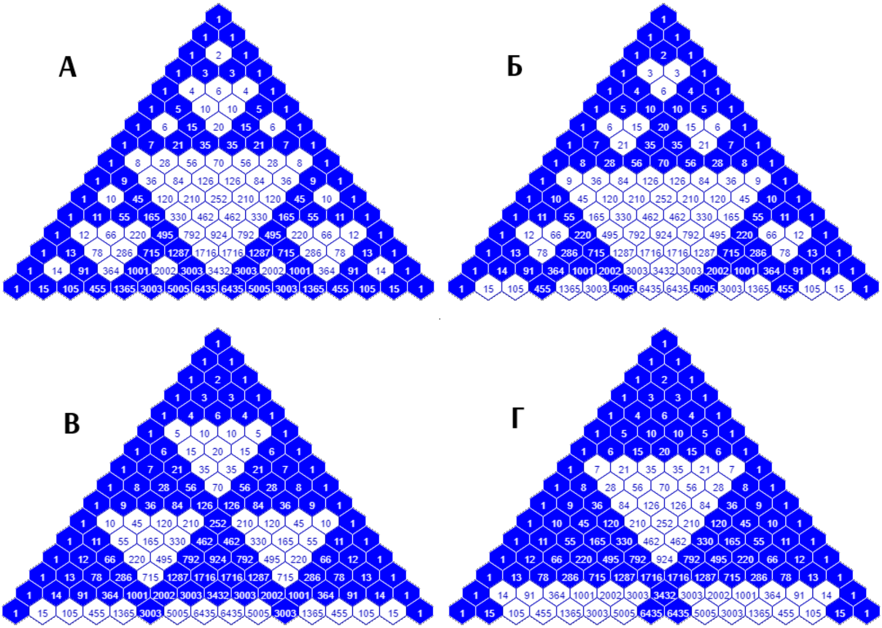


Рис. 12. Трикутник Паскаля з елементами кратності.

Одним із перших вагомих математичних успіхів Лейбніца стало знаходження суми ряду обернених трикутних чисел — задачі, яку йому запропонував Крістіан Гюйгенс. Лейбніц застосував елегантний метод, відомий сьогодні як *телескопічний ефект*, що базується на розкладанні загального члена ряду на різницю двох дробів.

Трикутні числа T_n представляють собою послідовність кількості точок, які можна викласти у формі правильного трикутника (рис. 13). Як видно з наведеної геометричної інтерпретації, n-те трикутне число дорівнює сумі перших n натуральних чисел і визначається загальною формулою $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ряд обернених трикутних чисел має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)/2} = \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \cdots \tag{21}$$

Він розв'язав цю задачу, помітивши тотожність:

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \tag{22}$$

Завдяки цьому всі проміжні члени ряду взаємно знищуються:

$$S = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots\right] = 2 \cdot 1 = 2 \tag{23}$$

Також Лейбніц сформулював те, що сьогодні відоме як *ознака збіжності знакопочережних рядів* — тобто рядів, у яких доданки почергово додаються та віднімаються. У загальному вигляді такий ряд записується як:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots \quad \text{при } a_n \geq 0. \tag{24}$$

Цей критерій вперше з'явився у листі, адресованому Йоганну Бернуллі (1667–1748) у 1713 році.

Більшість тогочасних математичних критеріїв збіжності базувалися на знаходженні часткових сум ряду, наприклад, для n членів. Математики намагалися знайти спрощений вираз, залежний від n, а потім досліджували його поведінку, коли число членів прямувало до нескінченності. Проте не всі вчені погоджувалися з таким підходом, оскільки виникали суперечності: ряди, що розбігалися при одному методі обчислення, могли давати конкретний результат при застосуванні інших підходів.

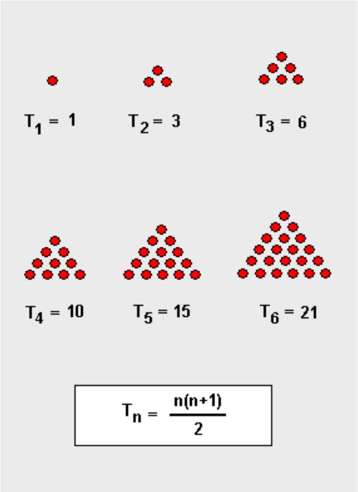


Рис. 13. Трикутні числа.

Один із головних парадоксів того часу був пов'язаний із визначенням суми знакопочережного ряду (відомого як ряд Гранді), у якому $a_n = 1$ для будь-якого n. Тобто ряд мав такий вигляд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{25}$$

Якщо взяти парну кількість членів, часткова сума дорівнює 0, тоді як при непарній кількості членів вона дорівнює 1. Лейбніц зрештою приписав цьому ряду значення 1/2.

Просте міркування для отримання такого результату полягає у наступному: якщо ми позначимо суму ряду через S, то отримаємо самоподібну структуру:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \tag{26}$$

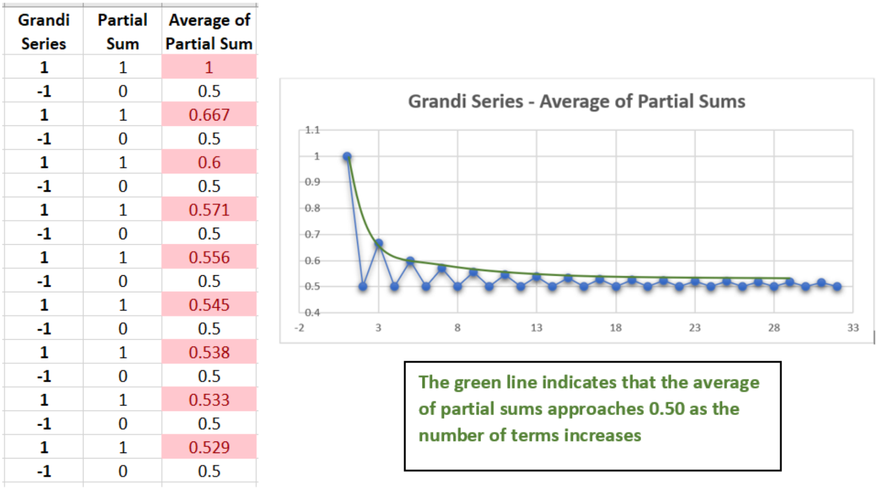
Звідси:

$$1 - S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = S \tag{27}$$

Отже, $1 - S = S$, що дає $2S = 1$, звідки $S = 1/2$.

Лейбніц також підкріплював цей результат метафізичними та імовірнісними аргументами. Він вважав, що оскільки суми 0 та 1 зустрічаються однаково часто, то при зупинці у випадковому місці найбільш імовірним «середнім» значенням буде саме 1/2. Це міркування, хоч і не було строгим за сучасними мірками, стало раннім провісником теорії підсумовування розбіжних рядів, яку пізніше розвинули Ейлер та Чезаро.

Сучасна математична візуалізація підтверджує цю інтуїцію: якщо обчислювати середнє арифметичне всіх попередніх часткових сум ряду, то отримані значення поступово стабілізуються навколо 0,5 (рис. 14). На графіку видно, як амплітуда коливань середнього значення зменшується з кожним новим членом ряду, що фактично робить суму 1/2 математично обґрунтованою в рамках узагальнених методів підсумовування.



Grandi Series	Partial Sum	Average of Partial Sum
1	1	1
-1	0	0.5
1	1	0.667
-1	0	0.5
1	1	0.6
-1	0	0.5
1	1	0.571
-1	0	0.5
1	1	0.556
-1	0	0.5
1	1	0.545
-1	0	0.5
1	1	0.538
-1	0	0.5
1	1	0.533
-1	0	0.5
1	1	0.529
-1	0	0.5

Grandi Series - Average of Partial Sums

The green line indicates that the average of partial sums approaches 0.50 as the number of terms increases

Рис. 14. Таблиця та графік, що ілюструють збіжність середніх арифметичних часткових сум ряду Гранді до значення 0,5.

1.4 Бінарна система числення та механічний калькулятор.

Лейбніц мріяв про створення універсальної символічної мови – Characteristica Universalis, яка дозволила б виразити всі людські знання і вирішувати інтелектуальні суперечки шляхом обчислень.

Він розробив ідею “числення міркувань” (Calculus Ratiocinator) – формальної системи для механічного виведення істинних тверджень з базових аксіом.

Лейбніц створив сучасну бінарну систему числення, усвідомивши її фундаментальне значення: у бінарній (двійковій) системі використовуються тільки дві цифри: 0 і 1. Будь-яке число представляється у вигляді:

$$N = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 2^i, \quad a_i \in \{0, 1\} \tag{28}$$

Представлення чисел у двійковій системі:

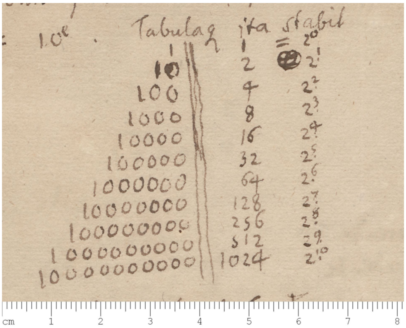
$$13_{10} = 1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \tag{29}$$

$$25_{10} = 11001_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \tag{30}$$

Також Лейбніц розробив основи алгебри логіки, передбачивши роботи Буля на півтора століття раніше.

Лейбніц бачив у бінарній системі філософський сенс: 0 представляє небуття (nihil), а 1 – Бога (єдність). Він вважав, що все можна виразити через ці два символи; у своїх рукописах він наочно продемонстрував принцип побудови чисел за допомогою лише двох символів (рис. 15).

Лейбніц розумів усе значення створеного ним апарата нескінченно малих величин і прагнув розробити подібні «числення» для інших галузей знань. Ще одна ідея, близька до створення єдиної системи знань, полягала в кодуванні логічних властивостей.



1.0e Tabula ita stabit

1	1	=	2^0
10	2		2^1
100	4		2^2
1000	8		2^3
10000	16		2^4
100000	32		2^5
1000000	64		2^6
10000000	128		2^7
100000000	256		2^8
1000000000	512		2^9
10000000000	1024		2^{10}

Рис. 15. Таблиця двійкових чисел, рукопис Лейбніца, 1697.

Він хотів кожній можливій властивості поставити у відповідність просте число, а тоді кожен об’єкт можна було б охарактеризувати добутком цих простих чисел. Такий підхід дозволив би показати логічну відмінність між предметами за допомогою арифметичних операцій. Але Лейбніц розглядав лише статичні властивості, і йому ніколи не спадала на думку ідея, подібна до нумерації Геделя, де числами кодуються також і операції.

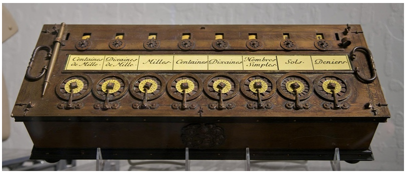


Рис. 16. Калькулятор Паскаля.

Попри те, що Лейбніц не дійшов до ідеї універсальної системи керування знаннями, він усе ж розумів, що обчислення — це передусім механічний процес. Досить рано у своєму житті він вирішив створити справжній механічний калькулятор для арифметичних операцій. Частково це було зумовлено тим, що Лейбніц сам потребував такого пристрою (найкраща мотивація для подібних винаходів). Незважаючи на його майстерність в алгебрі та ін., його праці сповнені кумедних підрахунків «у стовпчик» на полях (часом із помилками), які збереглися для нащадків.

Існували окремі приклади механічних калькуляторів, створених у часи Лейбніца, і коли він перебував у Парижі, без сумніву, бачив лічильний калькулятор, створений Блезом Паскалем у 1642 році (рис. 16).

Але Лейбніц прагнув створити універсальний калькулятор, який міг би виконувати чотири основні арифметичні операції. Йому також хотілося, щоб калькулятор був простим у використанні — наприклад, обертання ручки в один бік означало б множення, а в інший — ділення.

У працях Лейбніца міститься безліч креслень і схем цієї машини (рис. 17).

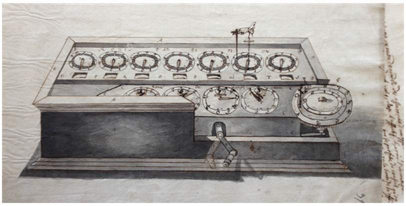


Рис. 17. Креслення машини Лейбніца.

Він уявляв собі, що його калькулятор принесе величезну практичну користь, і чимала частина його сподівань стосувалася ідей успішного розвитку бізнесу, пов'язаного з калькулятором. Але, на жаль, Лейбніцу не вдалося зробити калькулятор надійним — далеко не завжди він давав правильний результат. Як і більшість подібних механізмів того часу, калькулятор був радше складним варіантом шляхоміра (одометра). Лейбніц зіткнувся з тією ж проблемою, що й Чарльз Беббідж через двісті років — надзвичайно складно змусити всі диски рухатися одночасно, коли це потрібно.

Спочатку Лейбніц створив дерев'яний прототип, розрахований на роботу з три- або чотиризначними числами. Проте під час перших демонстрацій, зокрема перед Робертом Гуком у Лондоні 1673 року, механізм виявився недосконалим і підвів свого творця. Це не зупинило винахідника: він продовжив роботу над конструкцією, і вже у 1679 році підготував опис під назвою «Останні доопрацювання арифметичної машини».

Нотатки 1682 року свідчать про те, що Лейбніц постійно зіткнувся з новими технічними викликами. Маючи готові креслення, він замовив майстрам виготовлення мідної версії механізму, яка була здатна опевати значно більшими числами. Прагнучи комерційного успіху, Лейбніц навіть розробив своєрідний «маркетинговий план» та детальну інструкцію для користувачів.

Попри неймовірні зусилля, калькулятор так і не став надійним інструментом для масового використання. Лейбніц присвятив цьому проєкту понад сорок років свого життя, витративши суму, що в перерахунку на сучасні гроші перевищує мільйон доларів! Сьогодні ми можемо оцінити складність та амбітність цього задуму завдяки збереженим (оригінал у Ганновері) численним копіям — реконструкціям його машини у провідних музеях світу (рис. 18).

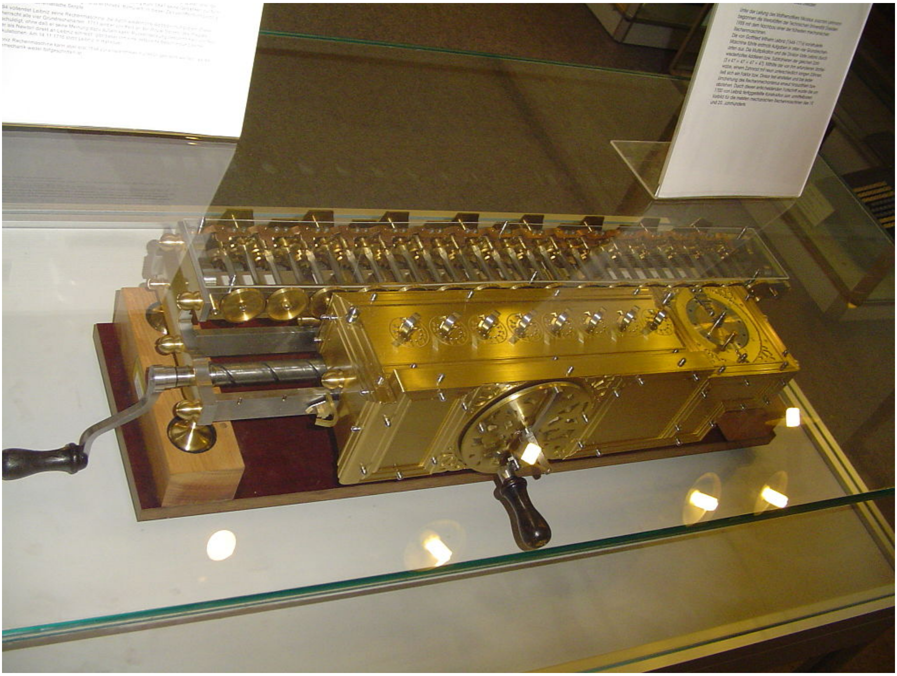


Рис. 18. Реконструкція механічного калькулятора Лейбніца з Німецького музею в Мюнхені.

1.5 Комбінаторика та витоки лінійної алгебри.

У 1666 році, у віці лише 20 років, Лейбніц написав свій фундаментальний трактат *«De Arte Combinatoria»* («Про мистецтво комбінаторики»). У цій праці він не лише систематизував відомі знання, а й висунув амбітну ідею: звести будь-яке людське міркування до комбінації базових понять, подібно до того, як складні числа будуються з простих множників.

На рис. 19 представлена знаменита комбінаторна схема Лейбніца, яка базується на арістотелівській концепції чотирьох елементів. У центрі ми бачимо перехрестя "CONTRARIA"(протилежності), що з’єднує вогонь (*Ignis*), землю (*Terra*), повітря (*Aer*) та воду (*Aqua*). Між ними розташовані властивості: сухість (*Siccitass*), тепло (*Caliditas*), вологість (*Humiditas*) та холод (*Frigiditas*). Для Лейбніца ця діаграма була не просто філософською схемою, а прикладом **комбінаторного аналізу**. Він позначав кожну властивість певним символом або числом, демонструючи, що будь-яке складне поняття (наприклад, "Вогонь") є лише "Combinatio"(комбінацією) простіших ознак ("Тепло"+ "Сухість"). Цей підхід став першим кроком до його ідеї "універсальної характеристики"— мови, де всі істини можна було б обчислити математично.

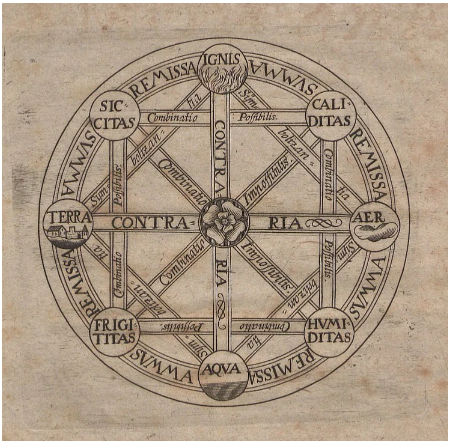


Рис. 19. Логіко-комбінаторна діаграма з трактату Лейбніца.

Лейбніц дав чітке визначення основним комбінаторним конфігураціям, якими ми користуємося до сьогодні:

1. Перестановки (P_n) — визначають кількість способів впорядкувати n різних об’єктів. Лейбніц розглядав їх як фундаментальну зміну порядку елементів:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \tag{31}$$

2. Розміщення (A_n^k) — впорядковані вибірки, де з n наявних елементів обирається лише k, причому їхній порядок має значення. Це дозволяло Лейбніцу обчислювати кількість можливих комбінацій у складних системах:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1) \tag{32}$$

3. Комбінації (C_n^k або $\binom{n}{k}$) — невпорядковані вибірки k елементів із множини n. На відміну від розміщень, тут порядок об’єктів не має значення. Саме цей тип комбінацій Лейбніц досліджував найретельніше, встановивши їхній глибокий зв’язок із властивостями «арифметичного трикутника» та біноміальними коефіцієнтами:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{33}$$

Хоча загальну біноміальну теорему часто пов'язують з ім'ям Ньютона, Лейбніц зробив надзвичайно важливий крок уперед, розробивши **мультиноміальну теорему** — узагальнення для піднесення до степеня суми довільної кількості доданків:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!} \prod_{i=1}^{m} x_i^{k_i} \qquad (34)$$

Це відкриття продемонструвало його майстерність у роботі з нескінченними сумами та індексами. Наочним підтвердженням такої концептуальної глибини є перехід від класичного плоского трикутника до об'ємних числових структур (рис. 20).

У той час як звичайний трикутник Паскаля дозволяє знаходити біноміальні коефіцієнти, його тривимірне узагальнення — піраміда (або тетраедр) — відображає розподіл коефіцієнтів для триноміальних виразів вигляду $(x + y + z)^n$. Кожен рівень такої піраміди відповідає певному степеню n, а розташування чисел ілюструє комбінаторні зв'язки між багатьма змінними одночасно, що повністю відповідає ідеям Лейбніца про універсальність комбінаторних законів.

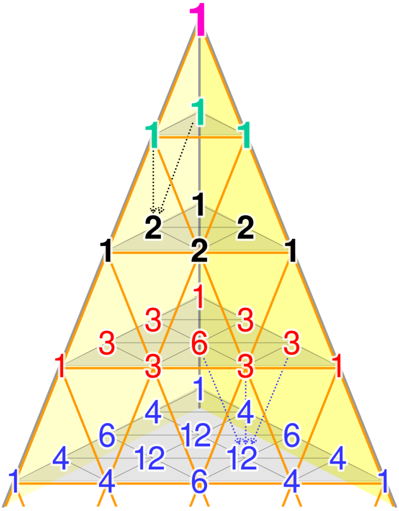


Рис. 20. Тривимірна модель коефіцієнтів (піраміда Паскаля).

Народження теорії детермінантів

Найбільш дивовижним є те, що Лейбніц фактично передбачив розвиток матричної алгебри на 150 років. У листуванні з Лопіталем (1693) він вперше описав спосіб розв'язання систем лінійних рівнянь за допомогою величин, які ми зараз називаємо детермінантами.

Головна новація Лейбніца полягала у створенні **системи подвійних індексів**. Він позначав коефіцієнти не різними буквами, а цифрами, що вказували на номер рівняння та номер невідомого (наприклад, $1_1, 1_2$ замість a, b):

$$\begin{cases} 10 + 11x_1 + 12x_2 = 0 \\ 20 + 21x_1 + 22x_2 = 0 \end{cases} \qquad (35)$$

Для такої системи він вивів умову сумісності, яка сьогодні відома як рівність детермінанта нулю. Для системи 3 × 3 він фактично описав те, що ми зараз називаємо правилом Сарюса (рис. 21):

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (36)$$

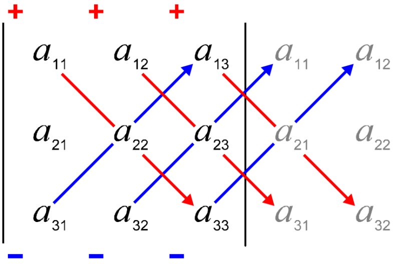


Рис. 21. Графічна схема правила Саррюса.

Лейбніц не просто маніпулював числами; він створив мову символів, яка дозволила бачити приховану структуру математичних об'єктів. Його ідеї в комбінаториці стали базою для теорії ймовірностей, а впровадження індексної нотації — фундаментом сучасної лінійної алгебри та тензорного числення. Таким чином, він перетворив математику з набору обчислювальних технік на універсальну систему формальної логіки. Його пророча візія про те, що будь-яку інтелектуальну суперечку можна буде розв'язати фразою «обчислимо!» (*Calculemus*), заклала концептуальний фундамент для розвитку сучасної комп'ютерної науки та штучного інтелекту.

1.6 Теорія чисел, диференціальні рівняння, катенарія та брахістохрона.

Внесок Лейбніца в теорію чисел часто залишається в тіні його досягнень в аналізі, проте його рукописи свідчать про глибоке розуміння структури чисел. Він розглядав прості числа як «алфавіт людських думок» у контексті своєї комбінаторної логіки.

Лейбніц і мала теорема Ферма

Як і більшість своїх відкриттів, П'єр Ферма сформулював малу теорему без доведення. Саме Лейбніц близько 1683 року став першим, хто знайшов її строге доведення (використовуючи математичну індукцію та біноміальні коефіцієнти), хоча цей результат було виявлено в його паперах лише після смерті.

Мала теорема Ферма: Якщо p — просте число і a не ділиться на p, то:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad (37)$$

Також Лейбніц детально аналізував відому ще з часів античності формулу Евкліда $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, яка пов'язує досконалі числа з особливими простими числами виду $2^p - 1$. Завдяки своєму захопленню двійковою системою, він бачив у цій структурі глибокий порядок, який згодом, уже у XVIII столітті, був остаточно доведений та доповнений Леонардом Ейлером.

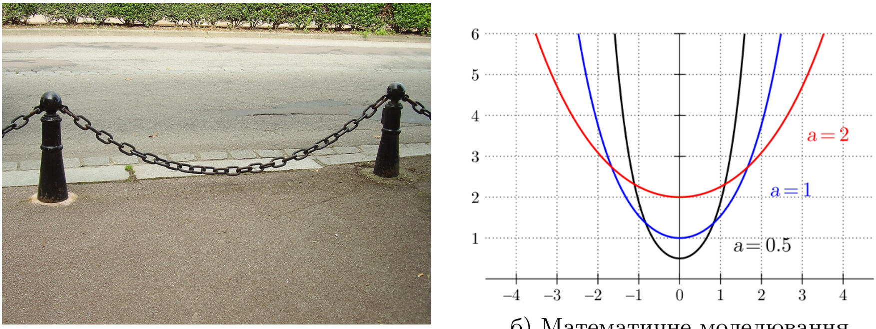
Задача про брахістохрону та ланцюгова лінія

Лейбніц був серед небагатьох вчених (разом із Ньютоном та братами Бернуллі), хто зміг розв'язати задачу про брахістохрону — криву найшвидшого спуску між двома точками. Використовуючи свій новий метод аналізу, він довів, що такою кривою є циклоїда. Це відкриття фактично заклало підвалини варіаційного числення.

Одним із найяскравіших тріумфів Лейбніца стало розв'язання задачі про «ланцюгову лінію» (catenaria) — форму, яку набуває гнучка однорідна нитка під дією власної ваги (рис. 22а). У 1691 році він показав, що ця крива не є параболою, як вважав Галілей, а описується через експоненціальні функції:

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) \tag{38}$$

Графічний аналіз цієї кривої при різних параметрах (рис. 22б) демонструє, як змінюється її «крутизна» залежно від натягу.



а) Фізична модель

б) Математичне моделювання

Рис. 22. Ланцюгова лінія: порівняння фізичної форми підвішеного ланцюга та сімейства графіків функції гіперболічного косинуса.

Диференціальні рівняння: від теорії до практики

Лейбніц не лише запровадив сам термін «диференціальне рівняння» (1676), а й розробив основні методи їх розв'язання, зокрема метод розділення змінних. Для рівняння виду $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ він запропонував елегантний алгоритм, яким ми користуємося досі:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C \tag{39}$$

Розглянемо фундаментальне рівняння природного росту $\frac{dy}{dx} = ky$, де k — стала. Використовуючи підхід Лейбніца, розділимо змінні:

$$\frac{dy}{y} = k\,dx \tag{40}$$

Після інтегрування обох частин отримуємо логарифмічну залежність:

$$\ln|y| = kx + C \implies y = e^{kx+C} \tag{41}$$

Остаточний розв'язок набуває вигляду $y = Ae^{kx}$ (де $A = \pm e^{C}$). Ця модель стала базовою для опису процесів радіоактивного розпаду, приросту населення та складних відсотків у фінансах.

Графічна інтерпретація цього розв'язку (рис. 23) наочно демонструє вплив параметра k на динаміку процесу. При $k > 0$ ми спостерігаємо експоненціальний ріст, де швидкість збільшення величини пропорційна її поточному значенню, що характерно для популяційної біології. Навпаки, при $k < 0$ крива відображає процес згасання або розпаду, де величина асимптотично наближається до нуля ($y = 0$), що є математичною основою закону радіоактивного розпаду.

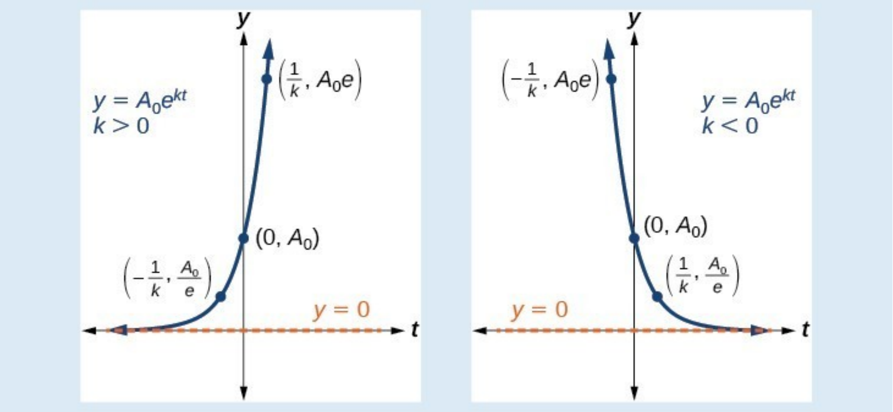


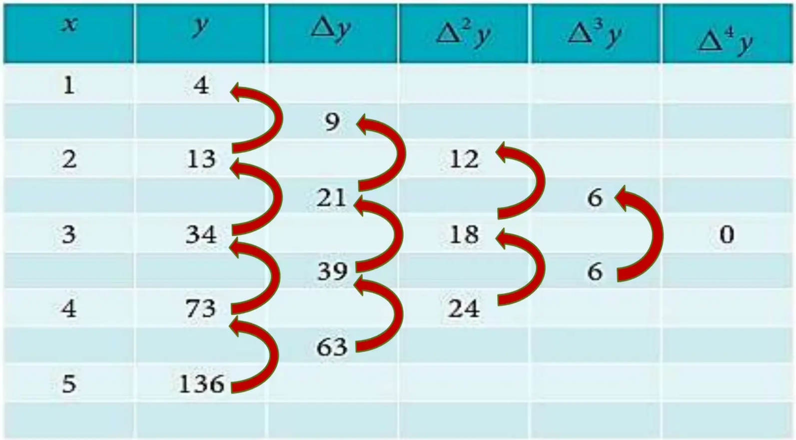
Рис. 23. Порівняння моделей експоненціального росту (ліворуч, $k > 0$) та експоненціального розпаду (праворуч, $k < 0$) як графічних розв'язків диференціального рівняння Лейбніца.

1.7 Чисельні методи і геометричні перетворення.

Лейбніц розглядав математику як універсальну мову, де дискретне (числа) та неперервне (геометрія) об'єднуються через аналіз. Його праці в цих галузях заклали фундамент для сучасного чисельного аналізу, а розроблені ним принципи геометричних перетворень стали провісниками диференціальної геометрії.

Метод скінченних різниць та інтерполяція

Лейбніц був одним із піонерів числення скінченних різниць. Він бачив у символі різниці Δ дискретний аналог свого диференціала d. Це дозволило йому розробити методи чисельного розв'язування рівнянь, коли точний аналітичний розв'язок був неможливим. Процес послідовного знаходження таких різниць зручно представляти у вигляді таблиці (рис. 24).



x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1	4				
		9			
2	13		12		
		21		6	
3	34		18		0
		39		6	
4	73		24		
		63			
5	136				

Рис. 24. Схема побудови скінченних різниць.

На схемі чітко видно, як різниці вищих порядків (наприклад, $\Delta^2 y$ чи $\Delta^3 y$) виникають як результат повторного застосування операції віднімання до попередніх значень.

Скінченна різниця першого порядку для функції $f(x)$ визначається як:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \tag{42}$$

Лейбніц помітив глибоку аналогію між піднесенням бінома до степеня та взяттям різниці n-го порядку. На рис. 24 можна помітити, що для певних функцій (поліномів) різниці високого порядку стають константами (як-от $\Delta^3 y = 6$) або перетворюються на нуль, що є ключовим для інтерполяції:

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + kh) \tag{43}$$

Квадратурні формули та чисельне інтегрування

Лейбніц присвятив багато часу проблемі «квадратури» — обчисленню площ під кривими. Він розумів, що визначений інтеграл є границею суми площ елементарних прямокутників або трапецій. Геометрична сутність цього підходу полягає у заміні криволінійної фігури сукупністю прямолінійних трапецій (рис. 25), що дозволяє звести складне інтегрування до простого алгебраїчного підсумовування.

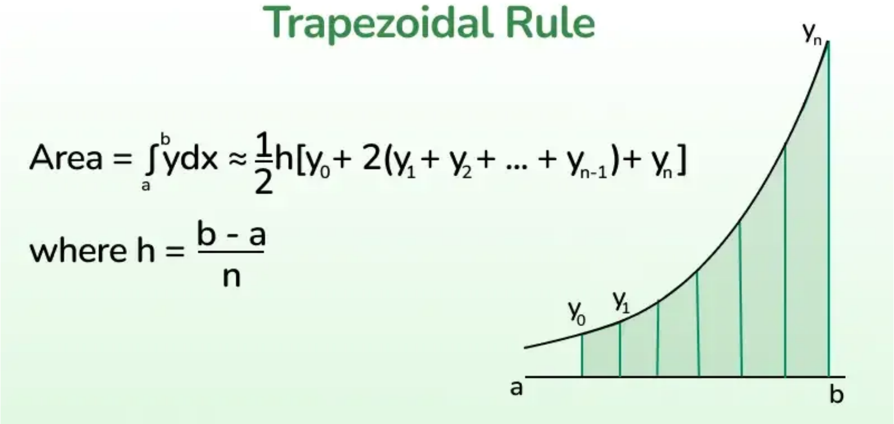


Рис. 25. Геометрична інтерпретація та формула методу трапецій для наближеного обчислення інтеграла.

Хоча формули, що сьогодні носять імена Сімпсона чи Котеса, були остаточно формалізовані пізніше, Лейбніц розробив загальний підхід до дискретного підсумовування, який ліг у їхню основу. Зокрема, він використовував лінійну апроксимацію, яка веде до формули трапецій:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] \tag{44}$$

де $h = \frac{b-a}{n}$ — крок розбиття інтервалу. Його прагнення до точності обчислень згодом привело математику до створення параболічної апроксимації (метод Сімпсона), що базується на врахуванні кривизни функції.

Геометричні перетворення та аналітична теорія кривих

Лейбніц прагнув створити алгебру для геометричних операцій. Він розглядав перетворення простору як особливі функції. Сьогодні ми записуємо ці операції через матриці, ідея яких (через детермінанти) також належить Лейбніцу. Наприклад, поворот точки навколо початку координат на кут θ:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{45}$$

Досліджуючи диференціальні властивості кривих, Лейбніц розвинув аналітичну теорію **еволют** — геометричних місць центрів кривизни даної лінії. Тісно пов'язаним із цим є поняття **евольвенти** (розгортки) — кривої, що описується кінцем натягнутої нитки, яка розгортається з іншої кривої. Лейбніц першим вивів загальні формули для знаходження еволюти, використовуючи свій апарат диференціалів вищих порядків.

Ці дослідження мали колосальне практичне значення для інженерії. Лейбніц довів, що використання евольвентних профілів для зубців шестерень дозволяє механізмам працювати з мінімальним тертям та забезпечує рівномірну кутову швидкість. Це відкриття він безпосередньо застосував при конструюванні свого механічного калькулятора, де точність взаємодії коліс «ступінчастого валика» була критично важливою для надійності обчислень.

Особливу увагу він приділяв порівняльному аналізу різних типів спіралей (рис. 26). На відміну від спіралі Архімеда ($r = a\theta$), де відстань між витками залишається сталою, Лейбніца найбільше захоплювала логарифмічна спіраль ($r = ae^{b\theta}$).

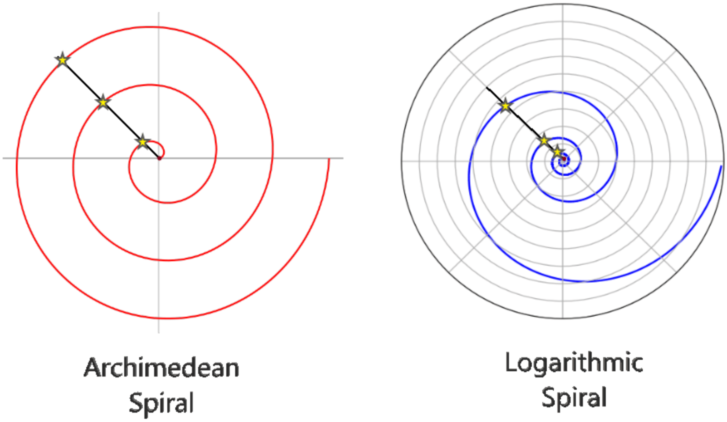


Рис. 26. Порівняння спіралі Архімеда та логарифмічної.

Як видно на рис. 26, логарифмічна спіраль розширюється експоненціально, при цьому вона має унікальну властивість — **самоподібність**. Це означає, що при масштабуванні або повороті крива ідеально відтворює власну форму.

Для Лейбніца це мало не лише математичне значення, а й глибокий метафізичний зміст: згідно з його монадологією, кожна одиниця буття відображає в собі структуру всього Всесвіту.

1.8 Топологія, аналіз та метафізичні основи математики.

Прагнення знайти цей глобальний лад привело вченого до створення «універсальної характеристики» (*Characteristica Universalis*) — символічної мови, здатної формалізувати будь-яку людську думку. Саме ці філософські пошуки визначили внутрішню структуру створеного ним аналізу та топології. Ця масштабна концепція, яку часто називають «мрією Лейбніца», поєднувала в собі побудову універсального алфавіту понять та механізм логічного виведення істини — *Calculus Ratiocinator* (рис. 27).

Рис. 27. Концептуальна схема «мрії Лейбніца».

Принципи достатньої підстави та неперервності

В основі наукового методу Лейбніца лежать два фундаментальні закони. Перший — **принцип достатньої підстави** (*Principium rationis sufficientis*) — стверджує, що кожне істинне твердження повинно мати логічне доведення. Другий закон — **принцип неперервності** — зафіксований у афоризмі «Natura non facit saltus» (Природа не робить стрибків).

Лейбніц вважав, що перехід від скінченного до нескінченного відбувається плавно. Хоча сучасне строге визначення неперервності через ε-δ з'явилося пізніше, воно є прямою формалізацією інтуїції Лейбніца:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{46}$$

Геометрично цей принцип можна проілюструвати за допомогою поняття околів (рис. 28). Суть такого підходу полягає у тому, що для будь-якого заданого коридору по вертикалі (висотою 2ε) навколо значення $f(x_0)$ завжди можна знайти відповідний коридор по горизонталі (шириною 2δ) навколо точки x_0. У межах цього «вікна» графік функції проходить неперервно, не виходячи за його межі та не роблячи різких стрибків, що повністю відповідає лейбніцівській концепції плавності природних процесів.

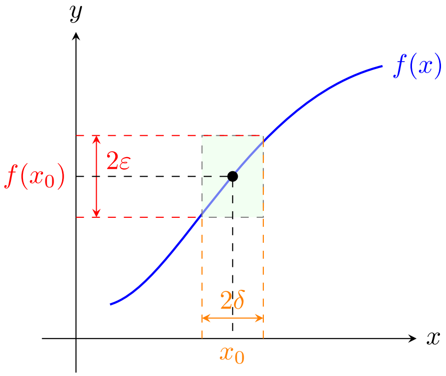


Рис. 28. Геометрична ілюстрація ε-δ визначення неперервності.

Analysis Situs та витоки топології

Лейбніц був незадоволений тим, що геометрія його часу була надто прив'язана до чисел. Він висунув ідею *Analysis Situs* (аналізу положення) — математики, яка вивчає не розміри фігур, а їхню зв'язність та взаємне розташування. У листуванні з Гюйгенсом (1679) він описував це як «геометрію без чисел». Ця візія пізніше надихнула Леонарда Ейлера на розв'язання задачі про Кенігсберзькі мости, що стало початком теорії графів та топології.

Трансцендентні функції та нескінченні процеси

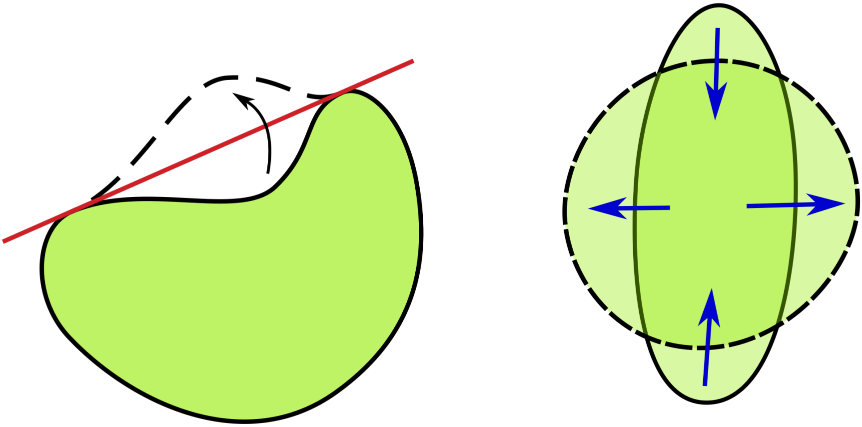
Лейбніц запровадив термін «трансцендентні функції» для об'єктів, що виходять за межі алгебри ($e^x, \ln x, \sin x$). Він бачив у них прояв нескінченності, яку можна осягнути через нескінченні ряди:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \tag{47}$$

Дискусії з Йоганном Бернуллі про природу логарифмів стали підґрунтям для появи пізнішої формули Ейлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Ізопериметрична проблема та гармонія форм

Лейбніц глибоко досліджував ізопериметричну проблему: визначення форми замкненої лінії, що охоплює максимальну площу при заданому периметрі L. Він довів, що в плоскому випадку такою ідеальною фігурою є коло. Його міркування базувалися на принципах симетрії та неперервності, які він вважав основою божественного задуму Всесвіту.



а) Порівняння площ фігур

б) Оптимальність кола

Рис. 29. Ізопериметрична нерівність: демонстрація того, що серед усіх замкнених кривих заданої довжини коло має найбільшу площу.

Візуальне порівняння різних геометричних структур (рис. 29а) наочно демонструє, що при однаковій довжині межі саме коло забезпечує максимальну внутрішню площу (рис. 29б). Математично цей ідеальний максимум виражається через ізопериметричну нерівність, де граничне значення площі становить:

$$S_{\max} = \frac{L^2}{4\pi} \tag{48}$$

Основи варіаційного числення та задача про брахістохрону

Лейбніц був одним із перших, хто інтуїтивно відчув, що процеси в природі підпорядковуються законам оптимізації. Його розв'язання задачі про **брахістохрону** (криву найшвидшого спуску, про яку ми згадали раніше) у 1696 році стало фактичним днем народження варіаційного числення. Це розділ математики, що займається пошуком екстремумів функціоналів — величин, які залежать від вибору цілої функції (кривої):

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx \tag{49}$$

Хоча формальне «рівняння Ейлера—Лагранжа» з'явилося пізніше, воно стало прямим результатом розвитку лейбніцівського методу варіації форми кривої через нескінченно малі прирости.

Механіка, «Жива сила» та принцип найменшої дії

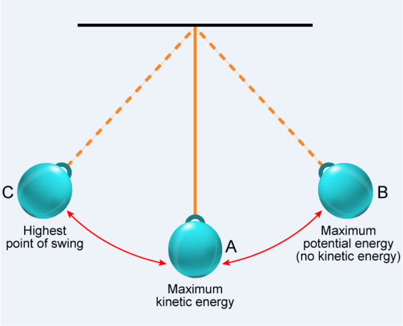


Рис. 30. Схема динамічного балансу між потенційною енергією та «живою силою» Лейбніца.

Філософія Лейбніца про активність матерії призвела до революції в механіці. Він довів, що в ізольованих системах зберігається не кількість руху (mv), а «жива сила» (*vis viva*) — mv^2, що стала прообразом кінетичної енергії. Цей фундаментальний закон збереження повної енергії ($T + V = E$), динаміку якого наочно ілюструє рух маятника (рис. 30), став для вченого фізичним відображенням незнищенності та внутрішньої сили монади.

Переконання Лейбніца в тому, що наш світ є «кращим із усіх можливих», знайшло своє найвище наукове вираження в **Принципі найменшої дії**. Він вважав, що Бог створив природу такою, щоб вона завжди діяла найбільш ефективним шляхом, мінімізуючи «зусилля» (S). Ця пророча ідея, математично розвинена пізніше Лагранжем та Гамільтоном, сьогодні є центральним законом усієї теоретичної фізики:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)\, dt \to \min \tag{50}$$

Даний принцип став містком між класичною механікою та сучасною квантовою теорією поля, підтверджуючи здогадку Лейбніца про універсальну оптимізацію Всесвіту.

Монадологія та метафізична точка

Завершальним етапом інтегрування ідей Лейбніца стала його теорія монад — простих, неподільних субстанцій, які є «живими дзеркалами» всього Всесвіту. Математичним аналогом монади є точка: об'єкт, що не має фізичної протяжності, але має положення, силу та внутрішню інтенсивність. Це бачення стало ключем до його розуміння аналізу: так само як світ складається з монад, будь-яка неперервна крива сприймалася Лейбніцем як «*summa*» — сума нескінченної кількості нескінченно малих прямолінійних відрізків.

Дивовижним сучасним втіленням цієї філософії є фрактальні структури (рис. 31), де кожна найменша частина малюнка ідентична за своєю складністю цілому об'єкту. Ця математична самоподібність є прямою ілюстрацією лейбніцівської візії Всесвіту, у якому нескінченність прихована в кожній точці буття. Таким чином, його математика стала величною спробою описати складність неперервного світу через гармонію його найпростіших елементів.

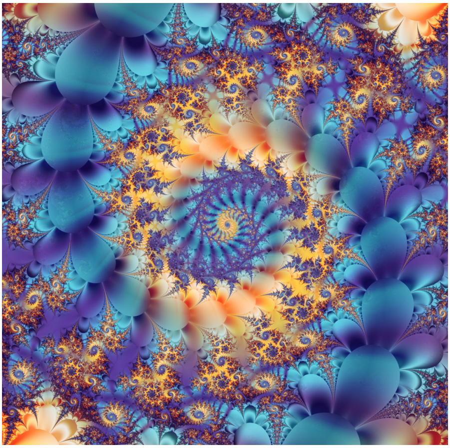


Рис. 31. Фрактальна самоподібність: кожна частина відображає ціле.

Математична спадщина Готфріда Вільгельма Лейбніца — це не просто зібрання теорем і формул, а цілісна архітектура людського мислення. Пройшовши шлях від створення механічного калькулятора до розробки теорії монад, він довів, що світ ідей і світ матерії підпорядковані єдиним законам логічної гармонії. Його прагнення до «універсальної характеристики» не було лише мрією — воно втілилося в бінарному коді, що став мовою нашої цифрової цивілізації, та в апараті математичного аналізу, яким сьогодні описані фундаментальні закони фізики.

Лейбніц навчив людство бачити нескінченність у малому та цілісність у розрізненому. У словах самого вченого: «*Cum Deus calculat, fit mundus*» (Коли Бог обчислює — виникає світ). Ця глибока істина про математичну природу буття залишається актуальною й сьогодні: від алгоритмів штучного інтелекту до дослідження структури простору-часу, ми продовжуємо обчислювати світ, крокуючи шляхом, який три століття тому проклав універсальний розум Лейбніца.