

Міністерство освіти і науки України

Бердянський державний педагогічний університет

кафедра фізики, математики та методики навчання

«Допущено до захисту»

Завідувач кафедрою

д.п.н., проф. Олександр ШКОЛА«5 » грудня 2025 р.**УДОСКОНАЛЕННЯ ПРОФІЛЬНОГО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ
В СТАРШІЙ ШКОЛІ УКРАЇНИ НА ОСНОВІ ЗАРУБІЖНОГО ДОСВІДУ
(НА ПРИКЛАДІ ВЕЛИКОБРИТАНІЇ)**

Кваліфікаційна робота магістра (бакалавра)

Виконавець: здобувачка другого рівня вищої освіти, групи м2ма_зГалузь знань: 01 Освіта/ПедагогікаСпеціальність: 014.04 Середня освіта (Математика)Освітньо-професійна програма: «Середня освіта (Математика)»

ПІБ: Катерина ЄЛІЗАРОВА

Керівник: канд. пед. наук, ст. викладач Світлана ПАНОВА

Рецензент: д. пед. наук, професор Віталій АЧКАН

ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

ЄЛІЗАРОВОЇ Катерини Станіславівни

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи “Удосконалення профільного навчання математики в старшій школі України на основі зарубіжного досвіду (на прикладі Великобританії)”

керівник роботи: ПАНОВА Світлана Олегівна,

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «02» грудня 2025 року № 718с.

2. Строк подання студентом роботи: 01.12.2025 р.

3. Вихідні дані до роботи: дослідження підходів до профільного навчання математики в системі середньої освіти України та Великобританії; теоретичне обґрунтування та розробка методичних рекомендацій з удосконалення змісту профільної математики старшій школі України.

4. Зміст пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити):

1. Здійснити теоретико-методологічний аналіз розвитку та сучасного стану систем профільної математичної освіти в Україні та Великобританії.

2. Провести компаративний аналіз змісту навчальних програм з математики профільного рівня української старшої школи та програми Cambridge International AS & A Level Mathematics (9709), ідентифікувавши відмінності в тематичному наповненні, глибині вивчення та послідовності викладення тем «Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія».

3. Виокремити методичні особливості викладання змістових ліній «Функції», «Тригонометрія», «Диференціальне та інтегральне числення» у британській системі, зокрема використання візуальних моделей (діаграм відображення), специфічної математичної нотації та прикладних аспектів.

4. Розробити методичні рекомендації щодо удосконалення змісту та методики навчання математики в 10–11 класах шляхом імплементації елементів британського досвіду (введення понять про типи відображень, розширення стохастичної лінії, використання чисельних методів).

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) (за необхідністю): _____

6. Консультанти розділів роботи (якщо передбачені):

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання: 27.09.2024 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
	Формулювання теми кваліфікаційної роботи, підготовка вступу, складання плану	Вересень 2024 р.	
	Аналіз літературних джерел за темою дослідження. Підготовка підрозділів 1.1, 1.2.	Січень 2025р.	
	Підготовка підрозділу 1.3. Написання висновків до першого розділу.	Березень 2025р.	
	Підготовка до проведення до експериментального дослідження.	Квітень 2025р.	
	Написання 2 розділу за темою дослідження та за результатами експерименту.	Вересень 2025р.	
	Оформлення підсумкового варіанту кваліфікаційної роботи відповідно до чинних вимог.	Грудень 2025р.	

Здобувач:



(підпис)

_____ Катерина ЄЛІЗАРОВА

(прізвище та ініціали)

Керівник роботи:



_____ Світлана ПАНОВА

ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПІДХОДІВ ДО ПРОФІЛЬНОГО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В СИСТЕМІ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ УКРАЇНИ ТА ВЕЛИКОБРИТАНІЇ	9
1.1. Сутність та значення профільного навчання математики в системі середньої освіти	9
1.2. Сучасний стан профільної математичної освіти в Україні	15
1.3. Особливості профільного навчання математики у Великобританії.....	17
1.4. Порівняльний аналіз організації профільного навчання математики в Україні та Великобританії.....	23
<i>Висновки до першого розділу.....</i>	<i>29</i>
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ УДОСКОНАЛЕННЯ ЗМСТУ НАВЧАЛЬНИХ ПРОГРАМ ПРОФІЛЬНОГО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В УКРАЇНІ	31
2.1. Підходи до удосконалення змісту профільного навчання математики в Україні у відповідності до найкращих практик профільного навчання математики Великобританії.....	31
2.2. Порівняльний аналіз британської програми A Level і профільної української програми з математики.....	37
2.3. Методичні рекомендації щодо удосконалення змісту української профільної програми з математики.....	44
<i>Висновки до другого розділу.....</i>	<i>71</i>
ВИСНОВКИ	74
Декларація використання ГШІ (GAIDeT).....	76
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	77
ДОДАТКИ.....	81

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. На сучасному етапі розвитку української держави реформування системи загальної середньої освіти є стратегічним пріоритетом, зумовленим євроінтеграційними векторами та необхідністю входження до єдиного європейського освітнього простору. Ключовим етапом реформи «Нова українська школа» є запровадження з 1 вересня 2027 року трирічної профільної середньої освіти (10–12 класи), що передбачає створення академічних ліцеїв та гнучких освітніх траєкторій для здобувачів освіти. Це ставить перед вітчизняною педагогічною наукою завдання фундаментального переосмислення змісту, структури та методик навчання математики, яка є базовим інструментом для формування STEM-компетентностей [9;19;20;21;22;23].

Нагальність модернізації математичної освіти підтверджується результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2022. Згідно з підсумками міжнародного дослідження PISA 2022 року, рівень математичної компетентності українських школярів дещо знизився у порівнянні з попереднім циклом. Це свідчить про необхідність змін у підходах до викладання математики, особливо щодо формування прикладних умінь і навичок аналізу даних. Дослідження виявило системну проблему: маючи ґрунтовні академічні знання, українські учні відчують значні труднощі із застосуванням математичного апарату для розв’язання практичних життєвих задач, моделюванням реальних процесів та інтерпретацією даних. Цей «компетентнісний розрив» вимагає трансформації методичних підходів від суто теоретичного викладу до прикладної спрямованості [12;13;31].

У цьому контексті виняткового значення набуває вивчення та адаптація досвіду країн із тривалими традиціями профільної диференціації навчання. Система освіти Великобританії, зокрема модель GCE A-Level (General Certificate of Education Advanced Level), демонструє високу ефективність у підготовці вмотивованих абітурієнтів до університетського навчання. Британська програма з математики (на прикладі Cambridge International AS & A Level Mathematics 9709)

характеризується модульною структурою, варіативністю вибору компонентів (чиста математика, механіка, статистика) та інтеграцією цифрових інструментів. Така модель дозволяє учням свідомо формувати свій освітній профіль, що корелює із завданнями української реформи профільної школи [10;32;33].

Водночас, механічне запозичення зарубіжних практик є неможливим без урахування національних освітніх традицій, які базуються на фундаментальності, логічній строгості та системності математичної підготовки. Тому наукова проблема гармонізації змісту вітчизняних програм із кращими світовими практиками — зокрема в аспектах візуалізації математичних понять, введення елементів стохастики та чисельних методів — є надзвичайно актуальною. Дослідження спрямоване на розробку методичних рекомендацій, що дозволять удосконалити зміст профільного навчання математики в Україні, зберігаючи її фундаментальність та посилюючи прикладну складову відповідно до викликів XXI століття.

Мета дослідження: теоретично обґрунтувати та розробити методичні рекомендації з удосконалення змісту профільної математики старшій школі України.

Об’єкт дослідження: процес профільного навчання математики в старшій школі.

Предмет дослідження: зміст організації профільного навчання математики в старшій школі України й Великобританії.

Відповідно до мети визначено такі **завдання дослідження:**

1. Здійснити теоретико-методологічний аналіз розвитку та сучасного стану систем профільної математичної освіти в Україні та Великобританії.

2. Провести компаративний аналіз змісту навчальних програм з математики профільного рівня української старшої школи та програми Cambridge International AS & A Level Mathematics (9709), ідентифікувавши відмінності в тематичному наповненні, глибині вивчення та послідовності викладення тем «Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія».

3. Виокремити методичні особливості викладання змістових ліній «Функції», «Тригонометрія», «Диференціальне та інтегральне числення» у британській системі, зокрема використання візуальних моделей (діаграм відображення), специфічної математичної нотації та прикладних аспектів.

4. Розробити методичні рекомендації щодо удосконалення змісту та методики навчання математики в 10–11 класах шляхом імплементації елементів британського досвіду (введення понять про типи відображень, розширення стохастичної лінії, використання чисельних методів).

Методи дослідження: 1) *теоретичні*: аналіз, синтез, узагальнення та систематизація наукової та методичної літератури з проблеми профільного навчання математики у старшій школі з метою визначення актуальності, формулювання мети, об'єкта, предмета і завдань дослідження, а також проведення теоретичного аналізу проблеми дослідження; 2) *емпіричні*: порівняння існуючого вітчизняного та зарубіжного досвіду профільного навчання математики у старшій школі.

Теоретичне і практичне значення дослідження полягає у теоретичному обґрунтованні та розробці методичних рекомендацій щодо удосконалення української профільної програми з математики на основі досвіду найкращих практик британської програми A Level, що сприятиме формуванню в учнів ключових компетентностей, посиленню їхнього інтересу до математики, розвитку критичного мислення та підготовці до успішної самореалізації в умовах сучасного суспільства.

Оприлюднення результатів досліджень. У ході підготовки кваліфікаційної роботи опубліковані тези доповіді: Удосконалення профільного навчання математики в Україні на основі аналізу досвіду Великобританії. Науково-дослідна робота в системі підготовки фахівців-педагогів у природничій, технологічній і комп'ютерній галузях: матеріали X Всеукраїнської наук.-практ. Інтернет-конф. (26 вересня 2025 р.). Запоріжжя: БДПУ, 2025. С. 133–135.

Структура магістерської роботи. Кваліфікаційна робота складається зі вступу, двох розділів основного матеріалу, загальних висновків, списку використаних

джерел (33 позиції). Загальний обсяг роботи – 95 с., з яких 71 с. – основна частина. Робота містить 27 рисунків, 11 таблиць.

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПІДХОДІВ ДО ПРОФІЛЬНОГО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В СИСТЕМІ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ УКРАЇНИ ТА ВЕЛИКОБРИТАНІЇ

1.1. Сутність та значення профільного навчання математики в системі середньої освіти

Історичний аналіз становлення профільного навчання свідчить, що його коріння сягає не античності, а періоду індустріалізації XIX століття, коли виникла потреба у диференціації освіти на «класичну» (гуманітарну) та «реальну» (природничо-математичну). Саме в цей період у Європі та на теренах сучасної України сформувалася система біфуркації середньої освіти [15].

Ключовим етапом стало виокремлення реальних училищ (Realschulen) як альтернативи класичним гімназіям. Якщо гімназії орієнтувалися на вивчення латини, грецької мови та підготовку до університетів, то реальні училища фокусувалися на математиці, фізиці, кресленні та живих іноземних мовах, готуючи молодь до вступу в технічні інститути та до практичної діяльності. В Україні цей процес активізувався після освітньої реформи 1871 року, коли реальні гімназії були реорганізовані в реальні училища з чітко вираженим математично-технічним профілем. Станом на 1876 рік в українських губерніях вже діяло 19 таких закладів, що стало прообразом сучасного фізико-математичного профілю [27].

Сьогодні, через півтора століття, українська освіта стикається з новим викликом профілізації, зумовленим переходом до 12-річної школи у 2027 році та створенням академічних ліцеїв. Однак тепер фокус зміщується з простого поділу предметів на якість формування компетентностей [22].

Результати міжнародного дослідження якості освіти PISA-2022 стали індикатором необхідності глибинних змін у профільному навчанні математики. Дослідження, в якому провідною галуззю була саме математика, виявило тривожні тенденції в українській освіті:

Зниження загального рівня: Середній бал українських учнів з математики склав 441 бал, що на 31 бал нижче середнього показника країн ОЕСР (472) та на 12 балів нижче власного результату України у 2018 році [12].

Освітні втрати: Експерти оцінюють відставання українських школярів від однолітків з країн ОЕСР у півтора роки навчання.

Криза базового рівня: 42% українських 15-річних підлітків не досягли базового рівня математичної грамотності (Рівень 2 за шкалою PISA). Це означає, що вони мають труднощі з використанням математики навіть у простих життєвих ситуаціях, таких як конвертація валют чи порівняння дистанцій [13].

Аналіз результатів PISA у розрізі змістових категорій показує, що українські учні найкраще справляються із завданнями розділу «Кількість» (арифметика), але мають значні прогалини у розділах «Невизначеність і дані» (статистика, ймовірність) та «Простір і форма» (геометричне моделювання). Це прямо вказує на недоліки чинних навчальних програм, які залишаються надмірно академічними та відірваними від реальних потреб учнів [31].

Таким чином, історична парадигма «реальної освіти», яка заклала фундамент технічного прогресу в XIX столітті, сьогодні трансформується у вимогу функціональної математичної грамотності. Сучасне профільне навчання має не лише давати суму знань (як це робили класичні гімназії), а й формувати здатність застосовувати ці знання у нестандартних ситуаціях, що є слабким місцем української школи згідно з даними PISA.

Загальносвітові тенденції розвитку освіти свідчать про те, що в більшості розвинених країн світу суттєвий складник реформи освіти пов'язується з проблемою профільної диференціації навчання. У цих країнах педагоги обрали шлях поліфуркації, тобто шлях більш широкої розмаїтості ухилів і напрямків.

Як зазначає О.Локшина [17], серед основних цілей, що ставить перед собою старша школа в зарубіжних країнах, потрібно передусім виокремити такі:

- індивідуальний розвиток особистості, розкриття її потенціалу;
- задоволення потреб економіки країни у кваліфікованій робочій силі;
- соціальна та культурна інтеграція, формування активного члена громадянського суспільства;
- закладення основ для ціложиттєвого навчання.

У розвинених зарубіжних країнах профільність навчання тісно взаємопов'язана з організацією професійної орієнтації учнів шкіл задля реальної індивідуалізації навчання, наближення його цілей і завдань до потреб ринкової економіки.

Характеристика організації профільного навчання у трьох західних країнах із багаторічним досвідом диференціації навчання у старшій ланці школи (Японії, США і Канади) дозволила І. Лов'яновій [14] зробити такі висновки:

1) розмаїтість напрямів навчання у старших класах дозволяє ураховувати схильності і здатності практично усіх учнів, а також потреби держави в різних фахівцях;

2) орієнтація курсів математики на той або інший загальний профіль значною мірою спрямована на можливе більш повне задоволення схильностей учнів за умови оволодіння ними майбутньою спеціальністю (однак будь-яка математична підготовка у старшій ланці базується на єдиній підготовці в середній ланці школи);

3) наявність великої кількості курсів математики на вибір учнів у поєднанні з мінімальним обов'язковим курсом, на наш погляд, недостатньою мірою може забезпечити повноцінну базову математичну освіту;

4) здатності і схильності дітей можуть бути враховані не тільки під час вибору профілю навчання (або типу навчального закладу), але й у процесі навчання за рахунок гнучкості навчальних планів і програм;

5) ЗЗСО в розвинених зарубіжних країнах має такі характерні риси, що дозволяють уважати її профільною: високий ступінь взаємодії школи з ринком праці; розвинений інформаційно-аналітичний супровід професійної орієнтації, в тому числі, використання обширних банків даних, тестових методик оцінки особистості, взаємодія з роботодавцями; переважання активних форм і методів пізнання різних сфер професійно-трудової діяльності (тренінгів, ділових ігор, трудових практик); цільова установка на виховання таких якостей особистості, як самостійність, відповідальність, уміння об'єктивно оцінювати свої потреби і можливості, прагнення до кар'єрного росту.

Спираючись на узагальнення І. Лов'янової [15], можна зазначити, що ідеї профільного навчання послідовно виявлялися як у вітчизняній, так і в зарубіжній педагогіці на всіх етапах розвитку школи. Незважаючи на те, що конкретні форми реалізації змінювалися, для процесу профілізації залишалися сталими такі ключові ознаки: необхідність вибору типу закладу освіти (з розгалуженням освітніх траєкторій за біфуркаційним чи поліфуркаційним принципом); трактування диференціації як засадничого принципу навчання; запровадження факультативів та курсів за вибором; орієнтація на інтереси, здібності й освітні запити учнів у поєднанні з потребами держави в кадрах певних галузей.

У контексті нашого магістерського дослідження це дозволяє розглядати профілізацію сучасної старшої школи як об'єктивний, закономірний процес, який має бути спрямований на розв'язання низки стратегічних завдань, а саме:

- забезпечення реальної рівності доступу до якісної освіти для різних категорій учнів з урахуванням їхніх здібностей, індивідуальних схильностей і освітніх потреб;
- створення умов для диференціації змісту навчання старшокласників із можливістю гнучкого конструювання індивідуальних освітніх програм;
- організація поглибленого вивчення окремих навчальних предметів у структурі повної загальної середньої освіти;
- розширення можливостей успішної соціалізації учнів, забезпечення наступності між загальною і професійною освітою та підвищення готовності випускників школи до опанування програм вищої освіти.

Важливо також розмежовувати поняття «диференційоване навчання» та «диференційований підхід у навчанні». Обидва терміни пов'язані з розв'язанням педагогічної проблеми індивідуалізації навчальної діяльності, тобто «диференціація» постає як похідне від ширшого поняття «індивідуалізація».

Під диференційованим навчанням зазвичай розуміють передусім систему організаційних рішень: визначення соціально-економічних, правових, організаційно-управлінських і дидактичних засад функціонування закладів різних типів; окреслення їхнього статусу, умов вступу, змісту й побудови освітнього

процесу, термінів навчання, наповнюваності груп, вимог до кваліфікації педагогів, особливостей їхнього навантаження й оплати праці тощо. Сукупність цих параметрів задає рамки й вимоги до діяльності шкіл з диференційованим навчанням та пояснює мету їх створення [14].

Натомість диференційований підхід у навчанні акцентує увагу на науково обґрунтованій системі роботи з кожним учнем: доборі змісту, форм та методів навчання, які сприяють розвитку й корекції індивідуальної освітньої траєкторії, формуванню особистості в обраній галузі навчання. У цьому випадку йдеться про цілеспрямовану педагогічну підтримку індивідуального прогресу учня в межах профільного чи іншого освітнього напрямку [15].

Спираючись на напрацювання Ю. Колягіна [27], можна виокремити низку засадничих принципів, покладених в основу системи диференціації шкільного навчання:

1. Навчання за напрямами доцільно запроваджувати лише після того, як учні здобули достатню спільну базову підготовку й змогли стійко визначитися зі своїми інтересами та схильностями.

2. На старшому ступені школи слід забезпечити максимально можливе розмаїття освітніх напрямів, щоб кожен учень міг обрати профіль відповідно до власних освітніх і професійних планів.

3. У межах кожного навчального предмета різні напрями варто об'єднувати в блоки, сформовані за подібністю цілей і завдань навчання; це дає змогу будувати єдині, узгоджені програми в межах кожного такого блоку.

4. Математика має залишатися обов'язковим компонентом навчального плану будь-якого профілю (фізико-математичного, технічного, гуманітарного тощо), оскільки забезпечує базову інтелектуальну й інструментальну підготовку старшокласників.

Якісна математична підготовка старшокласників у профільній школі потребує розв'язання таких питань:

1. Профільне навчання, з одного боку, має передбачати врахування освітніх потреб, нахилів та здібностей учнів і створення умов для навчання

старшокласників відповідно до їхнього професійного самовизначення, а з іншого, – буде ефективним лише після того, як учні отримають єдину базову освіту і визначаться у своїх уподобаннях та нахилах, що надає особливої ваги допрофільній підготовці учнів в основній школі.

2. Математика має входити до набору обов'язкових предметів будь-якого профілю, зв'язок із подальшою професійною діяльністю має бути відображений у цілях, змісті та структурі організації навчання на кожному з трьох рівнів (стандарт, академічний, профільний) математичної підготовки, цими рівнями також визначається і рівень професійної спрямованості навчання.

3. Відмінності профільного і поглибленого вивчення (характерного на сучасному етапі тільки для математики) визначаються, в основному, ступенем спеціалізації і, як наслідок, глибиною відповідних курсів і шириною охоплення ними контингенту учнів. Поглиблене вивчення припускає досить просунутий рівень підготовки учнів, що дозволяє досягти високих результатів і водночас обмежує кількість учнів, які можуть опанувати цей рівень.

Коротка характеристика зарубіжного досвіду організації профільного навчання, представлена у Проекті Концепції профільного навчання [21], засвідчує існування двох базових підходів до організації профільного навчання, а саме:

- 1) профілізація в межах єдиної установи;
- 2) профілізація в межах окремих типів навчальних закладів (академічних, технічних, професійних тощо).

Там же підкреслюється, що незалежно від національної специфіки в усіх країнах Європи профільне навчання базується на визначенні переліку навчальних предметів/освітніх галузей, змісту, вмінь і навичок/компетентностей, необхідних для підготовки молоді до дорослого життя. Узагальнений варіант є комбінацією таких компонентів:

- загальноосвітніх предметів, що є обов'язковими для вивчення усіма учнями;
- обов'язкових предметів, що відповідають обраному профілю/напрямку навчання;

- предметів за вибором (загальноосвітні чи профільно-базовані);
- міжпредметних галузей/тем/курсів, зорієнтованих на формування ключових компетентностей;
- релігійної/моральної освіти (за бажанням учнів та їхніх батьків);
- предметів/курсів практичного спрямування, що передбачають у тому числі волонтерську роботу у громаді.

Профільний предмет залишається головним компонентом змісту освіти на цьому рівні, передбачаючи поглиблене вивчення інших предметів обраного профілю. Компонент із предметів за вибором надає учням можливість удосконалювати знання з обраної галузі шляхом вивчення поглиблених модулів з фаху або споріднених з ним. Можливим є вибір протилежних до профілю дисциплін або дисциплін загального характеру [22]. Як зазначала З.Слепкань [26] у цілому, у старшій зарубіжній школі нині спостерігається стійка тенденція до скорочення кількості профілів і навчальних курсів за рахунок збільшення у навчальному плані обов'язкових предметів і курсів. Аналіз закордонного досвіду, представлений у Концепції профільного навчання [22] дозволяє виокремити такі загальні для всіх вивчених країн риси організації навчання у старшій ланці загальної середньої освіти:

1. Загальна освіта на старшому ступені в усіх розвинених країнах є профільною.
2. Як правило, профільне навчання охоплює три останніх роки навчання у школі.
3. Частина учнів, які продовжують навчання у профільній школі, неухильно зростає в усіх країнах і складає на сучасному етапі не менше 70 %.
4. Кількість напрямів диференціації, які можна вважати аналогами профілів, невелика. Наприклад, два в англomовних країнах (академічний і неакадемічний), три у Франції (природничо-науковий, філологічний, соціально-економічний) і три в Німеччині («мова-література-мистецтво», «соціальні науки», «математика-точні науки-технологія»).

5. Організація профільної підготовки розрізняється за способом формування індивідуального навчального плану учнів: від досить жорстко фіксованого переліку обов'язкових навчальних курсів (Франція, Німеччина) до можливості вибору з безлічі курсів, пропонованих на весь період навчання (Велика Британія, Шотландія).

6. Кількість обов'язкових навчальних предметів (курсів) на старшому ступені в порівнянні з основними істотно менша. Серед них передбачено в обов'язковому порядку природничі науки, іноземні мови, математику, рідну словесність, фізичну культуру.

7. Як правило, старша профільна школа виокремлюється як самостійний вид освітньої установи: ліцей – у Франції, гімназія – у Німеччині.

8. Дипломи (посвідчення) про закінчення старшої (профільної) школи зазвичай надають право на безпосереднє зарахування до вищих навчальних закладів.

9. Увесь післявоєнний період кількість профілів і навчальних курсів на старшому ступені школи за кордоном постійно скорочувалася, одночасно зростала кількість обов'язкових предметів і курсів. При цьому все більш чітко виявлялись вплив і зростаюча відповідальність центральної влади за організацію та результати освіти. Це відбивається на всіх етапах проведення іспитів, розробленні національних освітніх стандартів, зменшенні розмаїтості підручників та ін. [6].

1.2. Розвиток профільної математичної освіти в Україні

До втілення ідеї профілізації старшої школи в нинішній її інтерпретації українська педагогіка йшла через апробацію і впровадження таких її форм, як спеціалізовані школи для дітей з підвищеними здібностями і навчальними можливостями (фізико-математичні, з поглибленим вивченням іноземних мов, музичні, художні та ін.), класи з поглибленим вивченням окремих предметів, упровадження широкого спектру факультативів, навчально-виробничі комбінати, які не лише забезпечували реалізацію спільного для всіх учнів змісту трудового і

виробничого навчання, а й у багатьох випадках були центрами професійного навчання старшокласників.

В Україні є достатній позитивний досвід впровадження і функціонування профільного навчання. Нині в Україні має місце розгалужена мережа різних типів навчальних закладів: ліцеї, гімназії, колегіуми. Ці навчальні заклади надають можливість здобуття поглиблених знань із певних напрямів. Популярність навчання в ліцеях та гімназіях доводить, що попит на профільне навчання в старшій школі є.

У відповідності до Закону України «Про освіту» [9], Державного стандарту профільної середньої освіти [19], Концепції «Нова українська школа» [23], «Концепції профільного навчання в старшій школі» [21], у яких законодавчо затверджено введення профільного навчання в старшій школі, розпочався новий, сучасний етап у розвитку проблеми профільного навчання. У результаті, визначено сутність, мету, принципи, а також структуру профільного навчання, окреслено можливі форми організації, умови комплексного навчально-методичного супроводження.

У сучасній українській освітній політиці профільне навчання трактується як форма диференціації, спрямована на врахування індивідуальних освітніх інтересів та здібностей учнів, що дозволяє більш ефективно орієнтувати старшокласників на майбутній професійний шлях.

1.3. Особливості освітньої системи Великобританії

Перш, ніж перейти до розгляду безпосередньо профільного навчання в школах у Великобританії, треба зрозуміти систему освіти в країні загалом.

Система освіти у Великобританії складається з чотирьох основних частин: початкова освіта (primary education), середня освіта (secondary education), подальша освіта (further education) і вища освіта (higher education) [24].

Також система освіти у Великобританії поділяється на “ключові етапи” (“key stages”):

- ключовий етап 1: 5-7 років;

- ключовий етап 2: 7-11 років;
- ключовий етап 3: 11-14 років;
- ключовий етап 4: 14-16 років.

Початкова шкільна освіта у Великобританії починається у віці 5 років і продовжується до віку 11 років, охоплюючи ключові етапи 1 і 2. Деякі початкові школи поділяються на дитячий і молодший рівні. Це, зазвичай, окремі школи на одній території. Віковий діапазон дитячого віку (ключовий етап 1) - з 5 до 7 років. Віковий діапазон молодшого віку (ключовий етап 2) - з 7 до 11 років.

На рівні початкової школи існують наступні вікові групи [24]:

- ✧ Рік R (Reception) (клас R) - вік 4-5 років
- ✧ Рік 1 (клас 1) - вік 5-6 років
- ✧ Рік 2 (клас 2) - вік 6-7 років - це рік, коли проводиться тестування SATs по ключовому етапу 1
- ✧ Рік 3 (клас 3) - вік 7-8 років
- ✧ Рік 4 (клас 4) - вік 8-9 років
- ✧ Рік 5 (клас 5) - вік 9-10 років
- ✧ Рік 6 (клас 6) - вік 10-11 років - це рік, коли проводиться тестування SATs по ключовому етапу 2

Середня освіта у Великобританії починається з 7-го року.

Роки 7 і 8 (класи 7 і 8) - це перші два роки середньої шкільної освіти у Великобританії. В деяких незалежних школах вони включені в молодшу школу, в інших є частиною старшої школи.

За шкільною системою освіти у Великобританії всі учні вивчають англійську, математику, науки, гуманітарні предмети і сучасну мову. Крім цього кожна школа має список з вибірковими дисциплінами, таким як художнє мистецтво, музика, драма, латинська мова, спортивні науки, технології дизайну, комп'ютерні науки і.т.ін. Студенти можуть обрати декілька предметів, що їх цікавлять. В деяких школах учні складають Загальний Вступний Іспит (Common Entrance Exam) на 7-му році навчання. Проводяться 3 екзаменаційні сесії: в листопаді, січні і

травні/червні. Перехід з молодшої до старшої школи (з року 8 до року 9) в цих школах може бути обумовлений результатами даного Загального Вступного Іспиту.

Рік 9 (клас 9) - це дуже важливий рік у Британській шкільній системі, оскільки багато учнів переходять з молодшої школи (Junior School) до старшої школи (Senior School). Це також дуже хороша основа для програми GCSE і це точка входу до всіх шкіл [80].

Роки 10-11 (класи 10-11) - це останні два роки середньої освіти у Великобританії. Вони починаються у віці 14 років. Учні готуються до екзаменів GCSE (General Certificate of Secondary Education), які вони складатимуть через два роки.

За Британською шкільною системою, впродовж програми GCSE, учні вивчають від 9 до 12 предметів. Деякі з них є обов'язковими (англійська, математика, науки, гуманітарні науки, сучасна мова і т.ін.), деякі обираються кожним студентом відповідно до їх здібностей і вподобань. В кінці 2-го року програми GCSE, після екзаменів з кожного предмету, що вивчався, учні отримують свої GCSE-сертифікати.

Обрані предмети і результати GCSE дуже важливі для їхнього подальшого навчання (A-level або IB) та для їхнього вступу до університету.

Деякі школи пропонують однорічну програму GCSE (рік 11 або 11 клас) для учнів з інших країн, що прагнуть навчатися у Великобританії. Це інтенсивні однорічні курси, що доступні для учнів віком 15 років та старше, з відповідним академічним рівнем з їхньої власної країни. Тут вивчається менше предметів - максимум 6 [25].

Є також програма IGCSE (International General Certificate of Secondary Education), яка готує міжнародних студентів до A-level та/або IB (International Baccalaureate). Студенти вивчають від 5 до 7 предметів, до яких входять англійська, математика і науки. В кінці 11 року (11 класу) студенти складать екзамени по кожному предмету, що вивчався і отримують IGCSE-сертифікати.

Подальша освіта після GCSE - це підготовка до вступу в університет - роки 12 і 13 (класи 12 і 13). Тут учні можуть вибрати продовжити навчання на програмі A level або на програмі IB [10].

A level - Advanced level - просунутий рівень.

У шкільній системі Великобританії як тільки учень досягає 16-тирічного віку, він може почати дворічну програму, яка веде до екзаменів A level . Студенти спеціалізуються на 3 або 4 предметах, що, зазвичай, співвідносяться із предметами, які вони збираються вивчати в Університеті. Екзамени A level - це державні екзамени, які визнаються всіма університетами Великобританії та установами в усьому світі. В кінці 13-го року (13 класу), склавши екзамени з кожного предмету, учні отримують A level сертифікати.

IB - International Baccalaureate - міжнародний бакалавріат.

Ті учні, що хочуть вивчати більше, ніж 3-4 предмети, можуть продовжити їхнє навчання з більшою кількістю предметів за програмою Диплома Міжнародного Бакалавріату (IB), що пропонується деякими незалежними школами. Протягом IB студенти вивчають 6 предметів: 3 на вищому рівні і 3 на стандартному рівні. Кожна школа пропонує різні предмети на різних рівнях складності. Програма IB також включає обов'язкову основну програму, що складається з наступних дисциплін: “Теорія знань” (Theory of Knowledge), “Розширене ессе” (Extended Essey) та “Творчість, активність, служіння” (Creativity, Activity, Service). В кінці учні складають письмові екзамени по кожному предмету.

Профільне навчання математики починається з 12 року навчання, коли учні вибирають її своїм предметом спеціалізації, але підготовка до 12-13 класів починається з 9 року навчання і активізується протягом 10-11 років, коли учні проходять програму GCSE. Тож слід її розглянути докладніше.

Підхід до програми GCSE у різних школах в Англії може відрізнятися один від одного, але навчальний план дворічної підготовки обов'язково включає в себе від 5 до 10 предметів. Англійська (мова і література), математика і природничі науки є обов'язковими. Деякі приватні школи пропонують Англійський Бакалавріат, де обов'язкові також історія / географія та іноземна мова, щоб

скомбінувати серйозний список, “академічних” предметів, які цінуються університетами та роботодавцями. Релігійне і фізичне виховання в програмі навчання в Англії входять до переліку обов’язкових дисциплін. Але здавати по ним іспити необов’язково - це залежить від бажання студента [10].

Загальна рекомендація до додаткових предметів, які учень обирає самостійно = максимально урізноманітнити список дисциплін, щоб в майбутньому можна було не обмежувати себе у виборі потрібних A-levels і коледжу або університету. Предмети за вибором для складання іспитів GCSE: астрономія, геологія, психологія, статистика, історія стародавнього світу, релігія, соціологія, бізнес, економіка, дизайн і технологія, інженерна справа, мистецтво і дизайн, хореографія, драматургія, кіно, медіа, музика, фізичне виховання.

Після закінчення програми GCSE студенти здають іспити і отримують оцінки за шкалою від 9 (максимальна) до 1.

Зазвичай потрібно скласти 5 предметів GCSE з оцінками від 9 до 4 до моменту подачі заяви на курс A-level, але все ж таки для участі в конкурсних програмах навчання краще прагнути отримати якомога вищі оцінки в GCSE, щоб мати реальні шанси на зарахування.

Існує поділ на рівні складності, в залежності від академічної підготовки і здібностей студентів [25]:

- вищий (Higher Tier) - екзаменаційні листи з завданнями підвищеного рівня складності, студенти можуть отримати оцінки від 9 до 4;

- базовий (Foundation Tier) - екзаменаційні листи з завданнями спрощеного рівня, студенти можуть отримати оцінки від 5 до 1.

В даний час існує 5 екзаменаційних рад:

- ✓ Assessment and Qualifications Alliance (AQA)
- ✓ Oxford, Cambridge and RSA Examinations (OCR)
- ✓ Edexcel
- ✓ Welsh Joint Education Committee (WJEC)
- ✓ Council for the Curriculum, Examinations & Assessment (CCEA)

Підсумкова оцінка складається з результатів іспитів, накопичених під час навчання оцінок і виконаних курсових робіт і проектів. Успішне закінчення програми GCSE означає отримання сертифікату і дає можливість або продовжити навчання за програмами A-Level, IB Diploma Programme і Cambridge Pre-U, або, альтернативно, почати трудову діяльність [24].

Однією з найбільш характерних рис системи освіти Великобританії є унікальний перехід між старшою школою і університетом. У більшості країн світу студенти вступають до університету після закінчення середньої школи. У Сполученому Королівстві, студенти повинні пройти проміжну сходинку навчання (додаткову освіту) і здати національні іспити, які вимірюють їх успішність (A-Level). Весь сенс у тому, щоб вирівняти свій академічний потенціал відповідно до вимог університету.

Що таке A-Levels?

Просунуті рівні або A-Level - це предметні кваліфікації, які британські студенти віком 16 років і старше повинні отримати, якщо вони планують вступити до університету або просто хочуть отримати кращі знання в конкретній галузі навчання або обраної професії.

Курси A-Level проводяться в коледжах шостого класу і коледжах додаткової освіти. По суті, ці дві установи однакові, за винятком того, що коледжі додаткової освіти працюють окремо від старших шкіл, пропонують більш широкий спектр курсів і кваліфікацій, а також забезпечують інше середовище навчання в порівнянні з старшими школами.

A-Levels діляться на два етапи: AS Level - приймаються студенти у віці від 16 до 17 років, A2 Level - приймаються студенти у віці від 17 до 18 років.

В кінці кожного етапу необхідно здати іспит. Здача цих іспитів є обов'язковою для переходу на вищий рівень навчання.

Найскладнішими предметами на A level вважаються математика і хімія, психологія і іноземні мови також складні. Крім того існує певний список предметів, які найчастіше потрібні в університетах Великобританії, - ці предмети відомі під загальною назвою «полегшені предмети».

1.4. Порівняльний аналіз організації профільного навчання математики в Україні та Великобританії

Переваги і недоліки - це відносна категорія, і визначаються вони у порівнянні із чимось іншим. В даному випадку переваги і недоліки профільного навчання математики в школах України визначатимуться відносно підходу до профільного навчання математики у західних країнах загалом. Крім того, треба враховувати той факт, що переваги і недоліки - це сторони однієї і тієїж медалі, і там, де є сила, там же криється і слабкість. Тому переваги і недоліки будь чого треба розглядати взаємообумовлено.

Ключові аспекти, які необхідно проаналізувати стосовно профільного навчання математики в школах України - це програма навчання та підхід до формування математичних класів.

Розглянемо кожен з цих аспектів.

По-перше, зупинимося на програмі навчання математики. На сьогоднішній день ні для кого не секрет, що, навіть, звичайна математика в українських школах на порядок складніша за математику в школах країн Заходу. В чому саме це виражається:

1) вона більш насичена темами і випереджає програми шкіл західних країн на 1-2 роки;

2) вона більш глибока, тобто кожна тема вивчається на набагато більшу глибину складності.

І ці два фактори можна розглядати одночасно і як переваги, і як недоліки, оскільки, з одного боку, така програма дає учням більш ґрунтовні знання і краще готує їх до навчання у вищій школі, але, з іншого боку, така програма при масовому навчанні, коли в класах по 30 учнів, вимагає, насправді, набагато більше часу для її проходження і засвоєння, ніж в ній закладено [].

Якщо ж говорити про програму профільної математики, яка в Україні починається з 8-го класу, то глибина складності її тем співставна з університетським рівнем, і дуже обмежене коло учнів можуть її засвоїти на хорошому якісному рівні.

По-друге, розглянемо підхід до формування математичних класів.

Диференціація учнів на профільні класі здійснюється у 8 класі. Зазвичай, школи пропонують 2 і більше профілів на вибір, в залежності від розміру школи і кількості дітей. І тут позитивним моментом є те, що школи можуть запропонувати учню можливість вибору профіля для кращого розвитку його здібностей і реалізації його інтересів. Але тут же криється і декілька недоліків. Не всі школи мають профільні класи і могли запропонувати їх своїм учням. Деякі школи через свої маленькі розміри мали обмежену кількість профілів (наприклад, тільки два), і вибір, насправді, був дуже обмежений. Ну й найгірший момент, який є негласним, але, тим не менш, реальним, - це те, що в математичні класи завжди є недобір учнів з реально високими здібностями до математики, і школи наповнюють математичні класи за рахунок дітей із середніми здібностями, які є менш мотивованими. Наслідком цього стає те, що такі діти не тягнуть профільну програму з математики і втрачають віру в себе і мотивацію, хоча, навчаючись на рівні стандарту, могли б показувати досить високі результати [11].

Окремо треба сказати про олімпіадну математику (сюди ж віднесу і проекти МАН). Вона в Україні розвинута на досить високому рівні, постійно підтримується на державному рівні і це дуже сильна конкурентна перевага нашої країни, оскільки дозволяє виявити і розвивати учнів з унікальними математичними здібностями. Недопрацюванням у цій сфері я вважаю недостатнє усвідомлення і цінування таких учнів для користі держави. На мою думку, робота із ними не повинна закінчуватися на олімпіадах - їм треба створювати найкращі можливі умови для подальшої наукової роботи.

Профільне навчання математики у Великобританії починається вже після середньої школи на A level, де діти обирають її як предмет, що сприяє реалізації їх подальших життєвих інтересів і цілей [10].

Але слід приділити увагу допрофільній математичній підготовці у Великобританії та її особливостям, оскільки вона має суттєві відмінності від української.

По-перше, допрофільна програма навчання математики, тобто та, що вивчається усіма учнями в середній школі, з якої потім вони складають екзамен GCSE, відрізняється від української програми початкової і середньої школи тим, що охоплює ширше коло тем, але з набагато меншою глибиною їх складності та більшою орієнтацією на вирішення простих життєвих задач, а також методичними підходами до пояснення кожної теми.

Наприклад, ширше коло тем виражається, наприклад, наявністю в молодшій середній школі задач на вміння визначати час по різним типам годинників (специфіка англomовних країн), працювати із розкладом потягів, літаків і т.ін., та з різними часовими поясами, на вміння рахувати гроші та розв'язувати елементарні побутові економічні задачі. В старшій середній школі - це наявність математико-географічних задач на знаходження азимута та використання геометрії для роботи з картами. Сюди ж відноситься більш широке подання тем зі статистики та теорії ймовірностей, які на прикладі найпростіших задач закладають базове розуміння цих тем, і, на мою думку, сильно полегшують розуміння як в звичайному житті, так і закладають хороші основи для подальшого їх вивчення вже на профільному рівні. Таке ширше охоплення тем математики, на мою думку є перевагою, оскільки розширює погляд учнів на сфери застосування математики у реальному житті, створює прив'язку досить абстрактної науки до реальності і, таким чином, створює мотивацію її вивчати [28].

Менша глибина складності тем особливо проявляється в алгебрі: завдання на алгебраїчні перетворення за програмою Великобританії співставні з завданнями початкового рівня складності української системи. Але, треба зазначити, що глибина складності тем по геометрії є, приблизно, співставною із українською програмою. Також треба відмітити, що в приватних школах викладання математики є більш якісним, ніж в державних, що виявляється у підвищенні рівня складності завдань і більшій вимогливості до результатів студентів.

Менша глибина вивчення тем в рамках середньої школи - перевага це чи недолік - питання спірне, оскільки з одного боку дозволяє більше часу приділити вивченню кожної теми і допомагає учням краще їх заствоїти на базовому рівні, але

з іншого боку нижчі вимоги до рівня знань призводять до зниження загального інтелектуального рівня учнів і, в подальшому, населення країни.

Дуже важливою відмінністю програми з математики Великобританії є практична спрямованість задач, що формулюються саме таким чином, як ми зустрічаємося із ними в житті. Наприклад, теми із статистики подаються з метою, щоб учні потім ці знання використовували у своїх проєктах із інших предметів, задачі по стереометрії в старших класах середньої школи передбачають обчислення об'ємів складних фігур, і дуже велика увага приділяється розвитку вмінь усних обчислень, причому не просто для елементарних дій додавання, віднімання, множення та ділення, а й для визначення частки від числа та відсотку від числа. Це велика перевага математичного навчання Великобританії [25].

Щодо методичних підходів до пояснення кожної теми, то тут однозначною перевагою навчання математики у школах Великобританії є більша “людяність” та “дитино-орієнтованість” підходу, тому що теоретичний матеріал кожної теми побудований максимально просто, зрозуміло і наочно, на відміну від українських підручників, теорія в яких викладена такою мовою, наче вона написана не для дітей-учнів, а для інших вчителів математики. Деякі методики пояснення окремих тем обов'язково треба впроваджувати в методику викладання математики в Україні, оскільки вони кращі і зрозуміліші для дітей, ніж вітчизняні (наприклад, використання “дерева множників” для знаходження НСД та НСК).

Ще однією відмінністю навчання математики у Великобританії є диференційований підхід. В школах Великобританії при вивченні математики учнів, відповідно їх здібностей, розподіляють, мінімум, на чотири класи, і вони вивчають математику за різним рівнем складності. Таким чином, реалізується принцип гомогенності групи учнів, і можна підібрати для них адекватні до їхніх здібностей завдання, і це є дуже важливою перевагою Британської системи. (До речі, такий самий підхід застосовується і в школах Ізраїлю.) Однак тут також міститься і недолік, що учні, які вивчають математику на нижчих рівнях складності не можуть претендувати на складання екзамену GCSE на вищому рівні. Тобто вони

можуть складати GCSE на базовому рівні, а це певний діапазон оцінок, який обмежує їх можливості для подальшого вступу.

Профільне навчання математики у Великобританії починається на A level. Тут математика не є обов'язковою, а є предметом за вибором. Причому провчившись перший рік на A level перелік предметів можна дещо змінити [24].

Викладання математики на A level вже більше схоже на університет, тому що вона поділяється на чотири окремі дисципліни, кожен з яких веде окремий викладач, і рівень складності кожної теми є досить високим. Для розуміння рівня складності можна сказати, що він співставний із завданнями зі збірника Сканаві. Плюс в математиці рівня A level розглядаються теми, які в українській математиці винесені у вищу математику, наприклад диференціальні рівняння та лінійна алгебра.

Таким чином, перевагами профільного навчання математики на A level у Великобританії є те, що тут реалізовано дійсно профільне навчання математики із глибоким зануренням в кожен тему. Але недоліком є те, що більшість дітей, які обирають математику для вивчення на A level, на другому році навчання відмовляються від неї і обирають інший предмет. На мою думку, це стається тому, що рівень складності програми з математики на A level кардинально відрізняється від рівня складності математики в середній школі, навіть від вищого рівня екзамену GCSE. Тож, коли учні обирають математику для вивчення на A level, потім починають реально вивчати, вони виявляються тотально неготовими для її сприйняття на такому рівні складності, і відбувається “розрив очікувань”.

Розглядаючи переваги і недоліки профільного навчання математики у Великобританії не можна також не сказати про олімпіадну математику.

Є дуже багато проблем з олімпіадною математикою у Великобританії. Перш за все необхідно зрозуміти, як ведеться математичний гурток, а потім про місцеві олімпіади і що з ними не так.

Математичні гуртки існують на базі університету та є повністю безкоштовними для школярів. Навчальна програма ділиться за віковими категоріями і кожен, хто зацікавлений, має можливість вступити до гуртка. За один урок розбирається 4-7 завдань, програма уроку – це збірка з різних джерел, яка

підбирається за темою уроку. Завдання різні по складності, обов'язково є щось базове, але й щось складніше для постійного вдосконалення. Уроки відбуваються у маленьких групах із восьми осіб. На початку заняття учням дається завдання, потім викладач чекає коли двоє чи троє учнів її вирішать, після цього вони всі разом розбирають рішення, викладач просить їх розповісти як саме вони вирішували і потім разом з рештою учнів опрацьовують завдання. І звичайно, якщо хтось чогось не розуміє, то він дає їм підказки. Прогрес у дітей після таких занять є, вони перемагали на олімпіадах, брали різні нагороди. При цьому, на жаль, у місті, де проживає приблизно 300 тисяч людей, немає жодного математичного гуртка, тож учням просто ніде розвивати свої таланти [25].

Олімпіади у Великій Британії влаштовані особливим чином. Все починається з Junior mathematical challenge для років з 6 по 8 (у нашій освітній системі це з 4 по 6). У цій олімпіаді не має розділу за віковими категоріями, внаслідок чого учні різного віку конкурують між собою. Через таку систему перемагають найчастіше восьмикласники (шестикласники). Процес реєстрації на олімпіаду дуже неоднозначний, учня на подібне змагання може зареєструвати лише школа, на жаль, школа робить це дуже неохоче. Якщо раптом батьки хочуть, щоб їхні діти взяли участь в олімпіаді, їм доводиться все брати в свої руки, оскільки розраховувати на школу не можна.

Спершу треба добитися від школи того, щоб учня зареєстрували на олімпіаду. Це не так просто, оскільки деякі вчителі просто не знають як це робиться. Також була ситуація, коли жінка намагалася зареєструвати свою дитину, яка навчалася на той момент у 7 класі, на Junior mathematical challenge. Школа відмовила у цьому проханні і заявила, що учень ще занадто малий для такого змагання, хоча вік учня повністю підходив під вимоги. Саме тому в питанні олімпіад потрібно самотійно розбиратися.

Структура олімпіад у Великій Британії досить проста. Є перший рівень, називається він Mathematical challenge, і він буває трьох рівнів за віком, спочатку Junior (молодший 6-го класу), потім Intermediate (молодший 9-го класу) і наприкінці Senior (молодший 11-го класу). У цих олімпіадах можна отримати

бронзу, срібло або золото. Отримують їх тисячі дітей, найкращі з них допускаються на олімпіади наступного рівня. Система така, що тільки найкращі з тих, хто взяв золото на Junior mathematical challenge допускаються на наступний рівень [24].

Проблема саме цієї олімпіади в тому, що дітям дають 25 завдань на 1 годину, тобто приблизно 2 хвилини на 1 завдання. Щоб пройти на більш просунутий рівень, потрібно вирішити, приблизно, 22 з 25 завдань. Суть цієї проблеми в тому, що в учня не має часу подумати, як вирішити це завдання, він повинен знати рішення і це позбавляє олімпіаду сенсу. Найстрашніше, що подібний підхід може позбавити здібного учня бажання займатися математикою, адже на заміну його здатності думати приходить просто вміння запам'ятовувати способи рішення [25].

Дивлячись на структуру олімпіадного руху у Великобританії можна зрозуміти, чому країна не може показати високих результатів на міжнародній олімпіаді. Очевидно, що олімпіадний рух у Британії розвинуто вкрай погано і школи, як і вчителі у школах, не зацікавлені в участі дітей в олімпіадах, адже проблему може скласти навіть проста реєстрація на цю саму олімпіаду.

У структурі є недалекоглядність, адже на міжнародному рівні на 1 завдання дається півтори години, тоді як у Британії лише 2 хвилини і через це багато здібних дітей просто не доходять до наступного рівня.

Висновки до першого розділу

Профільне навчання в школах загалом почало розвиватися ще з часів античності, і профільне навчання математиці в тому числі. Головними чинниками такого розвитку є, по-перше, запити суспільства на підготовку кадрів певної кваліфікації із конкретними знаннями, а по-друге, індивідуальні здібності, нахили й інтереси людей, які вмотивовані і зацікавлені у вивченні певних дисциплін і сфер життя.

Країни сформували різні підходи до навчання учнів математики. Дослідження, проведене в даному розділі, показало, що підходи до навчання математики в Україні і у Великобританії мають як спільні риси, так і принципові відмінності.

Україна успадкувала радянську систему освіти, в якій точні науки, і, особливо, математика і фізика були у великій пошані, оскільки дозволяли готувати висококваліфіковані інженерні кадри для промисловості країни, і, в першу чергу, для військово-промислового комплексу. Програма з математики, яка нам дісталася у спадок і потім розвинулася у національну українську програму є більш складною і насиченою порівняно із програмою з математики західних країн. В нас велика увага приділяється також і профільному математичному навчанню, яке реалізується шляхом створення математичних класів та, навіть, фізико-математичних ліцеїв і тому подібних профільних шкіл. Це було і поки що залишається нашою конкурентною перевагою, адже більш високий рівень вимог програми сприяє більш високому інтелектуальному розвитку учнів, і, в подальшому, дає більш високий інтелектуальний розвиток населення країни.

Але де сильна сторона, там же ж криється і слабкість: вітчизняна програма з математики є досить абстрактною, теоретичною, сильно відірваною від практичного життя. Саме тому, не вбачаючи прямого зв'язку між цими теоретичними знаннями і практикою, досить часто учні втрачають мотивацію до вивчення даної дисципліни.

У Британській системі навчання математики в школах акценти розставлені з точністю до навпаки: дуже практичний зміст всього матеріалу, що вивчається в межах середньої школи, який легко застосувати в реальному житті, і досить невисокий рівень складності, порівняно із українською програмою, а вся академічна і абстрактна складність дисципліни винесена в A level. Але в A level складність і об'єм матеріалу аж зашкалюють. І це призводить до того, що лише одиниці можуть витримати це навчання, отже позитивні риси більшої адекватності підходу до навчання математики на середньому рівні, виливаються у такі негативні наслідки, що на профільному рівні мало хто хоче вчити математику взагалі.

Для вдосконалення і розвитку вітчизняної системи навчання математики необхідно чітко усвідомлювати наші наявні конкретні переваги і не втрачати їх, а з досвіду західних країн брати найкращі методики і практики, і дуже обережно і поступово впроваджувати їх у себе.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ УДОСКОНАЛЕННЯ ЗМСТУ НАВЧАЛЬНИХ ПРОГРАМ ПРОФІЛЬНОГО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В УКРАЇНІ

2.1. Підходи до удосконалення змісту профільного навчання математики в Україні у відповідності до найкращих практик профільного навчання математики Великобританії

Удосконалення змісту профільного навчання математики в Україні можливе двома шляхами: на основі власних українських ідей і розробок та на основі найкращого світового досвіду. Перший підхід - експериментальний, і він обов'язково має бути, оскільки забезпечує прогрес і розвиток освіти загалом. Але цей підхід потребує багато часу на впровадження, апробацію, аналіз результатів та їх коригування. На користь другого підходу говорить те, що він більш безпечний, оскільки він вже апробований на практиці, довів свою ефективність, і можна з більшою надійністю прогнозувати результати його впровадження в Україні. Тому вивчення передового світового досвіду в усіх сферах є вкрай важливим для розвитку країни, і саме тому було обрано цей підхід для даного магістерського дослідження.

Оскільки британська система освіти зарекомендувала себе як одна з найкращих в світі, то, на нашу думку, важливо дослідити її на предмет запозичення найкращих практик для поліпшення вітчизняної освіти. Саме тому було обрано вивчити британську програму A-level з математики з метою розробки методичних рекомендації щодо удосконалення змісту профільного навчання математики в Україні.

Британська програма A-level з математики є аналогом вітчизняної програми профільного навчання математики у старшій школі, що сконцентровано у два роки навчання. Навчання розпочинається після середньої школи та складання загального екзамену за середню школу підвищеного рівня складності (GCSE higher tier).

Мета програми A-level - підготувати учнів до подальшого навчання в університетах або інших закладах. Вона реалізується таким чином, що студенти

мають можливість вибрати саме ту комбінацію навчальних блоків з кожної обраної дисципліни, яка найкращим чином відповідає їх навчальним і життєвим цілям.

Розглянемо, як це реалізується в програмі A level з математики на основі Силабусу програми AS&A Level з математики від підрозділу оцінювання міжнародної освіти Кембріджського університету [32; 33]

Програма AS&A Level з математики пропонує шість частин - вони називаються “компоненти”, за результатами кожної з яких учні складають екзамен (Paper):

Paper 1: Чиста математика 1 (Pure Mathematics 1)

Paper 2: Чиста математика 2 (Pure Mathematics 2)

Paper 3: Чиста математика 3 (Pure Mathematics 3)

Paper 4: Механіка (Mechanics)

Paper 5: Ймовірність і статистика 1 (Probability & Statistics 1)

Paper 6: Ймовірність і статистика 2 (Probability & Statistics 2)

Учні обирають дві компоненти для рівня математики AS (advanced subsidiary - це перший рік навчання на програмі, після якого можна або закінчити навчання і отримати AS-сертифікат, або продовжити його на другому році, і отримати A-сертифікат), і чотири компоненти для рівня математики A (advanced - це два роки навчання, після закінчення яких можна отримати A-сертифікат).

Комбінації блоків, які доступні учням для вибору, представлені на рис. 2.1. Як бачимо, існує три варіанти вибору для першого року навчання, один з яких не дає можливості продовження навчання на другому році - це “Чиста математика 1” (Paper 1) і “Чиста математика 2” (Paper 2). Ця комбінація блоків дає можливість отримати лише AS-сертифікат. А щоб мати можливість продовжити навчання на другому році і отримати A-сертифікат, учні мають обрати для першого року або комбінацію компонент “Чиста математика 1” (Paper 1) і “Механіка” (Paper 4), або “Чиста математика 1” (Paper 1) і “Ймовірність та статистика 1” (Paper 5). Тоді на другому році вони обирають компоненту “Чиста математика 3” (Paper 3), як альтернативну і більш розширену версію компоненти “Чиста математика 2” (Paper 2), і комбінують її або з компонентою “Механіка” (Paper 4) чи з компонентою

“Ймовірність і статистика 1” (Paper 5), якщо вони не обирали їх на першому році навчання, або комбінують з компонентою “Ймовірність і статистика 2” (Paper 6), якщо на першому році вони вивчали компоненту “Ймовірність і статистика 1” (Paper 5), і хочуть продовжити навчання в цьому напрямку.

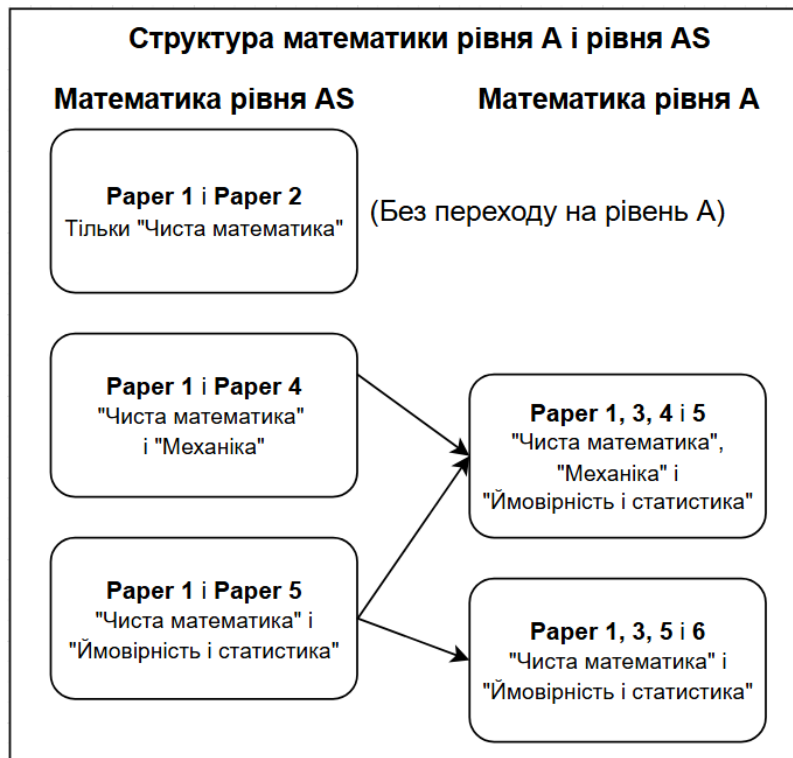


Рис. 2.1. Структура програми з математики AS рівня і A рівня.

Таким чином, дворічна програма A Level передбачає вивчення двох компонент чистої математики (1 і 3) (тобто, на більш глибокому рівні, ніж AS Level), а також вивчення ще двох компонент - або “Механіка” і “Ймовірність і статистика 1”, або ж більш ґрунтовне вивчення двох компонент “Ймовірність і статистика 1 і 2”.

Зміст кожної компоненти по темам представлений в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Зміст компонент британської програми з математики A Level

Назви компонент	Вид оцінювання	Теми, що включені до кожної компоненти
Чиста математика 1	Екзамен 1 (Paper 1)	1 Квадратичні рівняння 2 Функції 3 Координатна геометрія 4 Радіанна міра 5 Тригонометрія 6 Ряди

		7 Диференціювання 8 Інтегрування
Чиста математика 2	Екзамен 2 (Paper 2)	1 Алгебра 2 Логарифмічна та показникова функції 3 Тригонометрія 4 Диференціювання 5 Інтегрування 6 Чисельне розв'язування рівнянь
Чиста математика 3	Екзамен 3 (Paper 3)	1 Алгебра 2 Логарифмічна та показникова функції 3 Тригонометрія 4 Диференціювання 5 Інтегрування 6 Чисельне розв'язування рівнянь 7 Вектори 8 Диференційні рівняння 9 Комплексні числа
Механіка	Екзамен 4 (Paper 4)	1 Сила і рівновага 2 Кінематика руху по прямій лінії 3 Імпульс 4 Закони руху Ньютона 5 Енергія, робота і потужність
Ймовірність і статистика 1	Екзамен 5 (Paper 5)	1 Представлення даних 2 Перестановки та комбінації 3 Імовірність 4 Дискретні випадкові величини 5 Нормальний розподіл
Ймовірність і статистика 2	Екзамен 6 (Paper 6)	1 Розподіл Пуассона 2 Лінійні комбінації випадкових величин 3 Неперервні випадкові величини 4 Вибірка та оцінка 5 Перевірка гіпотез

Умови проведення екзаменів та критерії їх оцінювання наведені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Огляд оцінювання компонент (блоків)
британської програми A Level з математики

Компоненти «Чистої Математики»

Paper 1	Paper 2
---------	---------

Чиста математика 1 1 година 50 хвилин 75 балів 10–12 структурованих питань на основі змісту предмета «Чиста математика 1» Письмовий іспит Зовнішня оцінка 60 % рівня AS 30 % рівня A Обов'язковий для рівнів AS та A	Чиста математика 2 1 година 15 хвилин 50 балів 6–8 структурованих питань на основі змісту предмета «Чиста математика 2» Письмовий іспит Зовнішня оцінка 40 % рівня AS Пропонується тільки як частина рівня AS
Чиста математика 3 1 година 50 хвилин 75 балів 9–11 структурованих питань на основі змісту предмета «Чиста математика 3» Письмовий іспит Зовнішня оцінка 30 % від загальної оцінки A Level Обов'язковий для A Level	
Компоненти «Механіки»	
Механіка 1 година 15 хвилин 50 балів 6–8 структурованих питань на основі змісту предмета «Механіка» Письмовий іспит Зовнішня оцінка 40 % від рівня AS 20 % від рівня A Пропонується в рамках рівнів AS та A	

Продовження табл. 2.2

Компоненти «Ймовірності і статистики»

Репер 5	Репер 6
----------------	----------------

Ймовірність і статистика 1 1 година 15 хвилин 50 балів 6–8 структурованих питань на основі змісту предмета «Ймовірність і статистика 1» Письмовий іспит Зовнішня оцінка 40 % від рівня AS 20 % від рівня A Обов'язковий для рівня A	Ймовірність і статистика 2 1 година 15 хвилин 50 балів 6–8 структурованих питань на основі змісту предмета «Ймовірність і статистика 2» Письмовий іспит Зовнішня оцінка 20 % від загальної оцінки A Level Пропонується тільки як частина A Level
---	---

Приблизна вагомість, присвоєна кожній з цілей оцінювання (АО), наведена нижче в табл. 2.3 і 2.4.

Таблиця 2.3

Мета оцінювання у відсотках від кожної кваліфікації

Мета оцінювання	Оцінка в AS Level %	Оцінка в A Level %
АО1 Знання та розуміння	55	52
АО2 Знання та розуміння	45	48
Загалом	100	100

Мета оцінювання у відсотках від кожного компонента

Мета оцінювання	Оцінка в компонентах %					
	Paper 1	Paper 2	Paper 3	Paper 4	Paper 5	Paper 6
АО1 Знання та розуміння	55	55	45	55	55	55
АО2 Знання та розуміння	45	45	55	45	45	45
Загалом	100	100	100	100	100	100

Мета оцінювання (МО) екзаменів програми з математики A Level полягає в наступному:

АО1 Знання та розуміння:

- Продемонструвати розуміння відповідних математичних понять, термінології та нотації.
- Точно згадувати та використовувати відповідні математичні маніпулятивні техніки.

АО2 Застосування та комунікація:

- Розуміти відповідну математичну процедуру для заданої ситуації.

- Застосовувати відповідні способи математичних навичок та технік для вирішення задач.
- Представляти відповідні математичні роботи та повідомляти відповідні висновки у чіткій та логічній формі.

2.2. Порівняльний аналіз британської програми A Level і профільної української програми з математики

Для досягнення мети та виконання завдань даного магістерського дослідження було детально проаналізовано зміст тем трьох компонент британської програми A Level на основі раніше згаданого Силабусу Кембріджського університету [32; 33]: “Чиста математика 1”, Чиста математика 2” і “Чиста математика 3”. Також було проведено порівняльний аналіз цієї програми з профільною програмою з математики української школи [18]. Також було досліджено зміст профільного навчання математики за низкою вітчизняних підручників з алгебри та геометрії [1–5]:

Огляд британської програми A Level [32; 33] з математики показав, що окрім компонент чистої математики вона також включає компоненту механіки, яка в українській шкільній програмі відноситься до фізики, а також дві компоненти ймовірності і статистики, які в українській шкільній програмі відносяться до математики, але вивчаються в меншому обсязі, ніж в британській програмі. Ці компоненти в даній магістерській роботі не розглядалися.

Порівняльний аналіз змісту компоненти “Чиста математика 1” та української програми з математики профільного рівня виконувався за допомогою розробленої нами таблиці, яка в повному обсязі представлена в додатку А, а її фрагмент в якості шаблону показаний в табл. 2.5.

Перші два стовпці таблиці взято з Силабусу британської програми A Level - це перший стовпець “Навички”, тобто що учні повинні вміти, і другий стовпець “Приклади і примітки”, які допомагають зрозуміти детальніше зміст кожної навички. Другі два стовпці таблиці побудовано шляхом аналізу українських

підручників - нас цікавило, в якому класі вивчається дана тема в українській програмі, а також які наявні при цьому особливості і, найголовніше, недоліки в українській програмі.

Порівняльний аналіз змісту компонент “Чиста математика 2” і “Чиста математика 3” та української програми з математики профільного рівня виконувався за допомогою розробленої нами таблиці, яка в повному обсязі представлена в додатку Б, а її фрагмент в якості шаблону показаний в табл. 2.6. Дана таблиця побудована за аналогічною методикою, що і таблиця додатку А.

Оскільки ці дві компоненти є альтернативними, тобто учні обирають або одну, або другу, а зміст компоненти “Чиста математика 2” повністю включений до компоненти “Чиста математика 3”, яка є більш розширеною версією, то доцільно було проаналізувати їх паралельно.

Результати повного порівняльного аналізу змісту тем компоненти “Чиста математика 1”, “Чиста математика 2” і “Чиста математика 3” та української програми з математики профільного рівня наведено у додатку А. Для складання порівняльних таблиць змісту тем компоненти “Чиста математика 1” та української програми з математики профільного рівня за наступними критеріями: навички, які учні повинні опанувати у процесі вивчення Paper 1: Чиста математика 1 та приклади з різними примітками; за українською програмою математики профільного рівня визначалось в якому класі вивчається тема, особливості її вивчення теми та недоліки української програми. Фрагмент порівняльної таблиці наведено у таблиці 2.5.

Таблиця 2.5

Порівняльний аналіз змісту тем компоненти “Чиста математика 1”
та української програми з математики профільного рівня

Paper 1: Чиста математика 1		Українська програма профільного рівня	
Навички (учні повинні вміти)	Приклади і примітки	В якому класі вивчається тема	Особливості вивчення теми і недоліки української програми
Квадратні рівняння			
Виконувати виділення повного	Наприклад, для	Вивчається в	Вивчається

квадрату для квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ і використовувати виділений повний квадрат.	визначення вершини графіка $y = ax^2 + bx + c$ або для побудови графіка.	9 класі.	повністю.
...	...	...	...

Порівняльний аналіз змісту тем компонент “Чиста математика 2” і “Чиста математика 3” та української програми з математики профільного рівня здійснювався окремо з алгебри та геометрії за наступними принципами: порівнювалися теми, навички, що учні повинні мати після опанування курсів Paper 2: Чиста математика 2 та Paper 3: Чиста математика 3 з прикладами та примітками та клас особливості вивчення теми в українській програми. Фрагмент порівняльної таблиці наведено в таблиці 2.6.

Таблиця 2.6

Порівняльний аналіз змісту тем компонент “Чиста математика 2” і “Чиста математика 3” та української програми з математики профільного рівня

Рер 2: Чиста математика 2	Рер 3: Чиста математика 3	Приклади і примітки	Українська програма	
Навички (учні повинні вміти)	Навички (учні повинні вміти)		В якому класі вивчається тема	Особливості вивчення теми і недоліки української програми
1. Алгебра				
Розуміти значення $ x $, будувати графік $y = ax + b $ і використовувати такі співвідношення, як $ a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ і $ x - a < b \Leftrightarrow a - b < x < a + b$ при розв'язуванні рівнянь і нерівностей.	Розуміти значення $ x $, будувати графік $y = ax + b $ і використовувати такі співвідношення, як $ a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ і $ x - a < b \Leftrightarrow a - b < x < a + b$ при розв'язуванні рівнянь і нерівностей.	Наприклад, $ 3x - 2 = 2x + 7 $, $2x + 5 < x + 1 $ Графіки $y = f(x) $ та $y = f(x)$ для нелінійних функцій f не включені.	Вивчається в 6, 7, 8, 9, 10 класі	Вивчається повністю.
...	...	...	...	...

За результатами проведеного аналізу можна зробити загальний висновок, що теми математики, які у Великобританії винесені в програму A Level, в Україні

вивчаються не тільки в старшій школі, а й у середній, починаючи з 7-го класу. Чи є це перевагою або недоліком відчизняної програми з математики - питання досить спірне, і залежить від загальної стратегії і цілей держави в сфері освіти. Наш підхід до побудови системи освіти дістався нам в спадок від Радянського Союзу, але зараз стратегія розвитку освіти спрямована на перехід до західної системи, тож винесення тем профільної математики з програми середньої школи до програми старшої школи - це лише питання часу в Україні.

При цьому зміна розподілу тем по роках навчання не завжди веде до зміни методичних підходів до їх викладання. А це, на нашу думку, є найголовнішим елементом в удосконаленні профільного навчання математики в Україні: саме передові методичні підходи до викладання певних тем підносять якість освіти на новий рівень. Тому нами під час дослідження було зосереджено увагу саме на виявленні недоліків у методиці викладання тем з метою розробки в подальшому рекомендації щодо їх усунення, та удосконалення таким шляхом профільного навчання математики в Україні.

Таким чином, під час проведення порівняльного аналізу змісту тем компоненти “Чиста математика 1” британської програми A Level з українською програмою профільного рівня (додаток А) в останній було виявлено наступні особливості і недоліки.

Тема «Квадратні рівняння» в українській програмі вивчається повністю по всіх аспектах, як і в британській програмі.

Тема «Функції» в багатьох аспектах співпадає з британською програмою, але тут, на нашу думку, в українській програмі є недоліки:

- поняття «однозначна функція» або «one-to-one function» розглядається відокремлено, без порівняння з поняттями «one-to-many», «many-to-one» і «many-to-many relationship», що значно обмежує розуміння цього поняття;

- поняття «складена функція» не розглядається окремо, а лише мимохіть в темі «правила обчислення похідних функції»;

- не вивчається окремо формування складеної функції, її області визначення та області значень.

Також треба зазначити, що в українській програмі з математики середньої школи не вивчається міжнародно прийнятий термін «градієнт», що теж є її суттєвим недоліком.

Тема «Координатна геометрія» в українській програмі вивчається повністю по всіх аспектах, як і в британській програмі.

Тема «Тригонометрія» в українській програмі вивчається повністю по всіх аспектах, як і в британській програмі, але тут, на нашу думку, також є певні недоліки:

- наприклад, не пояснюється, як знаходяться точні значення синуса, косинуса і тангенса табличних кутів 30° , 45° , 60° ;

- не використовується міжнародно прийняті позначення $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ для позначення обернених тригонометричних співвідношень.

При цьому перевагою української програми, на нашу думку є те, що на відміну від британської програми, у нас вивчаються одразу загальні форми розв'язків тригонометричних рівнянь, а розв'язки у заданому проміжку розглядаються лише як частина загального розв'язку.

Тема «Ряди» в українській програмі вивчається лише в аспекті арифметичної і геометричної прогресій, в той час, коли в компоненті “Чиста математика 1” британській програмі A Level вивчається ще розклад ряду $(a+b)^n$, де n — від'ємне ціле число. В українській системі освіти розклади рядів винесені в програми вищої математики в навчальних закладах 3-4 рівня акредитації.

Тема «Диференціювання» в українській програмі вивчається в багатьох аспектах, що є в британській програмі, але тут, на нашу думку, в українській програмі є такі недоліки:

- використовується лише позначення $f'(x)$ та $f''(x)$, в той час коли позначення dy/dx , d^2y/dx^2 не використовуються, і це в подальшому ускладнює для учнів вивчення пов'язаних тем вищої математики у вищих навчальних закладах;

- не вивчається застосування диференціювання до градієнтів, дотичних і нормалей, зростаючих і спадаючих функцій та швидкості змін, плюс, не використовується саме поняття «градієнт».

Тема «Інтегрування» в українській програмі вивчається, практично, в тому ж обсязі, що й в британській, за одним виключенням:

- формула для знаходження об'єму тіла обертання навколо осі X вивчається, а навколо осі Y не вивчається, хоча, логічно було б вивчити обидві формули.

Під час проведення порівняльного аналізу змісту тем компонент «Чиста математика 2» і Чиста математика 3» британської програми A Level з українською програмою профільного рівня в останній було виявлено наступні особливості і недоліки.

Тема «Алгебра» в програмі компоненти «Чиста математика 2» майже повністю співпадає з українською програмою, окрім одного моменту:

- теорема про множники та теорема про залишок вивчається лише для множників виду $(x+b)$, тобто не включно з множниками виду $(ax+b)$, в яких коефіцієнт x не дорівнює одиниці, хоча було б логічніше їх також розглянути.

А от питання розкладу раціональних функцій на часткові дробби, коли знаменник не є складнішим за $(ax+b)(cx+d)(ex+f)$, $(ax+b)(cx+d)^2$, $(ax+b)(cx^2+d)$, яке вивчається в складі компоненти «Чиста математика 3» британської програми, в українській програмі майже не розглядається. І також не вивчається питання розкладу $(1+x)^n$, де n раціональне число і $|x| < 1$.

Тема «Логарифмічна і показникова функції», яка за британською програмою вивчається однаково в межах обох компонент «Чиста математика 2» і «Чиста математика 3», за українською програмою вивчається майже так само, за виключенням деяких моментів:

- функції e^x та $\ln x$ не вивчаються відокремлено, а вивчаються як окремі випадки показникової та логарифмічної функцій;

- прийом логарифмування вивчається тільки для розв'язування рівнянь і нерівностей, а для перетворення показникової функції в лінійну функцію цей прийом не розглядається.

Тема «Тригонометрія» в українській програмі представлена таким чином, що вона має багато спільного з британською програмою: наприклад, формули синуса, косинуса, тангенса суми та різниці двох кутів, а також формули синуса, косинуса,

тангенса подвійних кутів вивчаються повністю. Але, при цьому, також в деяких моментах істотно відрізняється від неї:

- наприклад, в українській програмі вивчаються лише функції синуса, косинуса, тангенса і котангенса, а функції секанса і косеканса не розглядаються - відповідно, формули $\sec 2O = 1 + \tan^2 O$ і $\csc 2O = 1 + \cot^2 O$ вивчаються без використання секанса і косеканса;

- також не вивчається представлення виразу $a \sin O + b \cos O$ у формах $R \sin(\theta \pm a)$ і $R \cos(\theta \pm a)$.

Тема «Диференціювання» в межах компонент «Чиста математика 2» і «Чиста математика 3» співпадає з українською програмою стосовно питання використання похідних функцій e^x , $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ разом із константами, сумами, різницями та складеними функціями, а також диференціювання добутків і часток повністю, і не співпадає стосовно знаходження та використання першої похідної функції, яка визначена параметрично або неявним чином - в нашій програмі це питання в шкільній програмі не вивчається, а винесено до програм вищої математики.

Тема «Інтегрування» в програмі компонент «Чиста математика 2» і «Чиста математика 3» співпадає з українською програмою в частині інтегрування більшості функцій, таких як e^{ax+b} , $\frac{1}{ax+b}$, $\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$, $\sec^2(ax+b)$., і не співпадає щодо інтегрування функцій $\sec^2(ax+b)$, $\frac{1}{x^2+a^2}$, $\frac{1}{2+3x^2}$.

Використання тригонометричних співвідношень при інтегруванні в українській програмі вивчається, але не розглядається як окреме питання.

Також в українській програмі не вивчається застосування правила трапеції для оцінки значення визначеного інтеграла, яке розглядається в складі компоненти «Чиста математика 2» британської програми.

І також в українській програмі не розглядаються наступні питання з компоненти «Чиста математика 3» британської програми:

- інтегрування раціональної функції шляхом декомпозиції її на часткові функції;

- розпізнавання функції виду $f'(x) / f(x)$ та інтегрування таких функцій;
- розпізнавання, коли підінтегральний вираз можна розглядати як добуток, і використовувати інтегрування частинами;
- використання заданої заміни для спрощення та обчислення визначеного або невизначеного інтеграла.

Тема «Числове розв'язання рівнянь» в українській програмі, на відміну від британської програми, не вивчається.

Тема «Вектори» в українській програмі вивчається, практично, в тому ж обсязі, що і в британській програмі. Відмінності української програми від британської в цій темі полягають в наступному:

- в українській програмі не вивчаються вектори переміщення;
- вивчаються лише такі позначення для векторів, як $\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{a}$, при

цьому такі стандартні позначення для векторів, як $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $xi+yj$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$xi+yj+zk$ не вивчаються, хоча було б доцільно їх вивчати межах шкільної програми в 11 класі.

Тема «Диференційні рівняння» в українській програмі, на відміну від британської програми, не вивчається.

Тема «Комплексні числа» в українській програмі, на відміну від британської програми, також не вивчається.

2.3. Методичні рекомендації щодо удосконалення змісту української профільної програми з математики

Недоліки української профільної програми з математики порівняно із британською програмою з математики A Level, які були виявлені і описані в п.2.2 даної магістерської роботи, дозволили нам розробити ряд методичних рекомендацій щодо покращення української шкільної профільної програми з математики. Розглянемо кожну з них докладніше.

Для покращення розуміння учнями теми «Функції» пропонуємо в 7 класі при вивченні теми «Функції» давати учням поняття «діаграма відображення» або її ще називають «діаграма відношення» (“mapping diagram”), яка пов’язує множини X і Y . Це необхідно як передумову до вивчення подальших тем: множини, відносини і функції, графіки функції і графіки рівнянь.

Наприклад, конспект уроку в цьому випадку може виглядати наступним чином.

Тема: “Відображення та функції”

Ключові слова: Функція, Відображення, Правило, Таблиця значень.

Мета уроку:

1. Навчитися використовувати відображення та діаграму відображення.
2. Навчитися використовувати функцію та схему функції.

Зміст уроку

Це діаграма відображення. Вона використовує правило «додати 5», щоб відобразити X на Y . Відображення використовує правило для зв'язування одного набору значень X з іншим набором значень Y .

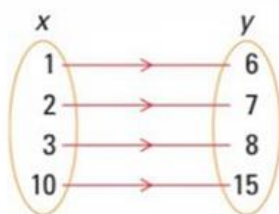


Рис.2.2.

Іноді правило може мати два етапи. Це часто показують на діаграмі. Наприклад: Знайдіть правило для цього відображення. Правило: «подвоїти число X і додати 1».

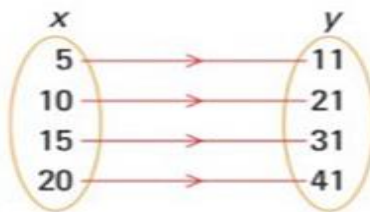


Рис.2.3.

Завдання №1

Скопіюйте цю діаграму тричі.

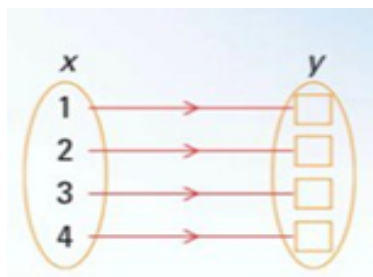


Рис.2.4

Заповніть свої копії за цими правилами.

додати 6;

відняти 1;

помножити на 2 і додати 3.

Завдання №2

Знайдіть правила для цих діаграм.



Рис.2.5.

Відображення часто можна записати у вигляді функції. Наприклад ,у попередньому прикладі

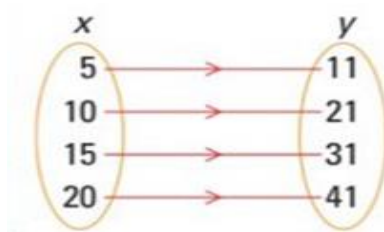


Рис.2.6.

функція має вигляд $y = 2x + 1$.

Функція використовує правило для зв'язування одного набору значень x з іншим набором значень y .

Ця двоетапна схема функції показує, як перевести кілометри в милі приблизно:



Рис.2.7.

Функція, що пов'язує кілометри x з милями y :

$$(x \div 8) \times 5 \approx y \quad \text{або} \quad y \approx \frac{x}{8} \times 5.$$

Ви можете заповнити таблицю значень для цієї функції. Коли

$$x = 16, y \approx (16 \div 8) \times 5 = 2 \times 5 = 10.$$

Отже $16 \rightarrow 10$ і $16 \text{ км} = 10 \text{ миль}$.

Кілометри, x	16	24	48
Милі, y	10	15	30

Таблиця значень працює як діаграма відображення — вона пов'язує пари значень, які поєднані певним правилом.

Завдання №3

Зробіть дві копії цієї діаграми відображення та таблиці значень.

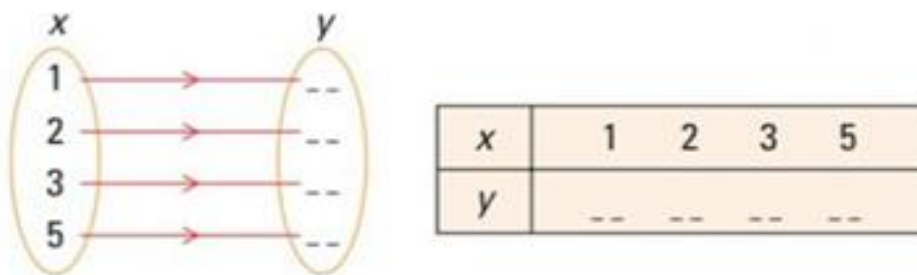


Рис.2.8

Заповніть свої копії, використовуючи ці схеми функцій.

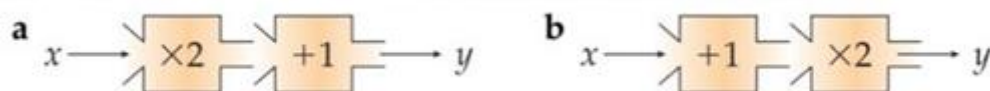


Рис.2.9

Завдання №4

Під час грози ви можете визначити, як далеко знаходиться грім, підрахувавши секунди між тим, як ви побачили блискавку, і тим, як почули грім, а потім розділивши це число на 5.

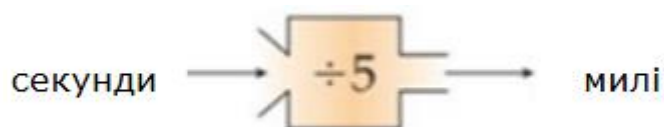


Рис.2.10

Як далеко знаходиться гроза, якщо ви підрахували 10 секунд?

Скопіюйте цю таблицю і заповніть її за допомогою схеми функції.

Кількість секунд, x	5	10	15	20	25	30
Кількість миль, y						

В 8 класі при вивченні теми «Множини» треба розглядати також питання «відношення і функції» («relations and functions»). Тут треба розглянути чотири види відношень між двома множинами “один до одного” («one-to-one»), “один до багатьох” («one-to-many»), “багато до одного” («many-to-one») і “багато до багатьох” («many-to-many»). Розглядати їх треба на зрозумілих життєвих прикладах. При цьому необхідно пояснювати, які з цих відношень можна називати функцією, а які ні. Такий підхід розширює межі уявлення учня і дає йому зрозуміти, що функції - це лише різновид відношень.

По-перше, необхідно пригадати, що таке діаграма відображення. Діаграма відображення показує, як елементи в відношенні поєднуються в пари. Кожна множина представлена овалом, а лінії або стрілки проводяться від елементів першої множини до елементів другої множини для кожної впорядкованої пари у відношенні.

Ці діаграми відображення (відношення) представляють чотири типи відношень (рис. 2.11).

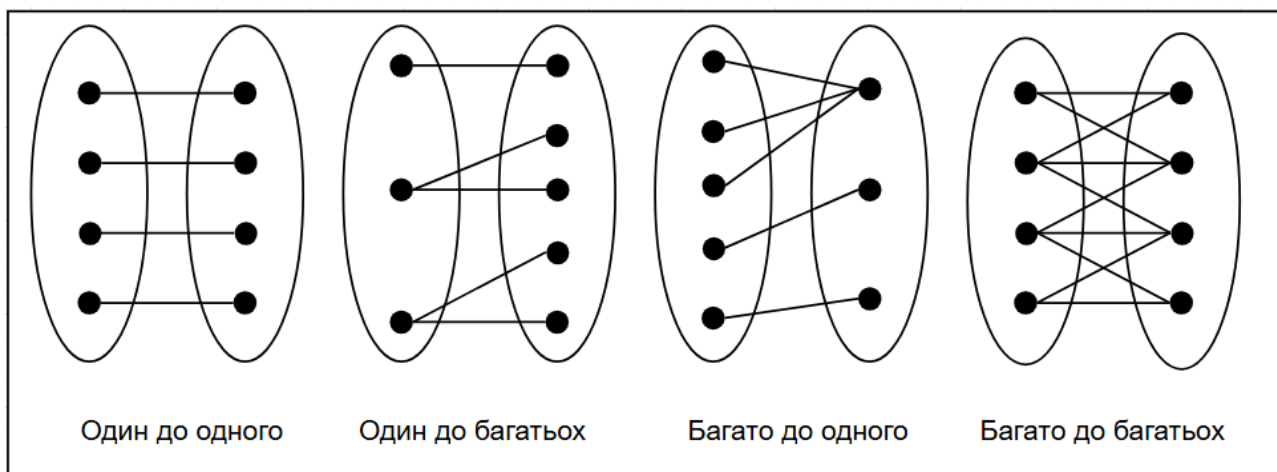


Рис. 2.11. Чотири типи відношень

Прикладом відношення “один до одного” в житті є торговий автомат, оскільки кожна кнопка (вхід) відповідає лише одному елементу (вихід). Натискання кнопки «Кока-кола» завжди дасть вам банку кока-коли, а не пакет чіпсів, тому що для кожного входу існує унікальний вихід.

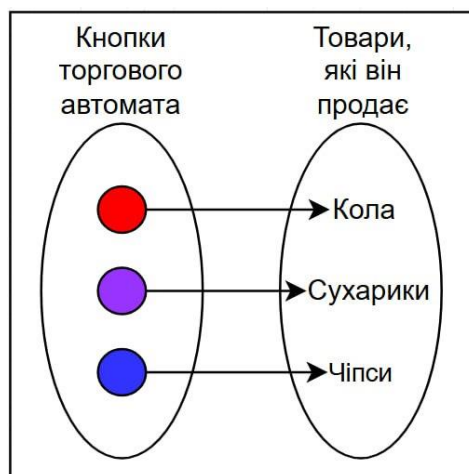


Рис. 2.12

Прикладом відношення “один до багатьох” є, наприклад, учні та їхнє шкільне приладдя: Кожен учень пов'язаний зі своїм шкільним приладдям, таким як рюкзак, пенал і ручка, при цьому один учень має багато різного приладдя.

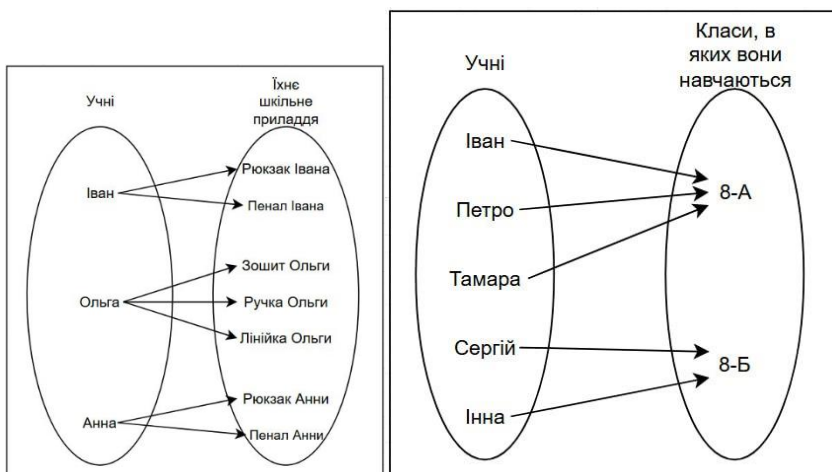


Рис. 2.13

Прикладом відношення “багато до одного” є учні і номери класів, в яких вони навчаються. Один учень не може числитися в двох класах одночасно, при цьому в кожному класі є багато учнів.

Прикладом відношення “багато до багатьох” є діти і їх батьки, оскільки у кожної дитини є тато і мама, а у кожного з батьків може бути багато дітей.

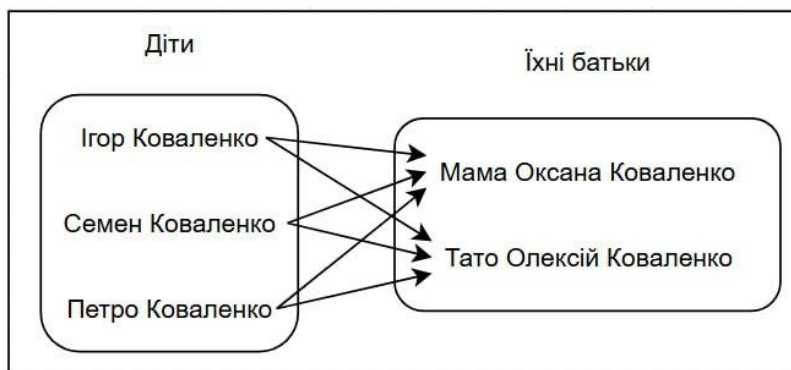


Рис. 2.14

Для закріплення розуміння видів відношень, учням можна дати наступні завдання:

Визначте, який тип діаграми відображення (один-до-одного, один-до-багатьох, багато-до-одного або багато-до-багатьох) найкраще відповідає кожній з цих відносин:

$A = \{\text{учні у вашому класі}\}$, $B = \{\text{кількість братів і сестер}\}$, і відношення відображає кожного учня в A на кількість його братів і сестер в B .

$A = \{\text{учні у вашому класі}\}$, $B = \{\text{матері}\}$, і відношення відображає кожного учня в A на його матір в B .

$A = \{\text{пари}\}$, $B = \{\text{онуки}\}$, і відношення відображає кожну пару в A на кожного з їхніх онуків в B .

Знайдіть реальну ситуацію для кожного типу діаграми відображення.

Визначте множини A і B , як у питанні 1.

Запишіть відношення, яке відображає елементи множини A на елементи множини B .

Для двох рівнянь $y = x + 2$ і $x^2 = y^2$ визначте тип діаграми відображення, яка найкраще описує відношення між множиною $A = \mathbb{R}$ і множиною $B = \mathbb{R}$ (Підказка: перегляньте свої відповіді до п.2).

Таким чином, відношення — це зв'язок між двома множинами, тоді як функція — це особливий тип відношення. До функцій відносяться лише відношення “один до одного” та відношення “багато до одного”. Такі функції ще називають “однозначні функції”, оскільки кожному значенню з першої множини відповідає тільки одне значення з другої. Тобто, функція — це відношення, в якому кожен елемент множини A відповідає одному і тільки одному елементу множини B .

Для закріплення розуміння поняття “функція, як різновид відношень” можна запропонувати учням такі приклади.

Завдання №1

Розгляньте представлену на рисунку діаграму відображення і дайте відповіді на наступні запитання:

Опишіть словами, що може означати це відношення.

Обґрунтуйте, чому це відношення є функцією.

Вкажіть область визначення та область значень функції.

Напишіть функцію для однієї з упорядкованих пар на цій діаграмі.

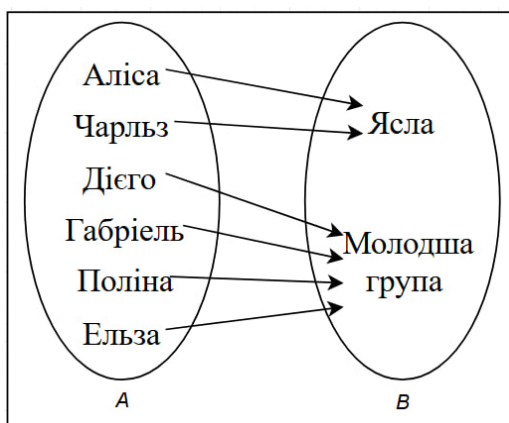


Рис. 2.15

Відповіді:

Ця діаграма відображення може означати, до якої вікової групи належать діти в дитячому садку.

Це відношення є функцією, оскільки кожна дитина належить лише до однієї вікової групи. (Щоб бути функцією, кожен елемент з області визначення повинен відображатися на один і тільки один елемент в області значень.)

Область визначення: {Аліса, Чарльз, Дієго, Габріель, Поліна, Ельза}

Область значень: (ясла, молодша група)

$g(\text{Ельза}) = \text{молодша група}$. Тобто Ельза ходить в молодшу групу. (g було обрано для функції, оскільки воно представляє групу, до якої належить дитина.)

Завдання №2

Розгляньте цю діаграму відображення.

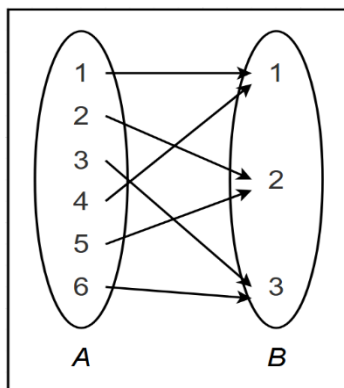


Рис. 2.16

Визначте, чи є це відношення функцією. Обґрунтуйте свою відповідь.

Запишіть область визначення та область значень, використовуючи позначення множин.

Знайдіть: 1) $f(1)$; 2) $f(2)$; 3) $f(5)$.

Завдання №3

Для кожної з наступних діаграм відображення:

Напишіть словами, що може означати це відношення.

Обґрунтуйте, чому це відношення є функцією.

Вкажіть область визначення та область значень.

Запишіть одну конкретну впорядковану пару у функції.

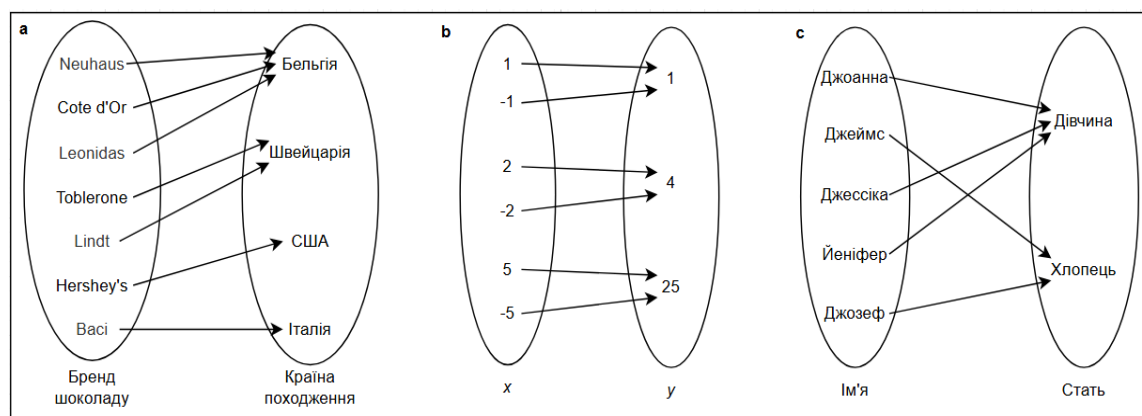


Рис. 2.17

Також необхідно давати учням поняття області визначення і області значень на основі діаграм відображення, даючи при цьому також міжнародну форму запису для цих областей. Наприклад, функцію можна записати у вигляді

$$f(x) = y,$$

де: x — вхідне значення, $x \in A$

y — вихідне значення, $y \in B$

f — назва функції, яка відображає x на y .

Запис $f(x) = y$ читається як «функція f від x дорівнює y » або просто « f від x дорівнює y ».

Інший спосіб запису $f(x) = y$, який застосовується в міжнародній практиці — це $f: x \rightarrow y$ (x відображається на y). Тобто учні мають розуміти, що, наприклад, $f(x) = x + 2$ та $f: x \rightarrow x + 2$ — це одне і те ж саме.

Якщо функція відображає елементи множини A на елементи множини B , то множина A називається областю визначення, а множина B — областю значень.

Область визначення функції — це множина вхідних значень, які можна підставляти у функцію.

Область значень функції — це множина всіх вихідних значень, які генерує функція. Область значень також називають множиною образів елементів області визначення.

Зазвичай область визначення вказується в задачі. Якщо ні, то вважається, що це множина дійсних чисел, $\mathbb{R}$. Якщо функція визначена, як множина впорядкованих пар $(x, f(x))$, то область визначення є просто множиною вхідних значень (всі значення x), а область значень є множиною вихідних значень (всі значення $f(x)$).

Для закріплення розуміння учнями понять “область визначення” і область значень” функції, можна запропонувати їм виконати наступні завдання:

Завдання №4

Для деяких функцій можна знайти область визначення та область значень, просто подумавши про типи значень, які можуть бути використані як вхідні дані, та типи значень, які отримуються як вихідні дані. Використовуючи цей метод, скопіюйте та заповніть цю таблицю.

Функція	Область визначення	Область значень
$f(x) = 2x$	x може бути будь-яким значенням, оскільки будь-яке значення можна подвоїти, тому область визначення $f \in \mathbb{R}$.	
$g(x) = \sqrt{x}$		За угодою, функція квадратного кореня дає тільки додатний квадратний корінь. Отже, область значень g у $\mathbb{R}$.
$h(x) = x^2$	Ви можете піднести до квадрата будь-яке дійсне число, тому область визначення $h \in \mathbb{R}$.	
$f(x) = \frac{1}{x}$		

Чотири функції в завданні показують різні можливі обмеження, які можна встановити для області визначення або області значень різних функцій

Також треба дати учням наступні поняття.

Природна, або максимальна, область визначення — це найбільший можливий набір значень, які може приймати функція.

Обмежена область визначення — це підмножина природної області визначення функції.

Для закріплення цих понять дати учням виконати наступне завдання.

Завдання №5

Вкажіть найбільшу можливу область визначення та відповідну область значень для кожної функції.

1 $y = 5x - 3$

2 $y = -4x + 9$

3 $y = \frac{2}{5}x + 12$

4 $y = 2x^2$

5 $y = x^2 + 5$

6 $y = 3x^2 - 3$

7 $y = \frac{32}{x}$

8 $y = \frac{15}{2x}$

9 $y = \frac{1}{x+1}$

10 $y = \frac{1}{x} + 1$

У 9 класі на початку вивчення теми “Квадратична функція” треба повторити питання “відношення і функції” і розглянути приклади кожного виду відносин на графіках, зазначаючи при цьому, який графік є функцією, а який не є, і показати, як це можна перевірити за допомогою “тесту вертикальної лінії”, тому що часто учні плутають поняття “графік функції” і “графік рівняння”, а для учнів програми профільного рівня це неприпустимо.

Наприклад, можна у учнів запитати:

У чому полягають подібності та відмінності між відношеннями та функціями?

Як пов'язані між собою різні способи визначення того, чи є відношення функцією?

І нагадати, що:

- функція — це особливий тип відношення, в якому для кожного елемента області визначення існує один і тільки один елемент в області значень. (Кожне вхідне значення генерує тільки одне вихідне значення.)
- функція — це відношення «один до одного» або «багато до одного».

За допомогою наступного прикладу можна продемонструвати учням, як можна визначити, чи є відношення функцією.

Завдання 6

1 Для кожної діаграми відображення намалуйте на координатній площині набір точок. Підпишіть кожен графік його відношенням.

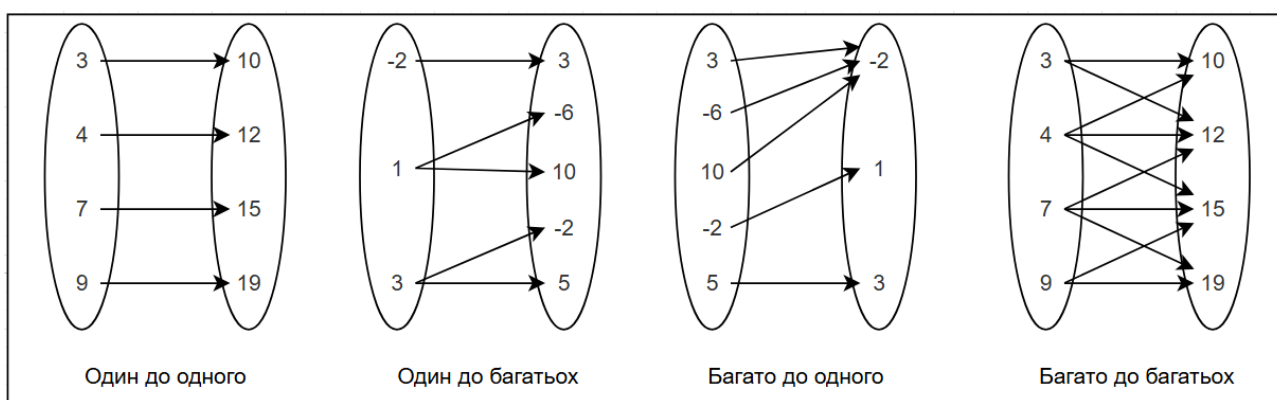


Рис. 2.18

Якщо учні мають певні труднощі із цим завданням, то можна запропонувати їм виконати наступні кроки:

- Визначте, яка вісь представляє область визначення, x .
- Визначте, яка вісь представляє область значень, $y = f(x)$.

2 Визначте, чи ваші графіки відображають функцію. Подумайте, як можна визначити з графіка, чи є відношення функцією.

- а) Нарисуйте графік $y = 4x - 9$.

Дивлячись на графік, визначте, який це тип відношення.

Нарисуйте діаграму відображення, щоб представити $y = 4x - 9$. Виберіть лише кілька впорядкованих пар для діаграми відображення, поки не будете задоволені типом відношення, яке вона представляє. Не потрібно перелічувати всі можливі впорядковані пари для цієї діаграми відображення.

Вирішіть, чи підтверджує діаграма відображення тип відношення, яке представляє ваш графік.

Відповідно, вирішіть, чи є $y = 4x - 9$ функцією.

4 Дано графік $y^2 = x$

а) Визначте, який із чотирьох типів залежності відображає цей графік.

б) Відповідно, вирішіть, чи є $y^2 = x$ функцією.

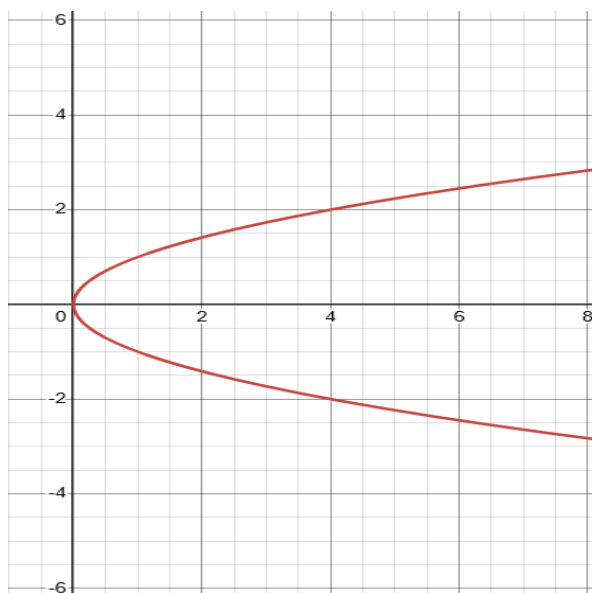


Рис. 2.19

Таким чином, учні використовують два різні методи для визначення, чи є відношення функцією (іноді її називають «функцією від x до y »):

за допомогою діаграми відображення: якщо діаграма відображення є «один до одного» або «багато до одного», тоді відношення є функцією.

за допомогою графіка: якщо кожне значення x має тільки одне відповідне значення y , то відношення є функцією.

Далі необхідно розповісти учням про тест вертикальної лінії: якщо жодна вертикальна лінія не перетинає графік більше ніж в одній точці, то відношення є функцією. Якщо вертикальна лінія перетинає графік у більш ніж одній точці, то відношення не є функцією.

Наприклад, $y = 0,5x - 1,5$ — це функція, оскільки жодна вертикальна лінія не перетинає графік більше ніж один раз.

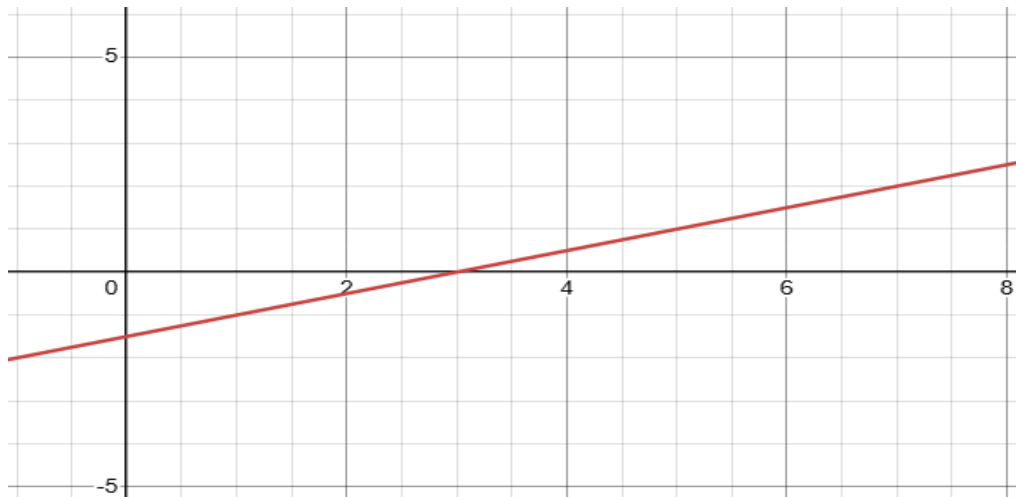


Рис. 2.20

А $y^2 = x$ не є функцією, оскільки принаймні одна вертикальна лінія перетинає графік двічі.

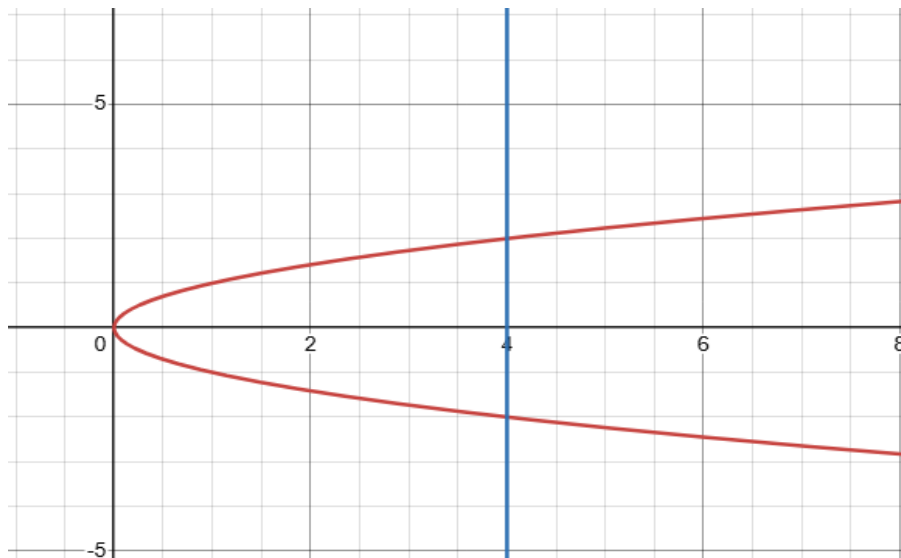


Рис. 2.21

Далі необхідно дати учням наступні завдання на закріплення пройденного матеріала.

Завдання №7

Які з цих графіків є функціями?



Рис. 2.22

Завдання №8

Які з наведених наборів точок є функціями? Поясніть свої відповіді.

a $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

b $\{(-1, 2), (-3, 2), (3, 2), (1, 2)\}$

c $\{(2, 5), (-1, 4), (-3, 7), (2, -3)\}$

d $\{(3, -2), (3, 0), (3, 2), (3, 4)\}$

e $\{(-7, 0), (-5, 0), (-3, 0), (-1, 0)\}$

f $\{(0, 5), (0, 1), (2, 1), (2, -5)\}$

Завдання №9

Визначте, чи є ці відображення функціями

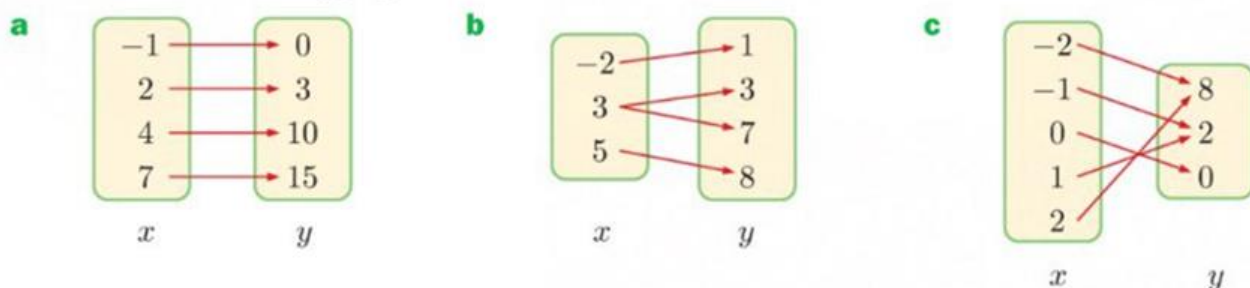


Рис. 2.23

Завдання №10

Використовуючи тест вертикальної лінії, визначте, чи є кожен графік функцією:

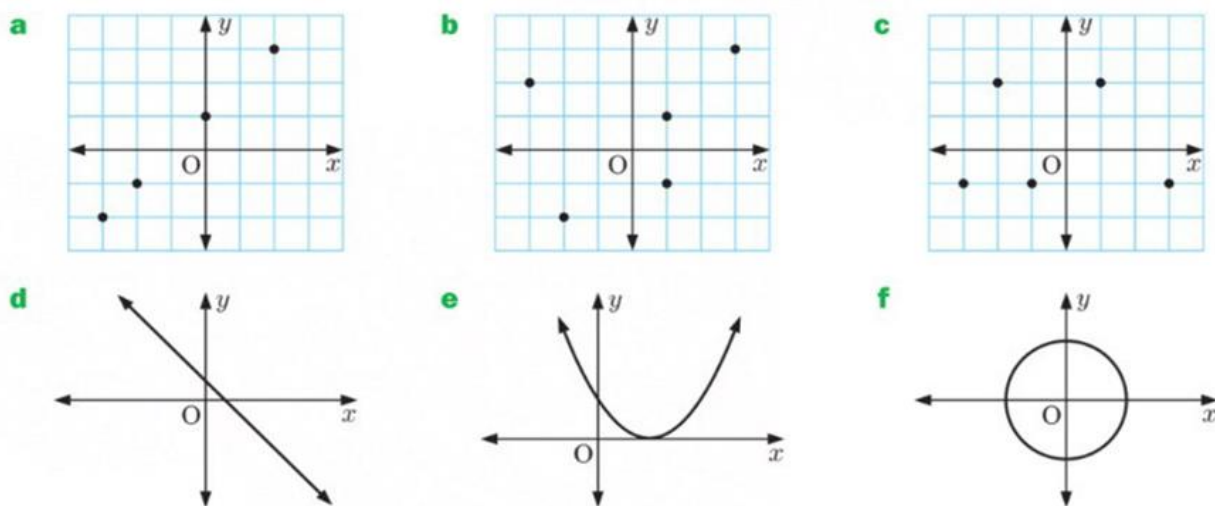


Рис. 2.24

У 10 класі на початку вивчення теми “Похідна складеної функції” треба розглянути, як ця складена функція утворюється — це суттєво полегшить подальше розуміння учнями процесу знаходження похідної складеної функції.

По-перше, необхідно пояснити, що композиція двох функцій g та f — це нова функція, яку ми отримуємо, спочатку знайшовши значення функції f , а потім

підставивши його в функцію g , і таким чином знаходимо результат. Наприклад, якщо f визначена як $f(x) = x^2$, а g визначена як $g(x) = x + 3$, то композиція g з f позначається gf і обчислюється як

$$gf(x) = g(f(x)).$$

Отже, спочатку ми підставляємо значення x в $f(x)$, а потім застосовуємо g до всього виразу $f(x)$. У цьому випадку, застосовуючи g до аргументу, ми додаємо 3. Тому застосовувавши g до x^2 , отримуємо:

$$gf(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 3.$$

Ось ще один приклад композиції функцій. Нехай $f(x) = 2x$, а $g(x) = e^x$. Як і раніше, спочатку записуємо $f(x)$, а потім застосовуємо g до всього $f(x)$. Оскільки $f(x) = 2x$, то застосування g зводить число e у степінь $f(x)$. Отже:

$$gf(x) = g(f(x)) = g(2x) = e^{2x}.$$

Іноді композицію двох функцій називають «функцією від функції», і замість gf пишуть $g \circ f$. Це позначення варто знати його, бо воно зустрічається в підручниках.

Далі необхідно дати учням виконати наступні вправи для засвоєння того, як утворюється складена функція (табл. 2.1)

Таблиця 2.7

Вправи для засвоєння процесу формування складених функцій

Вправи	Відповіді
Знайдіть $gf(x)$ для таких пар функцій:	
(a) $f(x) = 3x$, $g(x) = 2x^2 - 5$	(a) $18x^2 - 5$
(b) $f(x) = e^{4x}$, $g(x) = \sqrt{x}$	(b) e^{2x}
(c) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1/x$	(c) $\operatorname{cosec} x$ (тобто $1/\sin x$)

По-друге, необхідно пояснити учням, що порядок, у якому ми виконуємо композицію функцій, суттєво впливає на результат. Це можна побачити, якщо змінити порядок у першому прикладі. Нехай $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 3$. Тоді $fg(x)$ означає, що ми беремо $g(x) = x + 3$ і застосовуємо до всього виразу функцію f :

$$fg(x) = f(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$

Бачимо, що це НЕ те саме, що $gf(x)$, оскільки $gf(x) = x^2 + 3$, а це не дорівнює $x^2 + 6x + 9$. Отже, важливий момент: зазвичай, $gf(x) \neq fg(x)$.

Далі необхідно дати учням виконати наступні вправи щоб вони могли самостійно переконатися в тому, що порядок композиції функцій дуже важливий (табл. 2.2).

Таблиця 2.8

Вправи для засвоєння процесу формування складених функцій

Вправи	Відповіді
Обчисліть $fg(x)$ для пар функцій з таблиці 2.1 та порівняйте результати:	
(a) $f(x) = 3x$, $g(x) = 2x^2 - 5$	(a) $6x^2 - 15$
(b) $f(x) = e^{4x}$, $g(x) = \sqrt{x}$	(b) $e^{4\sqrt{x}}$
(c) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1/x$	(c) $\sin(1/x)$

По-третє, необхідно пояснити учням, що ми можемо також зробити декомпозицію складеної функції - тобто подати складену функцію як композицію двох інших функцій. Це називається розкладанням функції. Наприклад, $h(x) = e^{2x}$. Ми вже бачили, що її можна подати як композицію $h(x)=gf(x)$, де

$$g(x) = e^x, \quad f(x) = 2x.$$

Розглянемо ще один приклад:

$$h(x) = \sqrt[3]{2x + 1}.$$

Тут функція складається у два кроки: спочатку беремо x і застосовуємо $f(x) = 2x + 1$, потім беремо кубічний корінь. Тому, якщо $g(x) = \sqrt[3]{x}$, то

$$h(x) = \sqrt[3]{2x + 1} = g(2x + 1) = g(f(x)).$$

Дуже важливо, щоб учні навчилися робити декомпозицію функцій, оскільки це вміння знадобиться їм в подальшому для знаходження похідних складених функцій. Тому, для закріплення поняття про розкладання складених функцій на простіші функції (декомпозицію функцій), учням необхідно дати виконати наступні вправи (табл. 2.3)

Вправи для засвоєння процесу декомпозиції складених функцій

Вправи	Відповіді
Розкладіть функції у вигляді gf :	
(a) $6x + 3$	(a) $f(x)=6x, g(x)=x+3$
(b) $4x^2$	(b) $f(x)=x^2, g(x)=4x$
(c) $4x^2$ іншим способом	(c) $f(x)=2x, g(x)=x^2$
(d) e^{x+4}	(d) $f(x)=x+4, g(x)=e^x$
(e) $x^2 + 2x + 1$	(e) $f(x)=x+1, g(x)=x^2$

І, по-четверте, необхідно пояснити учням, як утворюються область визначення і область значень складеної функції, оскільки це дає їм набагато ширше уявлення про те, як відбувається процес формування обмежень складеної функції по X та Y , що для учнів, які навчаються за профільною програмою дуже важливо.

Учням треба пояснити, що зустрічаються пари функцій, які неможливо скомпонувати. Наприклад, $f(x) = -x^2$ та $g(x) = \ln(x)$. Оскільки ми знаємо, що $x^2 \geq 0$, то $f(x) \leq 0$ для будь-якого x , а $\ln(x)$ визначена лише для $x > 0$. Отже, $g(f(x))$ не визначена для жодного x — тобто композиція gf не існує.

Також треба пояснити, що існують функції, які не можуть бути поєднані в складену функцію для всіх значень x , але можуть бути скомпоновані, якщо ми обмежимо значення x . Наприклад:

$$f(x) = 4x - 6 \quad g(x) = \sqrt{x}$$

Корінь квадратний можна взяти тільки з $x \geq 0$. Отже, g визначена тільки для чисел, які більші або дорівнюють нулю. Таким чином, $g(f(x))$ існує лише тоді, коли $f(x) \geq 0$. Можна порахувати, що

$$f(x) \geq 0, \text{ тобто } 4x - 6 \geq 0, \text{ тільки коли } x \geq 3/2.$$

Таким чином, складена функція $gf(x)$ може бути визначена тільки для $x \geq 3/2$, і тому область визначення gf — $x \geq 3/2$. Загалом, область визначення складеної функції або та ж сама, що і область визначення першої функції, або лежить всередині

неї. Якщо x має допустиме значення для gf тоді він має допустиме значення і для функції f окремо.

Область значень — це множина всіх можливих значень, які приймає сама функція. Наприклад, область значень функції e^x — всі $y > 0$, тому що e^x завжди більше нуля. Інший приклад: як що $f(x) = \sin x$, то область значень $-1 \leq f(x) \leq 1$.

Якщо ми маємо складену функцію gf , то її область значень лежить всередині області значень g . Наприклад:

$$f(x) = x - 8, \quad g(x) = x^2$$

Зараз перша функція $f(x)$ може приймати будь-які значення. Але друга функція $g(x)$ підносить будь-яке число до квадрата, що дає результат більше або дорівнює нулю. Тобто:

$$gf(x) = g(x - 8) = (x - 8)^2 = x^2 - 16x + 64 \geq 0.$$

Яким би не було значення $f(x)$, $g(f(x))$ має бути більше або дорівнює нулю, тому що g , застосоване до будь-чого, більше або дорівнює нулю.

Що трапиться, якщо ми скомпонуємо функції в іншому порядку? Ми візьмемо спершу g , а потім f . Отже:

$$f(g(x)) = f(x^2) = x^2 - 8 \geq -8.$$

Область значень fg — це $f(g(x)) \geq -8$. В такому випадку область значень складеної функції $f(g(x))$ міститься всередині області значень функції f , але це не повна область значень функції f . І, загалом, область значень складеної функції або та ж сама, що й область значень другої функції, або лежить всередині неї. Якщо значення є можливим результатом складеної функції, тоді воно має бути можливим результатом другої функції.

Отже, ключові висновки щодо області визначення і області значень складеної функції:

- Деякі пари функцій не можна компонувати. Деякі — можна, але лише для певних значень x .
- Область визначення складеної функції або та ж сама, що і область визначення першої функції, або лежить всередині неї.

• Область значень складеної функції або та ж сама, що і область визначення другої функції, або лежить всередині неї.

І щоб закріпити цей матеріал, учням необхідно виконати наступні вправи (табл. 2.4).

Таблиця 2.10

Вправи для засвоєння понять “область визначення і область значень складених функцій”

Вправи	Відповіді
Для наступних пар функцій знайдіть область визначення ($D(f)$) та область значень ($E(f)$) складеної функції gf: (a) $f(x) = 2x$, $g(x) = \sin x$ (b) $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$ (c) $f(x) = -x$, $g(x) = \ln x$ (d) $f(x) = 1/x$, $g(x) = 2 \sin x$	(a) $D(f)$: всі x, $E(f)$: $-1 \leq y \leq 1$ (b) $D(f)$: всі x, $E(f)$: $y \geq 1$ (c) $D(f)$: $x < 0$, $E(f)$: всі y (d) $D(f)$: $x \neq 0$, $E(f)$: $-2 \leq y \leq 2$

Також важливо дати учням міжнародну скорочену форму запису функції та її областей визначення і значень (табл. 2.5), оскільки, на сьогоднішній день багато учнів з України продовжують своє навчання за кордоном.

Таблиця 2.11

Порівняльний приклад форми запису функції та її областей визначення і значень в українській шкільній математичній традиції та в світовій практиці

Форма запису в українській шкільній програмі з математики	Міжнародна форма запису
Функція: $f(x) = x^2$ Область визначення : $D(f) = \mathbb{R}$ Область значень: $E(f) = [0; \infty)$	$f: \mathbb{R} \rightarrow [0; \infty)$, $f(x) = x^2$

З огляду на те, що міжнародна інтеграція і кооперація в сіті з кожним днем все більше зростає, необхідно в українській програмі з математики середньої школи паралельно з традиційним означенням “кутовий коефіцієнт” давати міжнародно прийнятий термін «градієнт», що також значно полегшить учням подальше навчання.

На нашу думку для покращення вивчення теми «Тригонометрія» необхідно удосконалити наступні змістові частини програми математики старшої школи.

В 8 класі в курсі геометрії під час вивчення теми “Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника” треба показати учням, як знаходяться точні значення синуса, косинуса і тангенса табличних кутів 30° , 45° , 60° , оскільки в подальшому вони будуть широко користуватися цими знаннями, і важливо не просте зазубрювання цих величин, а розуміння, як вони були отримані і чому мають саме такі значення. Тому необхідно дати учням наступні приклади.

Завдання №1

Дано рівнобічний прямокутний трикутник з бічними сторонами по 1 см. Знайдіть: 1) його гіпотенузу; 2) синус, косинус, тангенс гострого кута.

Розв’язання

За теоремою Піфагора учні знайдуть, що гіпотенуза дорівнює $\sqrt{2}$ см. І тоді

$$\begin{aligned}\sin 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tan 45^\circ &= 1\end{aligned}$$

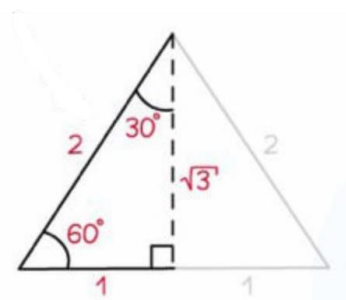
Завдання №2

Дано рівносторонній трикутник із довжиною сторони 2 см. Проведіть в ньому висоту. Знайдіть: 1) довжину висоти; 2) значення гострих кутів в трикутниках, що утворилися при проведенні висоти; 3) значення синуса, косинуса, тангенса знайдених гострих кутів.

Розв’язання

Оскільки трикутник рівносторонній, то його кути по 60° . Оскільки висота рівнобедреного трикутника є також медіаною і бісектрисою, то вона поділить кут

рівностороннього трикутника навпіл, і протилежну сторону навпіл, і ми отримаємо прямокутні трикутники з гострими кутами 30° і 60° , і довжинами сторін 1 см і 2 см (гіпотенуза=2, катет=1). Тоді за теоремою Піфагора, другий катет дорівнює $\sqrt{3}$ см.



І далі знаходимо синус, косинус і тангенс кутів 30° і 60° .

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

Далі необхідно побудувати таблицю тригонометричних кутів для знайдених значень і показати логіку її заповнення, щоб учням було легше її запам'ятати.

У 10 класі при вивченні теми “обернені тригонометричні функції” треба давати учням не тільки їх назви і традиційні форми запису “арксинус” ($\arcsin$), “арккосинус” ($\arccos$), “арктангенс” ($\arctg$), а також використовувати міжнародно прийняті позначення $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ для позначення обернених тригонометричних співвідношень, тому що, по-перше, це нагадує учням, що функція, яка стоїть в -1-му степені є оберненою, і можна загалом пригадати, що таке обернена функція, по друге, полегшує вивчення математики у випадку, якщо учні продовжують своє навчання за кордоном, по-третє, ці позначення застосовуються на калькуляторах для обчислення значень обернених тригонометричних функцій.

Під час вивчення теми «Диференціювання» в 10 класі необхідно знайомити учнів не лише із традиційною в нашій шкільній програмі формою запису похідних першого і другого порядку у вигляді $f'(x)$ та $f''(x)$, а також із формою запису, прийнятою у вищій математиці dy/dx , d^2y/dx^2 тому що це в майбутньому полегшить учням вивчення вищої математики у вищих навчальних закладах.

Під час вивчення теми «Інтегрування» в 11 класі необхідно давати не тільки формулу для знаходження об'єму тіла обертання навколо осі X вивчається, а також і навколо осі Y , тому що це логічно і не складно вивчити одночасно обидві формули.

Наприклад, цей матеріал можна подати так.

По-перше, необхідно пояснити, що таке тіло обертання навколо осі X .

Тіло обертання утворюється, коли область, обмежена функцією $y = f(x)$ (та іншими граничними рівняннями), обертається на 360° навколо осі X .

Об'єм тіла обертання — це об'єм утвореного тіла.

Приклад тіла обертання, яке утворюється при обертанні області, обмеженої функцією $y = f(x)$ наведений на рисунку.

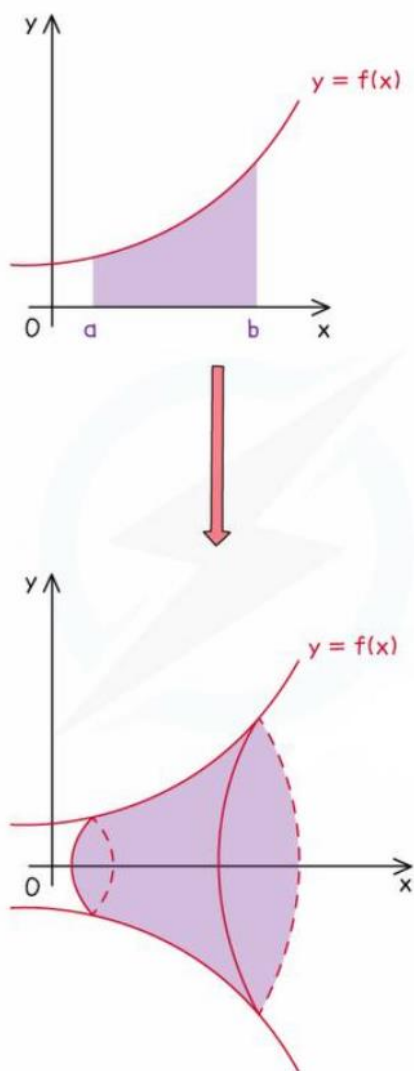


Рис. 2.25

По друге, треба пояснити, як знайти об'єм тіла обертання навколо осі X .

Щоб знайти об'єм тіла обертання, утвореного при обертанні області, обмеженої функцією $y = f(x)$ лініями $x = a$ і $x = b$ та віссю X , на 360 градусів навколо осі x , використовуйте формулу

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

По-третє, необхідно показати, як розв'язувати задачі, пов'язані із знаходженням об'ємів тіл обертання навколо осі x .

Завдання №8

Площа, обмежена графіком рівняння $y = \sqrt{x}$, прямими $x = 1$ і $x = 4$ та віссю X , показана на рисунку нижче.

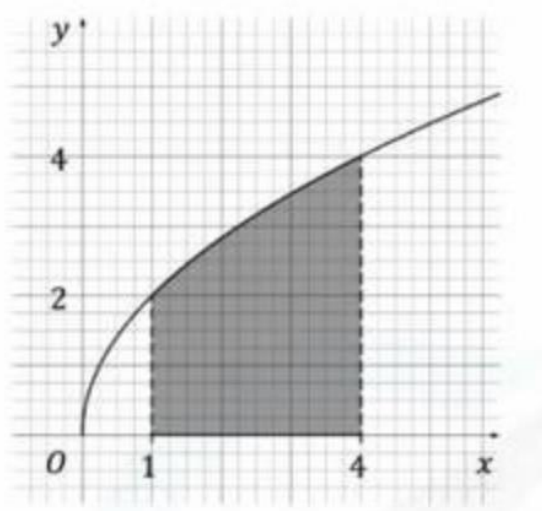


Рис. 2.26

Знайдіть об'єм тіла обертання, утвореного при обертанні даної площі фігури на 360 градусів навколо осі x .

Розв'язання

Піднесіть функцію до квадрату

$$y^2 = (2\sqrt{x})^2 = 4x$$

Визначіть межі інтегрування

$$x = 1 \text{ і } x = 4$$

Обчисліть інтеграл

$$V = \pi \int_1^4 4x dx = \pi [2x^2]_1^4 = \pi(32 - 2) = 30\pi$$

Об'єм тіла обертання становить 30П кубічних одиниць.

Далі треба пояснити учням, що таке тіло обертання навколо осі Y і як знаходиться його об'єм. Алгоритм пояснення аналогічний.

Тіло обертання навколо осі Y утворюється, коли область, обмежена функцією $y = f(x)$ (та іншими граничними рівняннями), обертається на 360 градусів навколо осі Y .

Об'єм тіла обертання — це об'єм цього тіла, що утворюється.

Приклад тіла обертання, яке утворюється при обертанні області, обмеженої функцією $y = f(x)$, лініями $y = c$ і $y = d$ та віссю Y на 360 градусів навколо осі Y показано на рисунку.

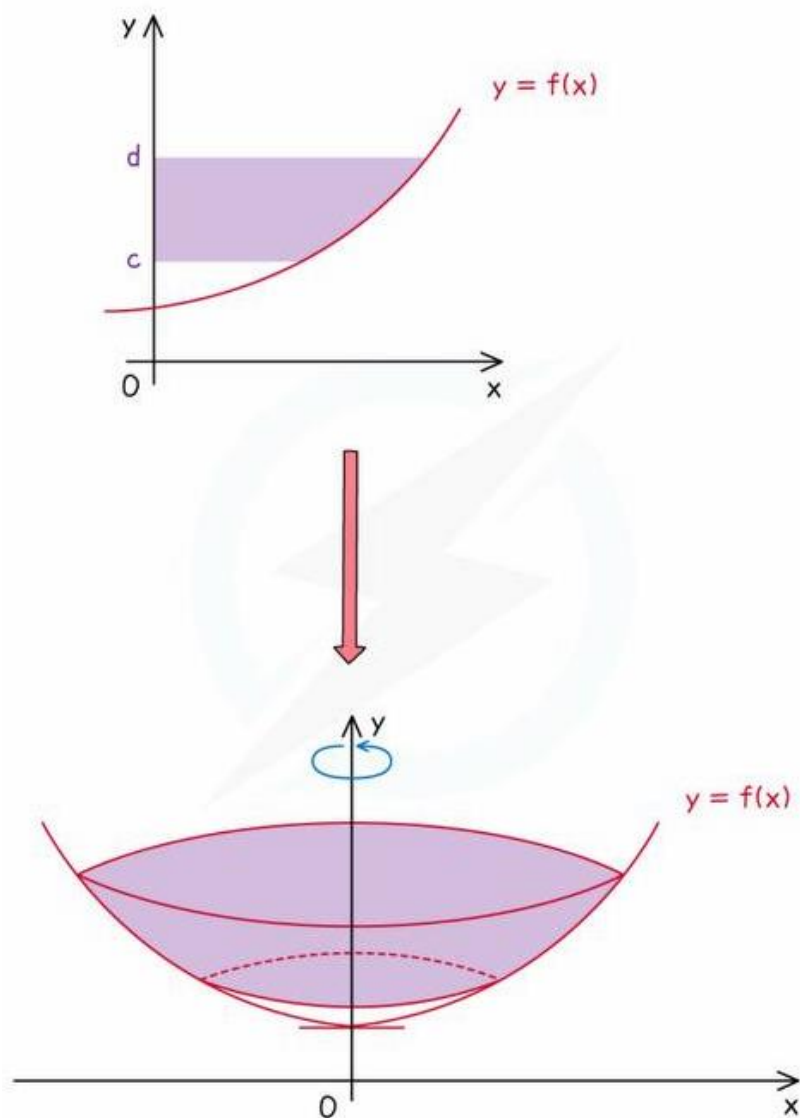


Рис. 2.26

Щоб знайти об'єм тіла обертання, утвореного при обертанні області, обмеженої функцією $y = f(x)$, лініями $y = c$ і $y = d$ та віссю Y , використовуйте формулу

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy$$

Далі необхідно показати приклад, як розв'язувати завдання на знаходження об'єму тіла обертання навколо осі Y .

Завдання №9

Площа, обмежена графіком рівняння $y = 2\sqrt{x}$, прямими $y = 2$ і $y = 4$ та віссю Y показана на графіку нижче.

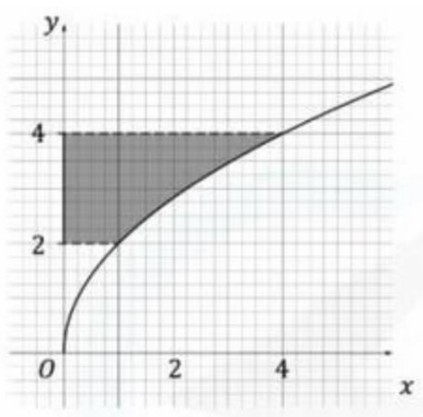


Рис. 2.27

Знайдіть точний об'єм тіла обертання, утвореного при обертанні площі даної фігури на 360 градусів навколо осі Y .

Перетворіть $y = f(x)$ на $x = g(y)$

$$y = 2\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} = \frac{y}{2}$$

$$x = \frac{1}{4}y^2$$

Піднесіть x до квадрату

$$x^2 = \frac{1}{16}y^4$$

Визначте межі інтегрування

$$y = 2 \text{ і } y = 4$$

Обчисліть інтеграл

$$V = \pi \int_2^4 \frac{1}{16} y^4 dy = \pi \left[\frac{1}{80} y^5 \right]_2^4 = \pi \left(\frac{64}{5} - \frac{2}{5} \right) = \frac{62}{5} \pi$$

Об'єм тіла обертання навколо осі Y становить $62\pi/5$ кубічних одиниць.

Таким чином, на основі вище наведених методичних рекомендацій удосконалення змісту вітчизняного профільного навчання математики треба починати з базису, тобто з покращення середньої освіти.

Для покращення базового навчання математиці, на мою думку, обов'язково необхідно впроваджувати наступні заходи:

1) зміна навчальної програми:

а) загальне зменшення рівня складності вітчизняної програми з математики;

б) розбивка її на чотири рівні складності і відповідне формування класів з математики, щоб учні могли на своєму рівні здібностей засвоювати кожен тему в межах відведених навчальних годин;

в) більш практична життєва орієнтованість програми з математики за рахунок практичних завдань, за рахунок додавання тем, де математика перетинається з іншими сферами життя, та за рахунок розширення деяких тем, таких як статистика і теорія ймовірностей;

2) зміна методичних підходів до викладання деяких тем: використання найкращих британських методик у вітчизняній практиці, і відповідна зміна вітчизняних підручників, в яких теоретичну частину треба максимально спростити, а завдання для розв'язування максимально структурувати для різних рівнів складності із достатньо великою кількістю завдань для відпрацювання навичок;

3) для дітей, що виявляють високі математичні здібності необхідно організовувати додаткові заняття або у вигляді факультативів, або математичних гуртків, з метою їх подальшої орієнтації на профільне навчання математиці та на участь в математичних олімпіадах та наукових проектах; при цьому дистанційне навчання на сьогоднішній день дає широкі можливості для навчання талановитих учнів талановитими вчителями незалежно від їх фізичного місцезнаходження.

Для покращення вітчизняного профільного навчання математики, на нашу думку, необхідно також розділяти учнів для вивчення математики на окремі класи відповідно до рівня їх здібностей. Рівнів має бути, якнайменше, два: профільний базовий і профільний підвищений, і програма на них має відрізнятися за рівнем складності. Базовий рівень мають вивчати всі учні на профільному рівні, підвищений - тільки ті, хто зможе реально його опанувати. Таким учням треба надати можливість обрати собі гідного наставника в межах України, адже такий учень - це алмаз, і потрібен найкращий ювелір, щоб його не зіпсувати, а перетворити на бріл'янт. Також потрібно створювати і розвивати систему заохочення і мотивації до вивчення математики на найвищому рівні, адже це майбутня конкурентоздатність країни.

Щодо олімпіадного руху, то тут також потрібно покращити систему заохочення і мотивації, і усіма способами намагатися підвищувати значущість і престижність учасників.

Висновки до другого розділу

Підсумовуючи результати проведеного дослідження, можна із гордістю відмітити, що профільне навчання математики в Україні знаходиться на досить високому рівні, і за рівнем знань, які воно дає учням не поступається Великобританії, а, можливо, в чомусь і перевершує її. Але, звичайно, в кожній системі є свої переваги і недоліки.

Так, наприклад, переваги британського підходу полягають у більш якісному, на наш погляд, навчанні математики в межах середньої школи, що досягається за рахунок меншого рівня складності програми, диференціації її на чотири рівні складності і відповідний поділ учнів, більшої практичної спрямованості програми. Але тут же криється і недолік, що учні після середньої школи виявляються не готові до того високого рівня складності програми математики, що вивчається на профільному рівні, і тому часто відмовляються від неї на користь інших предметів.

Треба також відмітити, що профільний рівень з математики у Великобританії охоплює і деякі теми вищої математики.

Перевагами українського підходу до профільного навчання математики є якраз підготовка учнів до матеріалу підвищеної складності ще з середньої школи з 8 класу, тому навчання в старшій профільній школі не було для наших учнів шоком. Хоча зараз при переході на 12-річну систему освіти і профілізацією шкіл на початкову, середню і академічний рівень, шок починає з'являтися саме через те, що учні після середньої школи переходять в старшу школу, і там змушені обирати профіль, до якого зі своєї попередньої школи вони виявляються неготовими.

Ще однією величезною перевагою українського профільного навчання є накопичений досвід і традиції освіти, які нам дісталися у спадок: це й серйозний академічний підхід до навчання, і наявність професійних педагогічних і наукових кадрів, і традиції математичних олімпіад. Все це сприяє утриманню математичної освіти країні на достойному рівні.

Недоліки навчання математики я вбачаю більше на базовому рівні, ніж на профільному. Ключова причина цих недоліків - це намагання видати бажане за дійсне: завдання в наших підручниках з математики представлені на чотирьох рівнях складності, але відповідної диференціації учнів немає; завдань по кожній темі наводиться досить багато, а реального часу за програмою, щоб прорішувати їх вкрай мало; має місце недостатня практична орієнтованість завдань, хоча автори підручників і намагаються цю задачу вирішувати.

Нам треба покращувати навчання математики в середній школі, але досить обережно, не втрачаючи своїх переваг, які полягають у хорошій ґрутовності і глибині програми, а, орієнтуючись на найкращий довід інших країн, зменшувати недоліки. На мою думку, в першу чергу, це поділ учнів для вивчення математики на різні класи за рівнем складності, але при цьому щоб не втратити середніх і сильних учнів і максимально сприяти їхньому прогресу і мотивації продовжувати своє математичне навчання.

Щодо профільного навчання математики, то прагнення видати бажане за дійсне присутнє і тут - воно проявляється в процесі формування математичних

класів. Правильно б було формувати математичні класи відштовхуючись від учнів, а у нас це відбувається навпаки - спочатку відкривається клас, а потім в нього набираються здібні до математики учні, а добирається він за рахунок середніх учнів, для яких профільна програма математики, насправді, є заважкою. Тож недоліки вітчизняної профільної освіти можна виправити шляхом правильної організації набору профільних математичних класів.

Також, на мою думку, необхідно на рівні держави більше стимулювати і мотивувати талановитих в математиці учнів розвиватися в цьому напрямку, а талановитих вчителів - вчити таких учнів, і дати можливість кожному такому талановитому учню знайти свого наставника в межах усієї України, що технології дистанційного навчання на сьогоднішній день цілком дозволяють зробити.

ВИСНОВКИ

У магістерській роботі здійснено комплексне дослідження шляхів удосконалення профільного навчання математики в Україні на основі аналізу британського досвіду. Реалізація поставлених завдань дозволила отримати такі результати:

1. Здійснено теоретико-методологічний аналіз розвитку та сучасного стану систем профільної математичної освіти в Україні та Великобританії.

Встановлено, що українська система профільної освіти перебуває на етапі системної трансформації в контексті реформи «Нова українська школа» та переходу до 12-річного навчання у 2027 році, що передбачає створення академічних ліцеїв. Аналіз результатів міжнародного моніторингу якості освіти PISA-2022 виявив, що попри сильну теоретичну базу, українські учні мають труднощі із застосуванням математики для розв'язання практичних життєвих задач, що підтверджується зниженням результатів з математичної грамотності.

Натомість система освіти Великобританії (рівень A-Level) базується на гнучкій модульній структурі, яка дозволяє учням обирати «маршрути» навчання (чиста математика, механіка, статистика) відповідно до майбутньої професії. Виявлено, що британська модель забезпечує глибшу інтеграцію математичного апарату з прикладними галузями, що є ключовим орієнтиром для реформування української старшої школи.¹

2. Проведено компаративний аналіз змісту навчальних програм з математики профільного рівня української старшої школи та програми Cambridge International AS & A Level Mathematics (9709).

3. Виявлено суттєві структурні та змістові розбіжності, які впливають на формування компетентностей учнів:

У змістовій лінії «Функції»: У британській освітній практиці важливу роль відіграє візуалізація математичних понять, зокрема через використання графічних моделей типу «діаграм відображення» (mapping diagrams). Це сприяє кращому засвоєнню абстрактних тем, таких як функції, і є ефективним інструментом для розвитку аналітичного мислення учнів.

У розділі «Алгебра і початки аналізу»: Встановлено відмінності у математичній нотації. Британська програма активно використовує нотацію Лейбніца (dy/dx), яка підкреслює фізичний зміст похідної як швидкості зміни та полегшує розуміння диференціальних рівнянь, тоді як в Україні домінує нотація Лагранжа (f'). Крім того, до програми A-Level (Paper 3) включено основи диференціальних рівнянь та методи інтегрування (частинами, підстановкою), які в Україні часто винесені за межі шкільної програми або вивчаються оглядово.

У стохастичній лінії: Виявлено критичний розрив у обсязі вивчення теорії ймовірностей та статистики. Програма A-Level містить окремі модулі (Paper 5, 6), що охоплюють дискретні та неперервні випадкові величини, нормальний розподіл та перевірку гіпотез, тоді як українська програма обмежується елементами комбінаторики, що не забезпечує достатнього рівня статистичної грамотності.

Чисельні методи: Встановлено, що британська програма (Paper 2, 3) передбачає вивчення ітераційних методів наближеного розв'язування рівнянь, що є важливою навичкою в еру комп'ютерних технологій, натомість в українській школі ця тема відсутня.³

4. Розроблено методичні рекомендації щодо удосконалення змісту профільного навчання математики в Україні. На основі проведеного аналізу запропоновано: запровадити використання діаграм відображення для пропедевтики поняття функції у 7–9 класах; ввести у 10–11 класах елементи чисельних методів та посилити лінію статистики (робота з даними, нормальний розподіл); використовувати паралельну математичну нотацію (зокрема в темі «Похідна») для посилення міжпредметних зв'язків з фізикою.

5. У результаті даного дослідження виявлено, що механічне перенесення британського досвіду є недоцільним, проте інтеграція окремих методичних підходів (візуалізація, прикладна статистика, чисельні методи) у вітчизняну програму дозволить зберегти фундаментальність української математичної освіти та водночас посилити її практичну складову.

Декларація використання ГШІ (GAIDeT)

Розкриття факту делегування завдань генеративному ШІ

Автори заявляють про використання генеративного ШІ у процесі дослідження та підготовки рукопису. Відповідно до таксономії GAIDeT (2025), наведені нижче завдання були делеговані інструментам генеративного ШІ за повного людського нагляду:

- Пошук і систематизація літератури
- Вичитування та редагування
- Переклад

Використаний інструмент генеративного ШІ: Gemini 1.5.

Повну відповідальність за фінальний рукопис несуть автори.

Інструменти генеративного ШІ не зазначаються як автори та не несуть відповідальності за кінцеві результати.

Декларацію подав(ла): Єлізарова Катерина

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти. 2-ге вид., переробл. Харків : Гімназія, 2020. 288 с. : іл.
2. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти. 2-ге вид., переробл. Харків : Гімназія, 2021. 240 с. : іл.
3. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 416 с. : іл.
4. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2018. 400 с. : іл.
5. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. та ін. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2019. 352 с. : іл.
6. Васьківська Г. О. Конструювання і реалізація змісту профільного навчання : особистісно орієнтований підхід : практ. посіб. Київ : КОНВІ ПРІНТ, 2019. 96 с.
7. Головка М., Наumenко С. Результати PISA-2022 в Україні: актуальні проблеми загальної середньої освіти та шляхи їх розв'язання. Український педагогічний журнал. 2024. № 2. URL: https://www.researchgate.net/publication/382242345_PISA-2022_results_in_Ukraine_current_problems_of_general_secondary_education_and_ways_to_solve_them (дата звернення: 26.11.2025).
8. Загородня А. А. Система профільного навчання у старшій школі у добу незалежності. Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах. 2020. Вип. 69, т. 1. DOI: <https://doi.org/10.32840/1992-5786.2020.69-1.32>.
9. Про освіту : Закон України від 05.09.2017 № 2145-VIII. Відомості Верховної Ради України. 2017. № 38–39, ст. 380. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text> (дата звернення: 26.11.2025).

10. Зарубіжний досвід профільного навчання [Електронний ресурс]. URL: <http://osvita.ua/school/method/technol/3521> (дата звернення: 26.11.2025).
11. Кулінка Ю. С. Методика профільного навчання : навч.-метод. комплекс дисципліни для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня спеціальності 014.10 Середня освіта (Трудове навчання та технології). Кривий Ріг : КДПУ, 2020. 54 с.
12. Лиховид І. PISA-2022: короткий огляд усіх основних результатів. Нова українська школа. URL: <https://nus.org.ua/2023/12/05/pisa-2022-korotkyj-oglyad-usih-osnovnyh-rezultativ/> (дата звернення: 26.11.2025).
13. Лиховид І. Що не так зі шкільною математикою: аналізуємо результати PISA-2022 та шукаємо рішення, як допомогти учням. Нова українська школа. URL: <https://nus.org.ua/2024/03/03/shho-ne-tak-zi-shkilnoyu-matematykoyu-analizuyemo-rezultaty-pisa-2022-ta-shukayemo-rishennya-yak-dopomogty-uchnyam/> (дата звернення: 26.11.2025).
14. Лов'янова І. В. Професійно спрямоване навчання математики у профільній школі : теоретичний аспект : монографія. Черкаси : Видавець Чабаненко Ю. А., 2014. 354 с.
15. Лов'янова І. В. Теоретико-методичні засади навчання математики у профільній школі : дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02. Черкаси, 2014. 648 с.
16. Лов'янова І. В. Оцінка якості математичної освіти учнів старшої профільної школи. Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology. 2014. Vol. II(9), Issue 19.
17. Локшина О. Зарубіжна старша профільна школа: структурна організація, зміст освіти, підходи до оцінювання. Рідна школа. 2004. № 4. С. 65–67.
18. Навчальні програми для 10–11 класів (Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти, 2011 рік). Математика (профільний рівень) [Електронний ресурс]. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx> (дата звернення: 26.11.2025).

19. Про затвердження Державного стандарту профільної середньої освіти : постанова Кабінету Міністрів України від 25 липня 2024 р. № 851. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-%D0%BF#n10> (дата звернення: 26.11.2025).
20. Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти : постанова Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. № 1392. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/main/1392-2011-%D0%BF#Text> (дата звернення: 26.11.2025).
21. Про затвердження Концепції профільного навчання у старшій школі : розпорядження Кабінету Міністрів України від 21 жовтня 2013 р. № 1456. URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/npa/5a1fe82a9c95d.pdf> (дата звернення: 26.11.2025).
22. Про концепцію профільного навчання в старшій школі : лист Міністерства освіти і науки України від 30.05.2003 № 1/9-273. URL: https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v_273290-03#Text (дата звернення: 26.11.2025).
23. Про схвалення Концепції реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа» на період до 2029 року : розпорядження Кабінету Міністрів України від 14 грудня 2016 р. № 988-р. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/988-2016-%D1%80#Text> (дата звернення: 26.11.2025).
24. Система освіти у Великій Британії [Електронний ресурс]. InfoStudy. URL: <https://infostudy-uk.com/systema-osvity-u-velykii-brytanii> (дата звернення: 26.11.2025).
25. Система освіти у Сполученому Королівстві Великої Британії [Електронний ресурс]. B.GREAT. URL: <https://bg-education.com/tpost/hv0xrtk7y5-sistema-osvti-u-spoluchenomuu-korolvstv-v> (дата звернення: 26.11.2025).
26. Слєпкань З. І. Профільне навчання в зарубіжній і українській школі як вид диференційованої підготовки учнів і ключова проблема реформування сучасної системи освіти. Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. праць. Вип. 25. Донецьк : Фірма ТЕАН, 2006. С. 11–21.

27. Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А., Лов'янова І. В., Сердюк З. О. Організація навчання математики у старшій профільній школі : монографія / за ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси : Видавець ФОП Гордієнко, 2017. 216 с.
28. Тенденції розвитку шкільної освіти в країнах ЄС, США та Китаї : монографія [Електронне видання] / О. І. Локшина, О. З. Глушко, А. П. Джурило, С. М. Кравченко, Н. В. Нікольська, М. М. Тименко, О. М. Шпарик ; за заг. ред. О. І. Локшиної. Київ : КОНВІ ПРІНТ, 2021. 350 с.
29. Федюк У. М. Тенденції реформування старшої профільної школи в Україні. Порівняльна педагогіка. Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Серія : педагогіка і психологія. 2014. Вип. 41. URL: https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/714151/1/Fediuk_Uli_Profil.pdf (дата звернення: 26.11.2025).
30. Шиян Н. І. Дидактичні засади профільного навчання у загальноосвітній школі сільської місцевості : автореф. дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.09. Харків, 2005. 40 с.
31. Що знають і вміють українські 15-річні підлітки / кол. авт. : Г. Бичко (осн. автор), Т. Вакуленко, Т. Лісова, М. Мазорчук, В. Терещенко, С. Раков, В. Горох та ін. ; за ред. В. Терещенка, І. Клименко ; Український центр оцінювання якості освіти. Київ, 2023. 24 с.
32. A-Level Maths Tuition Online (9709): Live Interactive Classes with Expert A-Level Online Maths Tutors [Електронний ресурс]. MyMathsClub. URL: <https://mymathsclub.com/a-level-maths-tuition-online-math-tutor-alevel/> (дата звернення: 26.11.2025).
33. Cambridge International AS & A Level Mathematics 9709 : syllabus for examination in 2026 and 2027 [Електронний ресурс]. Cambridge International. URL: <https://www.cambridgeinternational.org/Images/697427-2026-2027-syllabus.pdf> (дата звернення: 26.11.2025).

Додаток А

Порівняльний аналіз змісту тем компоненти “Чиста математика 1”
та української програми з математики профільного рівня

Рарер 1: Чиста математика 1		Українська програма профільного рівня	
Навички (учні повинні вміти)	Приклади і примітки	В якому класі вивчається тема	Особливості вивчення теми і недоліки української програми
1. Квадратні рівняння			
Виконувати виділення повного квадрату для квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ і використовувати виділений повний квадрат.	Наприклад, для визначення вершини графіка $y = ax^2 + bx + c$ або для побудови графіка.	Вивчається в 9 класі.	Вивчається повністю.
Знаходити дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ і використовувати його.	Наприклад, для визначення кількості дійсних коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Знання терміна «подвійний корінь» включено.	Вивчається у 8 класі.	Вивчається повністю.
Розв'язувати квадратні рівняння та квадратні нерівності з однією невідомою.	Шляхом розкладу на множники, виділення повного квадрату та використання формули.	Вивчається в 9 класі.	Вивчається повністю.
Розв'язувати методом підстановки систему рівнянь, одне з яких є лінійним, а інше — квадратним.	Наприклад, $x + y + 1 = 0$ і $x^2 + y^2 = 25$, $2x + 3y = 7$ і $3x^2 = 4 + 4xy$.	Вивчається в 9 класі.	Вивчається повністю.
Розпізнавати та розв'язувати рівняння відносно x , що є квадратичними функціями від іншої функції.	Наприклад, $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, $6x + \sqrt{x} - 1 = 0$, $\tan^2 x = 1 + \tan x$.	Вивчається в 8 класі.	Вивчається повністю.
2. Функції			
Розуміти терміни «функція», «область визначення», «область значень», «однозначна функція», «обернена функція» та «складена функція».		Поняття «функція», «область визначення», «область значень», «однозначна функція» -	Поняття «однозначна функція» або «one-to-one function» розглядається відокремлено, без порівняння з поняттями «one-to-many», «many-to-

		вивчаються в 7, 8, 9, 10, 11 класі, «обернена функція», «складена функція» - вивчаються в 10 класі	one» і «many-to-many relationship», що значно обмежує розуміння цього поняття. Поняття «складена функція» не розглядається окремо, а лише мимохить в темі «правила обчислення похідних функцій».
Визначати область значень заданої функції в простих випадках та знаходити складену функцію з двох заданих функцій.	Наприклад, знайти область значень для функції $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$ для $x \geq 1$, і область значень для функції $g: x \rightarrow x^2 + 1$ для $x \in \mathbb{R}$. Включаючи умову, що складена функція gf може бути сформована тільки тоді, коли область значень f знаходиться в межах області визначення g .	Знаходження області значень вивчається в 7, 8, 9, 10, 11 класах	Не вивчається окремо формування складеної функції та її області визначення і області значень.
Визначати, чи є функція взаємно-однозначною, та знаходити обернену.	Наприклад, знайти обернену функцію до $h: x \rightarrow (2x+3)^2 - 4$ для $x < -\frac{3}{2}$.	Вивчається в 10 класі	Вивчається повністю.
Проілюструвати графічно відношення між однозначною функцією та її оберненою функцією.	Ескізи повинні містити позначення дзеркальної лінії $y = x$.	Вивчається в 10 класі.	Вивчається повністю.
Розуміти та використовувати перетворення графіків: $y = f(x)$, $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = af(x)$, $y = f(ax)$ та їх комбінації.	Включно з використанням термінів «перенесення», «відбиття» та «розтягнення» при описі перетворень. Питання можуть стосуватися алгебраїчних або тригонометричних функцій, або інших графіків із заданими характеристиками.	Вивчається в 9, 10, 11 класі.	Вивчається повністю.
3. Координатна геометрія			
Знаходити рівняння прямої за двома точками або точкою й кутовим коефіцієнтом.	Наприклад, задано дві точки або одну точку і нахил.	Вивчається в 7 класі.	Вивчається повністю.
Інтерпретувати та використовувати будь-яку з форм рівняння прямої:	Включно з обчисленням відстаней, нахилів, середніх точок, точок перетину та використанням відношення	Вивчається в 9 класі.	Вивчається повністю.

$y = mx + c$, $y - y_1 = m(x - x_1)$, $ax + by + c = 0$.	між нахилами паралельних та перпендикулярних прямих.		
Розуміти, що $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ є рівнянням кола з центром у точці (a, b) і радіусом r .	Включаючи використання розширеної форми $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.	Вивчається в 9 класі.	Вивчається повністю.
Використовувати алгебраїчні методи для розв'язання задач, що містять прямі та кола,	Включаючи використання елементарних геометричних властивостей кіл, наприклад, дотичної, перпендикулярної до радіуса, кута в півколі, симетрії. Неявне диференціювання не включено.	Вивчається в 9 класі.	Вивчається повністю.
Розуміти взаємозв'язок між графіком та пов'язаним з ним алгебраїчним рівнянням, а також використовувати взаємозв'язок між точками перетину графіків та розв'язками рівнянь.	Наприклад, для визначення набору значень k , для яких пряма $y = x + k$ перетинає, дотикається або не перетинає квадратичну криву.	Вивчається в 9 класі.	Вивчається повністю.
4. Радіанна міра			
Розуміти визначення радіана та використовувати відношення між радіанами та градусами		Вивчається в 10 класі.	Вивчається повністю.
Використовувати формули $s = r\theta$ і $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ при вирішенні задач, що стосуються довжини дуги та площі сектора кола.	Включаючи обчислення довжин і кутів у трикутниках та площі трикутників.	Вивчається в 9 класі.	Вивчається повністю.
5. Тригонометрія			
Будувати та використовувати графіки функцій синуса, косинуса і тангенса (для кутів будь-якої величини, у градусах або радіанах).	Наприклад, $y = 3 \sin x$, $y = 1 - \cos 2x$, $y = \tan\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$.	Вивчається в 10 класі.	Вивчається повністю.
Використовувати точні значення синуса, косинуса та тангенса 30° , 45° , 60° та подібних кутів.	Наприклад, $\cos 150^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.	Вивчається в 9 і в 10 класі.	Не пояснюється, звідки беруться точні значення синуса, косинуса та тангенса 30° , 45° , 60° та

			подібних кутів.
Використовувати позначення $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ для позначення головних значень обернених тригонометричних співвідношень.	Спеціальних знань про ці функції не вимагається, але очікується розуміння їх як прикладів обернених функцій.	Вивчається в 10 класі.	Не використовується міжнародно прийняті позначення $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ для позначення головних значень обернених тригонометричних співвідношень.
Використовувати тотожності $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.	Наприклад, при доведенні тотожностей, спрощенні виразів та розв'язуванні рівнянь.	Вивчається в 10 класі.	Вивчається повністю.
Знайти всі розв'язки простих тригонометричних рівнянь, що лежать у заданому проміжку (загальні форми розв'язків не включені).	Наприклад, розв'язати $3 \sin 2x + 1 = 0$ для $-\pi < x < \pi$, $3 \sin^2 \theta - 5 \cos \theta - 1 = 0$ для $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.	Вивчається в 10 класі.	Вивчаються загальні форми розв'язків тригонометричних рівнянь, а розв'язки у заданому проміжку розглядаються як частина загального розв'язку.
6. Ряди			
Використовувати розклад $(a + b)^n$, де n — від'ємне ціле число.	Включно з позначеннями $\binom{n}{r}$ і $n!$ Знання найбільшого члена та властивостей коефіцієнтів не вимагається.	Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
Розпізнавати арифметичні та геометричні прогресії.		Вивчається в 9 класі.	Вивчається повністю.
Використовувати формули для n -го члена та для суми перших n членів для розв'язання задач, що містять арифметичні або геометричні прогресії.	Включно з знаннями про те, що числа a, b, c знаходяться в <i>арифметичній прогресії</i> , якщо $2b = a + c$ (або еквівалентно) і знаходяться в <i>геометричній прогресії</i> , якщо $b^2 = ac$ (або еквівалентно). Питання можуть стосуватися більш ніж однієї прогресії.	Вивчається в 9 класі.	Вивчається повністю.
Використовувати умову збіжності геометричної прогресії та формулу для суми до нескінченності збіжної геометричної прогресії.		Вивчається в 9 класі.	Вивчається повністю.
7. Диференціювання			
Розуміти нахил кривої в точці як межу нахилів відповідної	Лише неформальне розуміння ідеї границі очікується.	Вивчається в 10 класі.	Використовується лише позначення $f'(x)$ та $f''(x)$.

послідовності хорд і використовувати позначення $f'(x)$, $f''(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ для першої та другої похідних.	Наприклад: розглядати градієнт хорди, яка з'єднує точки з координатами $x=2$ і $(2+h)$ на кривій $y=x^3$. Формальне використання методу знаходження похідної «з перших принципів» не вимагається.		Позначення $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ не використовуються, і це в подальшому ускладнює для учнів вивчення пов'язаних тем вищої математики у вищих навчальних закладах.
Використовувати похідну x^n (для будь-якого раціонального n), разом із сталими множниками, сумами та різницями функцій, а також складених функцій, використовуючи ланцюгове правило.	Наприклад, знайти $\frac{dy}{dx}$ функції $y = \sqrt{2x^3+5}$.	Вивчається в 10 класі.	Вивчається повністю.
Застосувати диференціювання до градієнтів, дотичних і нормалей, зростаючих і спадаючих функцій та швидкості змін.	Включно з пов'язаними темпами зміни, наприклад, за умови заданого темпу збільшення радіуса кола, знайти темп збільшення площі для конкретного значення однієї із змінних.	Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
Знаходити стаціонарні точки та визначати їх характер, а також використовувати інформацію про стаціонарні точки при побудові графіків.	Включаючи використання другої похідної для визначення максимумів і мінімумів; альтернативні методи можуть бути використані в питаннях, де метод не вказаний. Знання точок перегину не включено.	Вивчається в 10 класі.	Вивчається повністю.
8. Інтегрування			
Розуміти інтегрування як зворотний процес диференціювання та інтегрувати $(ax+b)^n$ (для будь-якого раціонального n , крім -1), разом із сталими множниками, сумами та різницями.	Наприклад, $\int (2x^3-5x+1) dx$, $\int \frac{1}{(2x+3)^2} dx$.	Вивчається в 11 класі.	Вивчається повністю.
Розв'язувати задачі, що містять обчислення константи інтегрування.	Наприклад, щоб знайти рівняння кривої, що проходить через точки $(1;-2)$ для якої $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2x+1}$.	Вивчається в 11 класі.	Вивчається повністю.
Обчислювати визначені	Включаючи прості випадки	Вивчається в	Вивчається

інтеграли.	«неправильних» інтегралів, такі як $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx \text{ і } \int_1^{\infty} x^{-2} dx.$	11 класі.	повністю.
Використовувати визначений інтеграл для знаходження – площі області, обмеженої кривою і лініями, паралельними осям, або між кривою і лінією, або між двома кривими. – об'єму тіла обертання навколо однієї з осей.	Об'єм тіла обертання може включати область, яка не обмежена віссю обертання, наприклад, область між $y = 9 - x^2$ і $y = 5$, обертається навколо осі x .	Вивчається в 11 класі.	Вивчається лише формула для знаходження об'єму тіла обертання навколо осі X , а навколо осі Y не вивчається, хоча, логічно було б вивчити обидві формули.

Додаток Б

Порівняльний аналіз змісту тем компонент “Чиста математика 2” і “Чиста математика 3” та української програми з математики профільного рівня

Рарер 2: Чиста математика 2	Рарер 3: Чиста математика 3	Приклади і примітки	Українська програма	
Навички (учні повинні вміти)	Навички (учні повинні вміти)		В якому класі вивчається тема	Особливості вивчення теми і недоліки української програми
2. Алгебра				
Розуміти значення $ x $, будувати графік $y = ax + b $ і використовувати такі співвідношення, як $ a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ і $ x - a < b \Leftrightarrow a - b < x < a + b$ при розв'язуванні рівнянь і нерівностей.	Розуміти значення $ x $, будувати графік $y = ax + b $ і використовувати такі співвідношення, як $ a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ і $ x - a < b \Leftrightarrow a - b < x < a + b$ при розв'язуванні рівнянь і нерівностей.	Наприклад, $ 3x - 2 = 2x + 7 $, $2x + 5 < x + 1 $ Графіки $y = f(x) $ та $y = f(x)$ для нелінійних функцій f не включені.	Вивчається в 6, 7, 8, 9, 10 класі	Вивчається повністю.
Ділити многочлен степеня, що не перевищує 4, на лінійний або квадратичний многочлен і визначати частку та залишок (який може дорівнювати нулю).	Ділити многочлен степеня, що не перевищує 4, на лінійний або квадратичний многочлен і визначати частку та залишок (який може дорівнювати нулю).		Вивчається в 10 класі.	Вивчається повністю
Використовувати теорему про множники та теорему про залишок.	Використовувати теорему про множники та теорему про залишок.	Наприклад, для знаходження множників та залишків, розв'язувати многочленні рівняння або обчислювати невідомі коефіцієнти. Включно з множниками виду $(ax + b)$, в яких коефіцієнт перед x не дорівнює одиниці, та	Вивчається в 10 класі.	Вивчається, але лише для множників виду $(x + b)$. Тобто не включно з множниками виду $(ax + b)$, в яких коефіцієнт перед x не дорівнює одиниці, хоча було б

		включаючи обчислення залишків.		логічніше їх також розглянути.
	Знаходити відповідну формулу для вираження раціональних функцій у вигляді часткових дробів і виконувати розклад у випадках, коли знаменник не є складнішим за - $(ax + b)(cx + d)(ex + d)$ - $(ax + b)(cx + d)^2$ - $(ax + b)(cx^2 + d)$.	За винятком випадків, коли ступінь чисельника перевищує ступінь знаменника.	Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
	Використовувати розклад $(1+x)^n$, де n раціональне число і $ x < 1$	Знаходження загального члена в розкладі не включено. Перетворення стандартного ряду для розкладу наприклад, $(2 - \frac{1}{2}x)^{-1}$ включено, а також визначення набору значень x , для яких розклад є дійсним у таких випадках.	Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
3. Логарифмічна і показникова функції				
Розуміти взаємозв'язок між логарифмами та степенями, а також використовувати правила логарифмів (за винятком зміни основи).	Розуміти взаємозв'язок між логарифмами та індексами, а також використовувати правила логарифмів (за винятком зміни основи).		Вивчається в 11 класі.	Вивчається повністю.
Розуміти визначення та властивості e^x та $\ln x$, включаючи їх взаємозв'язок як обернених функцій та їх графіки.	Розуміти визначення та властивості e^x та $\ln x$, включаючи їх взаємозв'язок як обернених функцій та їх графіки.	Включно із знанням графіка $y = e^{kx}$ для позитивних та негативних значень k .	Вивчається в 11 класі.	Не вивчаються відокремлено, а вивчаються як окремі випадки показникової та логарифмічної функцій.

Використовувати логарифми для розв'язання рівнянь та нерівностей, в яких невідома з'являється в степені.	Використовувати логарифми для розв'язання рівнянь та нерівностей, в яких невідома з'являється в степені.	Наприклад, $2^x < 5$, $3 \times 2^{3x-1} < 5$, $3^{x+1} = 4^{2x-1}$	Вивчається в 11 класі.	Вивчається повністю.
Використовувати логарифми для перетворення заданої показникової функції в лінійну функцію, а отже, визначати невідомі константи, враховуючи кутовий коефіцієнт і/або точку перетину з віссю y .	Використовувати логарифми для перетворення заданої показникової функції в лінійну функцію, а отже, визначати невідомі константи, враховуючи кутовий коефіцієнт і/або точку перетину з віссю y .	Наприклад, $y = kx^n$ дає $\ln y = \ln k + n \ln x$, що є лінійним в $\ln x$ і $\ln y$. $y = k(a^x)$ дає $\ln y = \ln k + x \ln a$, що є лінійним в x і $\ln y$.	Вивчається в 11 класі.	Прийом логарифмування вивчається тільки для розв'язування рівнянь і нерівностей, а для перетворення показникової функції в лінійну функцію цей прийом не розглядається.
4. Тригонометрія				
Розуміти взаємозв'язок функцій секанса, косеканса та котангенса з косинусом, синусом та тангенсом, а також використовувати властивості та графіки всіх шести тригонометричних функцій для кутів будь-якої величини.	Розуміти взаємозв'язок функцій секанса, косеканса та котангенса з косинусом, синусом та тангенсом, а також використовувати властивості та графіки всіх шести тригонометричних функцій для кутів будь-якої величини.		Вивчається в 10 класі.	Вивчаються лише функції синуса, косинуса, тангенса і котангенса. Функції секанса і косеканса не розглядаються.
Використовувати тригонометричні тотожності для спрощення та точного обчислення виразів, а також під час розв'язування рівнянь, та вибирати тотожність або тотожності, що відповідають контексту, демонструючи обізнаність, зокрема, у використанні	Використовувати тригонометричні тотожності для спрощення та точного обчислення виразів, а також під час розв'язування рівнянь, та вибирати тотожність або тотожності, що відповідають контексту, демонструючи обізнаність, зокрема, у використанні	Наприклад, спростити $\cos(x-30^\circ) - 3 \sin(x-60^\circ)$. Розв'язати $\tan \theta + \cot \theta = 4$, $2 \sec^2 \theta - \tan \theta = 5$, $3 \cos \theta + 2 \sin \theta = 1$.	Вивчається в 10 класі.	Формули $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$, $\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$ вивчаються без використання секанса і косеканса. Формули $\sin(A \pm B)$, $\cos(A \pm B)$, $\tan(A \pm B)$, $\sin 2A$, $\cos 2A$, $\tan 2A$

– $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ і $\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$ – розкладів $\sin(A \pm B)$, $\cos(A \pm B)$, $\tan(A \pm B)$ – формул $\sin 2A$, $\cos 2A$, $\tan 2A$ – виразу $a \sin \theta + b \cos \theta$ у формах $R \sin(\theta \pm a)$ і $R \cos(\theta \pm a)$.	– $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ і $\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$ – розкладів $\sin(A \pm B)$, $\cos(A \pm B)$, $\tan(A \pm B)$ – формул $\sin 2A$, $\cos 2A$, $\tan 2A$ – виразу $a \sin \theta + b \cos \theta$ у формах $R \sin(\theta \pm a)$ і $R \cos(\theta \pm a)$.			вивчаються повністю. Представлення виразу $a \sin \theta + b \cos \theta$ у формах $R \sin(\theta \pm a)$ і $R \cos(\theta \pm a)$ не вивчається
5. Диференціювання				
Використовувати похідні e^x , $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan$ разом із константами, сумами, різницями та складеними функціями.	Використовувати похідні e^x , $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan$ разом із константами, сумами, різницями та складеними функціями.		Вивчається в 10 класі.	Вивчається повністю.
Диференціювати добутки та частки	Диференціювати добутки та частки	Наприклад, $\frac{2x-4}{3x+2}$, $x^2 \ln x$, $x e^{1-x^2}$.	Вивчається в 10 класі.	Вивчається повністю.
Знаходження та використання першої похідної функції, яка визначена параметрично або неявним чином.	Знаходження та використання першої похідної функції, яка визначена параметрично або неявним чином.	Наприклад, $x = t - e^{2t}$, $y = t + e^{2t}$, $x^2 + y^2 = xy + 7$. Включно з використанням у задачах, що містять дотичні та нормалі.	Не вивчається.	Внесена до програм вищої математики ВНЗ.
6. Інтегрування				
Розширити ідею «обернено до диференціювання» шляхом включення інтегрування таких функцій, як e^{ax+b} , $\frac{1}{ax+b}$, $\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$, $\sec^2(ax+b)$. Знання загального методу інтегрування шляхом підстановки не є обов'язковим.	Розширити ідею «обернено до диференціювання» шляхом включення інтегрування таких функцій, як e^{ax+b} , $\frac{1}{ax+b}$, $\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$, $\sec^2(ax+b)$, $\frac{1}{x^2+a^2}$. Включаючи такі приклади, як $\frac{1}{2+3x^2}$.		Вивчається в 11 класі.	Вивчається повністю, крім інтегрування функції $\sec^2(ax+b)$, $\frac{1}{x^2+a^2}$, $\frac{1}{2+3x^2}$.
Використовувати тригонометричні співвідношення при виконанні	Використовувати тригонометричні співвідношення при виконанні	Наприклад, використання формул подвійного кута для	Вивчається в 10 і 11 класі.	Окремо не розглядається.

інтегрування.	інтегрування.	інтегрування $\sin 2x$ або $\cos^2(2x)$.		
Розуміти та використовувати правило трапеції для оцінки значення визначеного інтеграла.		Включаючи використання ескізів графіків у простих випадках для визначення, чи дає правило трапеції завищену або занижену оцінку.	Не вивчається.	???
	Інтегрувати раціональну функцію шляхом декомпозиції її на часткові функції.	Обмежується типами часткових дробів, як зазначено у розділі “Алгебра” вище.	Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
	Розпізнавати функції виду $\frac{kf(x)}{f(x)}$ та інтегрувати такі функції.	Наприклад, інтегрувати $\frac{x}{x^2+1}$, $\tan x$.	Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
	Розпізнавати, коли підінтегральний вираз можна розглядати як добуток, і використовувати інтегрування частинами.	Наприклад, інтегрувати $x \sin 2x$, $x^2 e^{-x}$, $\ln x$, $x \tan^{-1} x$.	Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
	Використовувати задану заміну для спрощення та обчислення визначеного або невизначеного інтеграла.	Наприклад, інтегрувати $\sin^2 2x \cos x$ використовуючи заміну $u = \sin x$.	Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
7. Числове розв'язання рівнянь				
Знайти приблизне значення кореня рівняння, за допомогою графічних міркувань та/або шляхом пошуку зміни знака.	Знайти приблизне значення кореня рівняння, за допомогою графічних міркувань та/або шляхом пошуку зміни знака.	Наприклад, знайти пару послідовних цілих чисел, між якими лежить корінь.	Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
Розуміти суть та використовувати позначення послідовності наближень, яка збігається з коренем рівняння.	Розуміти суть та використовувати позначення послідовності наближень, яка збігається з коренем рівняння.			
Розуміти, як задана	Розуміти, як задана	Знання умови	Не	Винесена до

проста ітераційна формула вигляду $x_{n+1}=F(x_n)$ пов'язана з рівнянням, що вирішується, і використовувати задану ітерацію або ітерацію, засновану на заданому перегрупованні рівняння, для визначення кореня з заданою точністю.	проста ітераційна формула вигляду $x_{n+1}=F(x_n)$ пов'язана з рівнянням, що вирішується, і використовувати задану ітерацію або ітерацію, засновану на заданому перегрупованні рівняння, для визначення кореня з заданою точністю.	збіжності не включено, але очікується розуміння того, що ітерація може не збігатися.	вивчається.	програм вищої математики ВНЗ.
8. Вектори				
	Використовувати стандартні позначення для векторів, тобто $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $xi+yj$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $xi + yj + zk$, $\overrightarrow{AB}$, a .		Вивчається в 9 і в 10 класі.	Вивчаються лише такі позначення для векторів, як $\overrightarrow{AB}$, a , стандартні позначення для векторів, тобто $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $xi+yj$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $xi+yj+zk$ не вивчаються, хоча було б доцільно їх вивчати межах шкільної програми в 11 класі.
	Виконувати додавання і віднімання векторів та множення вектора на скаляр, а також розуміти ці операції в геометричному сенсі.	Наприклад, «ОАВС це паралелограмом» еквівалентно $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. Загальна форма теореми про відношення не включена, але очікується розуміння того, що середина АВ має вектор положення $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.	Вивчається в 9 і в 10 класі.	Вивчається повністю.
	Обчислювати	У 2 або 3 вимірах.	Вивчає	Вивчається,

	довжину вектора та використовувати одиничні вектори, вектори переміщення та вектори положення.		вся в 9 і в 10 класі.	як обчислювати довжину вектора, вивчається поняття про одиничні вектори та вивчається, як знаходити координати вектора положення. Вектори переміщення не вивчаються.
	Розуміти значення всіх символів, що використовуються, коли рівняння прямої лінії виражається у вигляді $r = a + tb$, і знаходити рівняння лінії, маючи достатню інформацію	Наприклад, знаходити рівняння лінії, маючи вектор положення точки на лінії та вектор напрямку, або вектори положення двох точок на лінії.	Вивчається в 7, 9 і в 10 класі.	Вивчається повністю.
	Визначати, чи дві прямі паралельні, перетинаються або мимобіжні, та знаходити точку перетину двох прямих, якщо вона існує.	Розрахунок найкоротшої відстані між двома мимобіжними прямими не є обов'язковим. Знаходження рівняння спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих також не є обов'язковим.	Вивчається в 7, 9, 10 класі.	Вивчається повністю.
	Використовувати формули для обчислення скалярного добутку двох векторів і використовувати скалярні добутки в задачах, що містять прямі та точки.	Наприклад, знаходження кута між двома прямими та знаходження висоти перпендикуляра з точки до прямої; запитання можуть містити 3D-об'єкти, такі як кубоїди, тетраедри (піраміди) тощо. Знання векторного добутку	Вивчається в 9 і в 10 класі.	Вивчається повністю.

		не вимагається.		
9. Диференційні рівняння				
	Сформулювати просте твердження, що включає швидкість руху як диференціальне рівняння	Включено представлення та оцінку константи пропорційності, де це необхідно.	Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
	Знайти шляхом інтегрування загальну форму рішення для диференціального рівняння першого порядку, в якому змінні є незалежними.	Включно з будь-якими методами інтегрування з теми 3.5 вище.	Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
	Використовувати початкову умову для знаходження конкретного рішення.		Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
	Пояснювати розв'язок диференціального рівняння в контексті задачі, що моделюється рівнянням.	Якщо диференціальне рівняння використовується для моделювання «реальної» ситуації, додаткових умов про контекст не потрібно.	Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
10. Комплексні числа				
	Розуміти поняття комплексного числа, згадати значення термінів «дійсна частина», «уявна частина», «модуль», «аргумент», «спряжена частина» та використовувати той факт, що два комплексні числа рівні тоді і тільки тоді, коли їхні дійсні та уявні частини рівні.	Слід знати позначення $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $ z $, $\arg z$, z^* . Аргумент комплексного числа зазвичай позначає кут θ , такий що $-\pi < \theta \leq \pi$, але в деяких випадках інтервал $0 \leq \theta < 2\pi$ може бути більш зручним. У відповідях можна використовувати будь-який з інтервалів, якщо в питанні не вказано інше.	Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
	Виконувати операції додавання,	Для обчислень, що включають	Не вивчається	Винесена до програм

	віднімання, множення та ділення двох комплексних чисел, виражених у декартовій формі $x + iy$.	множення або ділення, слід показувати повну деталізацію розрахунків.	ься.	вищої математики ВНЗ.
	Використовувати результат, що для поліноміального рівняння з дійсними коефіцієнтами будь-які недійсні корені зустрічаються в сполучених парах.	Наприклад, при розв'язуванні кубічного або четвертого рівняння, де задано один комплексний корінь.	Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
	Геометрично зображати комплексні числа за допомогою діаграми Аргана.		Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
	Виконувати операції множення та ділення двох комплексних чисел, виражених у полярній формі $r(\cos \theta + i \sin \theta) \equiv re^{i\theta}$.	Включаючи результати $ z_1 z_2 = z_1 z_2 $ та $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, а також відповідні результати для ділення.	Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
	Знайти два квадратні корені комплексного числа.	наприклад, квадратні корені $5 + 12i$ в точній декартовій формі. Потрібно показати повний розрахунок.	Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
	Зрозуміти простими термінами геометричні ефекти спряження комплексного числа та додавання, віднімання, множення і ділення двох комплексних чисел.		Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.
	Проілюструвати прості рівняння та нерівності з комплексними числами за допомогою позицій на діаграмі Аргана.	Наприклад, $ z - a < k$, $ z - a = z - b $, $\arg(z - a) = \alpha$.	Не вивчається.	Винесена до програм вищої математики ВНЗ.