УДК [37.016:514]
DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-3-128-135

ORTOGONAL PROJECTION IN STEREOMETRY PROBLEMS

ОРТОГОНАЛЬНЕ ПРОЄКЦІЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Ivan LENCHUK,
Doctor of Pedagogical Sciences, Professor

Іван ЛЕНЧУК,
доктор педагогічних наук, професор

https://orcid.org/0000-0003-1923-9540
lench456@gmail.com

Zhytomyr State University named after Ivan Franko
40 Big Berdichevskaya St., Zhytomyr, Zhytomyr region, 10008

Житомирський державний університет імені Івана Франка
вул. Велика Бердичівська, 40
м. Житомир, Житомирська обл., 10008

Mykola PRATSIOVYTYI,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Микола ПРАЦЬОВИТИЙ,
доктор фізико-математичних наук, професор

https://orcid.org/0000-0001-6130-9413
prats4444@gmail.com

National M. P. Dragomanov Pedagogical University
✉ 9 Pirogova St., Kyiv-30, 01601

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
✉ вул. Пирогова, 9
м. Київ-30, 01601

Original manuscript received: October 01, 2019
Revised manuscript accepted: December 09, 2019

ABSTRACT

The article reveals one of the methods of activity of the subject of education, demonstrates a heuristic prescription, which it is advisable to use by drawing up a plan and solving many problems of stereometry, in particular, by a graphic or graphical-analytical method. This is an unconventional transformation within the stereometric body – "internal projection" – an imaginary spatial transformation that makes it easier for a binary image of the body to perpendicular to a straight line (or to a plane), the common perpendicular of two crossed straight lines, to postpone an angle with given degree measure, etc.

There are conical and cylindrical internal projection. As a rule, the first of them is advisable to apply in the case of a pyramid and a cone, and the second – a prism and a cylinder. The plane of the projections and the direction of internal projection is chosen by the student. The success in obtaining the result depends on how successfully these two components of the projection apparatus are selected. If, for example, you need to build a common perpendicular of two intersecting straight lines (see task 1), then the essence is that the projection direction is parallel to one of them, and the projection plane is perpendicular to this straight line. Sometimes it happens that the plane of projections contains another straight line or is located in space parallel to the latter.

Further, according to the statement of the theorem on the projection of a right angle, the segment of the common perpendicular and the right angle between it and the second straight line are projected onto the entered plane in full size. "Reverse projection" build the image of the desired common perpendicular.

We have considered only examples where the plane of projections is the base of the stereometric body (tasks 1-3), and the direction of projection is perpendicular to the base Exception is the task 3, especially when the straight lines a, b and c intersect at their common point S projection.

***Keywords**: stereometric body; picture; internal orthogonal projection; positional, metric tasks; constructive method.*

Вступ. Моделювання зображенням процесу розв’язання позиційної або ж метричної задачі стереометрії інколи здійснити непросто, оскільки елементи заданої в умові фігури займають, як правило, загальне розташування відносно картинної площини, а тому проєктуються на неї спотворено. Принагідно з метою пошуку раціонального шляху конструктивно-обчислювальних операцій варто скористатися *перетворенням внутрішнього проєкціювання*, яке переводить прямі (відрізки) або площини (плоскі фігури) оригіналу із загального розташування в частинне – у прямі та площини проєкціювальні чи рівня.

Методи та методики дослідження. Уміле введення площин проєкцій, удалий вибір напрямів внутрішнього проекціювання спрощує ситуацію, додає розуміння, упорядковує логіку міркувань, а нескладні графічні (графоаналітичні) добудови унаочнюють та конкретизують алгоритм отримання результату. Тут визначальними є: *збиральна властивість* слід-проєкцій проєкціювальних прямих і площин, а також факт проєкціювання на нововведену площину фігур *рівня без спотворення їх форми* (центральні проекції) та *розмірів* (паралельні проекції). В якості площин проєкцій внутрішнього проєкціювання послуговують грані багатогранника (зокрема, основа) або вдало обрані перерізи тіл. Розв'язання задачі *слід демонструвати* на *правильному і наочному зображенні*, адже останнє поліпшує уявлення взаємних розміщень окремих елементів фігури у просторі, а отже, *сприяє якісному прогнозуванню* ходу *візуальних* операцій.

Суб’єктам педагогічного процесу слід пам’ятати, що: “*Зображаючи одну і ту саму фігуру в різних розташуваннях*, *ті хто вчиться* ***виробляють*** *у собі міцні просторові уявлення геометричних тіл. Разом із тим виконання побудови фігури в її новому розташуванні чи після перетворення змушує посилено працювати просторову уяву учня*, *яка в той самий час корегується законами зображення на проєкційному кресленні*” (Четверухин, 1952: 104).

Результати та дискусії. Наведемо приклади кількох задач, в яких внутрішнє проєкціювання *на основу тіла* є виключно *ортогональним*.

Задача 1. *Осьовий переріз циліндра – квадрат. Відрізок АВ, який з’єднує точку А кола верхньої основи з точкою В кола нижньої основи циліндра*, *дорівнює* $2\sqrt{2}$ *і віддалений від осі циліндра на відстань* 1*. Знайти кут між прямою АВ і площиною основи циліндра.*

DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-3

Ортогональною проєкцією прямої *AB* (рис. 1) на площину основи циліндра буде пряма $A_1B(B \equiv B_1)$. Тож $\angle ABA_1 = \alpha$ – шуканий (за означенням).

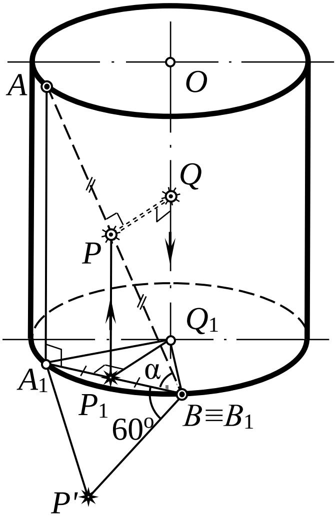

Рис. 1

Напрям *внутрішнього проєкціювання* встановлює вісь циліндра *OQ*1 (*AA*1 ‖ *OQ*1). Пряма OQ_1 – проекціювальна, тому відрізок PQ, який є спільним перпендикуляром прямих AB і OQ_1, розташовується паралельно площині основи циліндра (*PQ* ‖ *P*1*Q*1), а отже, як і прямий кут QPB_1 (згідно з теоремою про проєкціювання прямого кута), проєкціюється на неї у натуральну величину, тобто $PQ = P_1Q_1$, а $Q_1P_1 \perp A_1B_1$. Точка P_1 розділяє відрізок A_1B_1 навпіл (згідно із властивістю хорди кола $\omega(Q_1, R)$). Оберненим проєкціюванням ($P_1 \to P$), провівши *P*1*P* ‖ *Q*1*Q*, зображаємо спільний перпендикуляр PQ заданих мимобіжних прямих AB і OQ_1.

Таким чином, PP_1 – середня лінія трикутника AA_1B і, якщо $AA_1 = 2R$ (за умовою), то PP_1 = *R*. Відомо також, що $AB = 2\sqrt{2}$ а $PQ = 1$. У прямокутному трикутнику $A_1Q_1P_1$ $A_1P_1 = P_1B = \sqrt{R^2 - 1}$. Однак, $PB = AB/2 = \sqrt{2}$, а трикутник PP_1B теж прямокутний. Тому $PB^2 = PP_1^2 + P_1B^2$ або $(\sqrt{2})^2 = R^2 + (\sqrt{R^2 - 1})^2$. Звідки $R^2 = \dfrac{3}{2}$. Нарешті маємо: $P_1B = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, а $\cos\alpha = \dfrac{P_1B}{PB} = \dfrac{1}{2}$ і $\alpha = 60^\circ$.

Суто **графічно** (на рисунку) результат шукаємо елементарно просто, оскільки трикутник $A_1P'B_1$ – рівносторонній (*A*1*B*1 = *A*1*P*′ = *B*1*P*′ = $\sqrt{2}$). Неважко помітити, що розв’язана задача є оригінальною інтерпретацією другого наслідку з ОТМ, який подається нами як ще одне конструктивне означення спільного перпендикуляра двох мимобіжних

ICV 2018: 77.58
DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-3

прямих (Ленчук, 2010: 275-276).

Задача 2. *Знайти об'єм тетраедра, кожна грань якого є трикутником зі сторонами a, b і c, де a, b, c – різні додатні числа.*

Доведемо спочатку, що об'єм усякого тетраедра (рис. 2) дорівнює третині площі S його ортогональної проекції на площину, паралельну будь-якій парі мимобіжних ребер, помноженій на відстань d між цими ребрами.

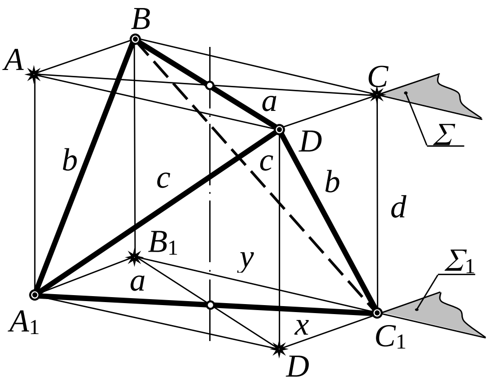

Рис. 2

Для визначеності варто уявити, що у просторі ребра BD і A_1C_1 (див. рис.) – горизонтальні. Проведемо через кожне з ребер власну горизонтальну площину $\Sigma \parallel \Sigma_1$, а через усі вершини тетраедра – *вертикальні проєкціювальні промені.* Одержимо пряму чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ із площею основи S й висотою d. Отже, об'єм призми рівний $S \cdot d$. Щоб виділити із призми встановлений умовою тетраедр BDA_1C_1, потрібно лише в уявленнях відітнути від неї чотири рівновеликі піраміди: A_1ABD, C_1CDB, $BA_1B_1C_1$, $DA_1D_1C_1$ (тут, напр., $V_{A_1ABD} = (1/3) \cdot S_{ABD} \cdot AA_1 = (1/6) \cdot S \cdot d$). Сумарний об'єм цих пірамід дорівнює $(2/3) \cdot S \cdot d$. Таким чином, об'єм тетраедра $V_{BDA_1C_1} = (1/3) \cdot S \cdot d$. (*)

Із умови задачі та рисунка до неї навіч випливає, що кожне з ребер однієї пари мимобіжних сторін тетраедра має довжину *a*, іншої – довжину *b*, а ще іншої – довжину *c*. Його ***внутрішньою*** проекцією на площину основи призми (Σ чи Σ_1), яка паралельна двом ребрам, рівним *a* (BD і A_1C_1), є прямокутник (паралелограм із рівними діагоналями), суміжні сторони якого позначимо через x і y. Відрізки x і y та висоту призми $(d = \rho(BD, A_1C_1))$ виразимо через *a, b* і *c*, розв'язавши систему рівнянь:

DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-3

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + d^2 = b^2, \\ y^2 + d^2 = c^2. \end{cases}$$

Підстановкою значень *x*, *y* і *d* у рівність (*), якщо в основі $S = x \cdot y$, одержимо:

$$V_{DBA_1C_1} = \frac{1}{12}\sqrt{2\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\left(c^2 + a^2 - b^2\right)}.$$

Задача 3. *На картинній площині задано трійку паралельних прямих a, b і c та трійку точок K, L і M, які не належать одній прямій і не лежать на заданих прямих. Побудувати трикутник ABC з вершинами на прямих a, b і c відповідно так, щоб кожна із прямих, визначених сторонами трикутника, проходила через одну з точок K, L, M.*

Маємо випадок **нетипової** планіметричної задачі на побудову, адже, як для шкільної навчальної практики, її графічне розв'язання достатньо просто здійснюється винятковим прийомом. Отже, нехай трикутник *ABC* є шуканим, тобто точка *A* належать прямій *a*, точка *B* належить прямій *b*, а точка *C* належить прямій *c* і, до того ж, пряма *AB* містить точку *K*, пряма *BC* містить точку *L*, а пряма *AC* – точку *M* (рис. 3).

Зовсім неважко ***уявити*** тривимірний простір, де трикутник *A'B'C'* є фігурою перерізу призми площиною Λ' з бічними ребрами *a'*, *b'* і *c'*, яка задана точками *K'*, *L'* і *M'*. Оскільки призма і січна площина строго визначені на зображенні, а проекцією призми за напрямом бічних ребер може бути будь-який її переріз (напр., $(A_1B_1C_1) \perp AA_1$), то форма і розміри шуканого трикутника *ABC* не залежать від вибору місця розташування площини $\boldsymbol{\Pi}(A_1B_1C_1)$ основи призми. Так, точки K_1, L_1 і M_1 – основи точок *K*, *L* і *M* на шпицях *внутрішнього проекціювання*, належатимуть прямим A_1B_1, B_1C_1 і A_1C_1 відповідно, де $K_1L_1M_1$ – основа трикутника *KLM*. ***Аналіз*** задачі на побудову завершено.

Побудову можна звести до відшукання прямої перетину площини Σ грані (*ac*) із площиною $\Lambda(KLM\ (K_1L_1M_1))$. Але Σ є проекціювальною площиною, а Σ_1 – її слід проекцією, тому $A_1B_1 \equiv \Sigma_1$ – основа шуканої прямої, яка обов'язково належить площині перерізу Λ, отже дві її точки лежать у цій площині. Нехай ними будуть точки $P(P_1)$ і $M(M_1)$. Пряма *PM* у перетині з ребрами *a* і *c* висіче відповідно дві вершини *A*, *C* шуканого трикутника. Третю вершину *B* одержимо у перетині прямої *CL* із ребром *b*.

ICV 2018: 77.58
DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-3

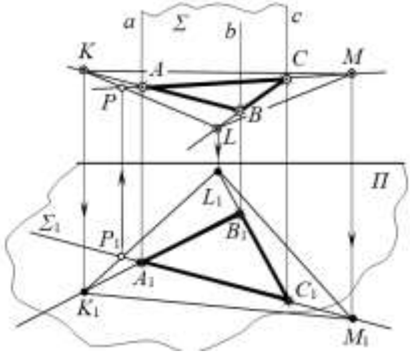

Рис.3

Доведенням правильності зроблених умовиводів і побудов на бінарній моделі може слугувати факт проходження прямої *ВА* через точку *К*. Очевидно, що розв'язок у задачі **єдиний**.

У вирішенні чималенької кількості питань стереометрії просторові взаємні залежності між заданими геометричними фігурами та їх елементами прийнято зводити до площинних. Щойно продемонстровано обернене – ми зумисне вдалися до *образного відбиття* (реконструкції) *плоскої конфігурації у просторову*, з наступним використанням *методу внутрішнього проекціювання за напрямом бічних ребер*. Особливістю цієї дії є винятково ***уявлюваний*** перехід від площини до простору.

Студенту-математику, поряд із цим, цікаво буде знати простий і, водночас, «геометрично красивий» шлях розв'язання цієї ж задачі методом проективної геометрії, з використанням відомої теореми *Дезарга на площині*, яка *доводиться* через її попереднє *доведення у просторі* (Четверухин, 1960: 98-101).

Тут (рис. 4) дві із трьох точок *К*, *L* і *М* з умови (нехай, для визначеності, це будуть точки *L* і *М*) задають дезаргову пряму (*s*), а будь-який трикутник *A'B'C'*, відповідно з вершинами на прямих *a*, *b* і *c*, вибираємо так, щоб його сторона (чи пряма) $A'B'$ містила, наприклад, точку *L* (цей перший крок на рисунковій моделі єдиний, що реалізовується довільно – за вибором виконавця побудов), а сторона (чи пряма) $B'C'$ – точку *М*. Третю точку *Р* дезаргової прямої шукаємо у перетині прямих $A'C'$ і *LM*. Пряма *КР* зливається із прямою *АС*, яка визначає дві із трьох вершин шуканого трикутника: $A = KP \cap a$ і $C = KP \cap c$. Остання вершина (*В*) визначиться як інциденція трьох прямих: *AL*, *CM* і *b*.

DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-3

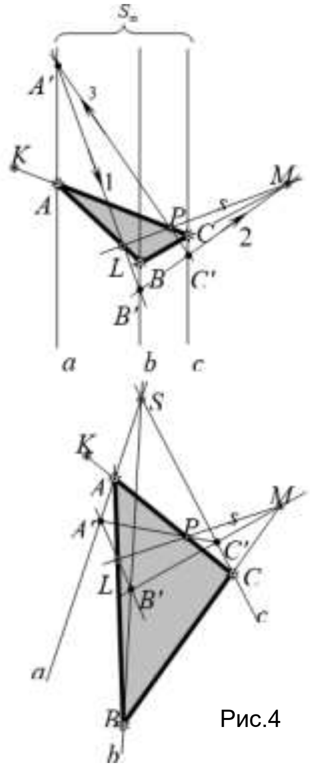

Рис.4

Висновки. Щоб активізувати природні задатки мислення учнів просторовими категоріями, додаючи творчості, варто *переорієнтувати пріоритети в роботі вчителя*. Окрім звичних формальних операцій активно впроваджувати конструктивні прийоми та способи дій, яким притаманні рисунковий супровід та істинно геометричний характер. Узаконені побудови за змістом і формою *висвітлюють зв’язки* всередині просторової фігури, забезпечуючи суб’єктам учіння їх наочно-образне сприйняття. До того ж, розмаїтість умоглядних перетворень *тренує розум*, *розвиваючи інтуїцію й “бачення” ситуації в уявленнях*, *що сприяє надбанню фахових знань*, *умінь і навичок*.

Приклади різнохарактерних позиційно-метричних задач із розділу “Стереометрія”, розв’язаних у статті чи то обчислювально, чи суто конструктивно, *засвідчують* пріоритетне місце побудовних схем в опануванні найпершої з наук. Візуально змодельований алгоритм операцій дозволяє глибше осмислити геометричну сутність взаємних залежностей між заданими умовою і шуканими елементами просторової конструкції. Якісне унаочнення неодмінно *посилює уявлювану та конструктивно-діяльнісну компоненти творчого сприйняття*, *розуміння і трактування реалій*, *налаштовує* на *оптимізацію* зумовлених обчислень. Це *розпалює*, *зміцнює інтерес до геометрії*, а *оволодіння учнями фактичним матеріалом відбувається на якісно вищому понятійному рівні*.

Розв’язуючи якомога більше задач підвищеної складності, зокрема, простим і ефективним *методом внутрішнього проекціювання*, ті хто вчиться *набираються досвіду по справжньому образно мислити*, *в динаміці дій моделювати*, *грамотно аналізувати бінарні моделі* та, дякуючи аналізу, *вирізняти* обумовлені логічними умовиводами і беззаперечними геометричними закономірностями міжелементні зв’язки. Міркуваннями й покроковою алгоритмізацією учні *шукають і знаходять шлях до розв’язку*, у *власноруч створених графічних реалізаціях споглядають результат*, *одержують морально-психологічне задоволення* не лише від змістових конструктивних перетворень, але й від акуратно виконаних рисунків-моделей, *карбують в уявленнях та пам’яті природну гармонію*, *красу об’єктів і фактів ще далеко не пізнаної дисципліни “Геометрія”*.

ICV 2018: 77.58
DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-3

Література

1.Ленчук І. Г. Конструктивна стереометрія в задачах: навчальний посібник для студентів математичних спеціальностей ВПНЗ – Житомир: видавництво ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 367 с.

2.Четверухин Н.Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже / Н.Ф. Четверухин. – М.: Учпедгиз, 1952. – 180 с.

3.Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия / Н.Ф. Четверухин. – М.: Просвещение, 1960. – 290 с.

References

1.Lenchuk I. (2010). *Konstruktyvna stereometriia v zadachakh* [Constructive stereometry in tasks]: navchalnyi posibnyk dlia studentiv matematychnykh spetsialnostei VPNZ – Zhytomyr: vyd-vo ZhDU im. I. Franka [in Ukrainian].

2.Chetverukhyn N. (1952). *Stereometrycheskye zadachy na proektsyonnom chertezhe* [Stereometric tasks on the projection drawing]. M.: Uchpedhyz [in Russian].

3.Chetverukhyn N. (1960). *Proektyvnaya geometriia* [Projective geometry]. M.: Prosveshcheniye [in Russian].

АНОТАЦІЯ

Ми ставили за мету на конкретних прикладах розкрити один із способів діяльності суб'єкта учіння, продемонструвати евристичний припис, яким доцільно користуватися складаючи план та розв'язуючи чимало задач стереометрії, зокрема, графічним або графоаналітичним методом. Мова йде про нетрадиційне в умовах школи і закладу вищої освіти перетворення усередині будь-якого тіла стереометрії, яке фахівці називають «внутрішнім проекціюванням». Це – уявлюване просторове перетворення, за допомогою якого спрощується проведення перпендикуляра на бінарному зображенні тіла з точки до прямої (чи до площини), спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих, відкладання кута із заданою градусною мірою тощо. Розрізняють конічне і циліндричне внутрішнє проекціювання. Як правило, перше з них доцільно застосовувати у випадку піраміди і конуса, а друге – призми та циліндра. Площина проекцій і напрям внутрішнього проекціювання вибирається учнем, який розв'язує задачу. Від того, наскільки вдало вибрано ці дві складові апарату проекціювання залежить результат.

Якщо, приміром, вам потрібно побудувати спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих (див. задачу 1), то суть важливо, щоб напрям проекціювання був паралельним одній із них, а площина проекцій – перпендикулярна цій прямій. Інколи трапляється, що площина проекцій вміщує іншу пряму або, хоча б, розташовується у просторі паралельно останній. Далі, згідно із твердженням теореми про проекціювання прямого кута, відрізок спільного перпендикуляра й прямий кут між ним та другою прямою проекціюються на введену площину проекцій у натуральну величину. Операцією «оберненого проекціювання» будують зображення шуканого спільного перпендикуляра.

У представленій статті розглянуто приклади задач, в яких площиною проекцій є виняткові основа стереометричного тіла (задачі 1-3), а напрям проекціювання перпендикулярний до основи. Винятком є варіант задачі 3, коли, згідно з умовою, задані прямі a, б і c перетинаються у їх спільній точці S. Тут застосовують центральне проекціювання.

Ключові слова: *стереометричне тіло; зображення; внутрішнє ортогональне проекціювання; позиційні, метричні задачі; конструктивний метод.*