УДК 378.147+530:531.3
DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-2-198-206

TEACHING THE THEME “"LAGRANGE EQUATIONS ON THE BASIS OF THE DIFFERENTIAL VARIATIONAL PRINCIPLE OF D'ALEMBERT-LAGRANGE”

ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ “РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ВАРІАЦІЙНОГО ПРИНЦИПУ Д’АЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА”

OLENA ZAVRAZHNA,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

ОЛЕНА ЗАВРАЖНА,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

https://orcid.org/0000-0002-7716-7138
zavragna@gmail.com

Sumy State Pedagogical University named after A. S. Makarenko
✉ 87 Romenskaya St., Sumy, 40002

Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка
✉ вул. Роменська, 87 м. Суми, 40002

Original manuscript received: July 17, 2019
Revised manuscript accepted: September 12, 2019

ABSTRACT

While preparing physics and mathematics specialists, and in particular physics teachers, it should be paid attention to the general principles, which in a compact form contain not only all known experimental and theoretical positions, but also allow predicting new discoveries. These principles include integral variational principles that were first formulated in mechanics. Preparing physics teachers’, the principles are studied in the theoretical physics course in its first section – “Classical mechanics”. By studying classical mechanics, unlike the general course “Mechanics”, students encounter many generalized and abstract concepts, the formation of which puts before teachers a lot of methodological problems to be solved.

The following methods were used for research: systematic scientific and methodological analysis of textbooks and manuals, articles on the research problem; observation of the educational process; synthesis, comparison and generalization of theoretical positions, discovered in the scientific and educational literature; generalization of own pedagogical experience.

The authors of the article summarized the results of the analysis of textbooks and their own experience, and on the basis of this, one of the possible ways to study the topic “Lagrange equation”. According to this method, the content of this topic should be disclosed through the following questions: generalized coordinates, generalized forces; generalized speeds and their units of measurement.

We can state that the given method allows students to form a sufficiently deep and stable understanding of the concepts of “generalized coordinates”, “generalized *forces", "generalized velocities" and gives an idea of using the Lagrange equation for solving tasks that are difficult to solve using only Newton's laws. Further research will be related to the study of the methodological features of the study of the Lagrange equation on the basis of the integral variational principle of Hamilton-Ostrogradsky.*

Key words: *future physics teachers, classical mechanics, generalized coordinates, generalized forces; generalized speeds, Lagrange equation.*

Вступ. Відповідно до завдань закону України "Про вищу освіту" та "Національної доктрини розвитку освіти України у XXI столітті", а також закону України "Про освіту" визначено головною метою її формування компетентностей, які в майбутньому допоможуть особистості в самореалізації. Учитель фізики після закінченню закладу вищої освіти (ЗВО) повинен мати фундаментальні знання і вміти застосовувати їх на практиці, що є показником професійної компетентності. Отже, фундаментальна підготовка є запорукою формування професійної компетентності і вона повинна базуватись не на знанні окремих емпіричних законів, формул, аксіом тощо, на вивчення яких спрямований сучасний освітній процес у педагогічних університетах, а на деяких загальних положеннях, які в компактній формі містять не лише всю інформацію у заданій галузі фізичних явищ, але й мають евристичну цінність, тобто, щоб із них, як наслідок, витікали не лише ті факти, синтезом яких вони є, а й ті, які під час їх створення ще не були відомі. Ці загальні положення повинні прогнозувати нові фізичні явища та закономірності природи. До таких загальних положень в теоретичній фізиці відносяться варіаційні принципи. Під "принципом" розуміють аксіоматичне положення, яке для певної галузі науки є основним, і всі інші положення можна отримати із нього як логічні наслідки. У педагогічному університеті студенти бакалаврату розглядають варіаційні принципи при вивченні класичної механіки на третьому курсі. Але виявлено, що в деяких студентів під час вивчення цього питання спостерігаються труднощі як під час засвоєння теоретичного матеріалу, так і під час самостійного застосування набутих знань до розв'язання завдань. Одним з важких для сприйняття майбутніми вчителями питань є тема "Рівняння Лагранжа".

Аналіз досліджень науково-методичної літератури свідчить, що проблема фахової підготовки майбутніх учителів фізики є широко обговорюваною науковцями на сторінках педагогічних та методичних видань: із проблеми якості освіти в галузі фізики та фундаменталізації О. Бугайов, С. Гончаренко, О. Ляшенко, А. Павленко, О. Сергєєв, М. Шут та ін.; становлення майбутнього вчителя фізики на засадах компетентнісного підхіду досліджують П. Атаманчук, Г. Атанов, М. Головко, О. Ляшенко, В. Сергієнко та ін.; підвищення якості дидактичного забезпечення освітнього процесу та вдосконаленням фізичного навчального експерименту досліджують Л. Благодаренко, В. Величко, В. Вовкотруб, В. Заболотний, Л. Калапуша, Е. Коршак, Д. Костюкевич, М. Мартинюк, методичні аспекти вивчення певних питань курсів загальної і теоретичної фізики розглядають у своїх працях В.

DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-2

Мендерецький, І. Сальник, В. Сиротюк та ін.; Г. Бушок, О. Коновал, І. Мороз, М. Садовий, В. Сергієнко, Б. Сусь, І. Тичина та ін. Проаналізувавши праці зазначених учених-методистів та узагальнивши власний досвід роботи в педагогічному університеті, ми прийшли до висновку, що в теорії та методиці викладання фізики практично відсутні дослідження, у яких висвітлювалися б методичні аспекти навчання основ аналітичної механіки. Як наслідок, обґрунтування рівняння Лагранжа розглянуто фрагментарно в окремих посібниках з теоретичної механіки (Бондаренко, 2004; Булгаков, 2017; Іванов, 2012; Єжов, 2007; Литвинов, 2013), які рекомендовані для студентів інженерних спеціальностей.

Мета статті – розкриття **особливостей методики навчання теми "Рівняння Лагранжа** як наслідок диференціального варіаційного принципу Д'аламбера-Лагранжа**" у процесі підготовки вчителя фізики.**

Для дослідження використані такі методи: систематичний науково-методичний аналіз підручників та посібників, статей з проблеми дослідження; спостереження за освітнім процесом.

Результати дискусії. Зміст цієї теми повинен бути розкритий на лекціях після формування таких понять: узагальнені координати, узагальнені сили; узагальнені швидкості.

На початку заняття необхідно провести аналіз можливостей розв'язання основної задачі динаміки механічної системи в рамках механіки Ньютона та наголосити, що у випадку системи із одним ступенем вільності найбільш простим і універсальним методом є використання теореми про зміну кінетичної енергії. Далі приходимо до висновку, що якщо система має декілька ступенів вільності, то використання лише теореми про зміну кінетичної енергії стає недостатнім для повного розв'язання задачі. Для таких систем повний розв'язок задачі завжди можна одержати за допомогою принципу Д'аламбера-Лагранжа (загальне рівняння динаміки), в якому із розгляду виключаються сили реакції зв'язків, і для відносно простих систем використання цього принципу є дійсно раціональним. Але, як показує аналіз, у випадку складних систем використання загального рівняння динаміки, призводить до математичних ускладнень (їх можна розв'язати), але доцільніше використовувати не сам принцип Д'аламбера-Лагранжа, а рівняння Лагранжа, які із нього витікають. Далі пропонуємо студентам отримати разом на лекції рівняння Лагранжа як наслідок основного рівняння динаміки.

Для цього розглядаємо механічну систему *N* точок, на яку накладено *k* голономних ідеальних утримуючих стаціонарних зв'язків. У цьому випадку система рівнянь руху та рівнянь зв'язків

$$\begin{aligned} &m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \;\; i = 1,2,...,N, \\ &f\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t\right) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

містить 6*N* невідомих (3*N* проекцій реакцій зв'язків і 3*N* координат). З них 3*N*–*k* координат є незалежними, інші *k* можуть бути визначені із рівнянь зв'язків. Отже, кількість невідомих більша, ніж кількість рівнянь. Щоб

ICV 2018: 77.58
DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-2

обійти цю невизначеність системи рівнянь, будемо положення системи в просторі описувати не звичайними декартовими, а узагальненими координатами q_s, кількість яких дорівнює числу ступенів вільності, а саме: $3N\text{–}k=l$.

Звертаємо увагу студентів на те, що узагальнені координати q_s та їх варіації δq_s є незалежними і їх можна задавати довільним чином. Узагальнені, як і звичайні координати (декартові та ін.), однозначно описують положення матеріальних точок у просторі, тому між ними і декартовими координатами у кожному випадку існує функціональний зв'язок, який у загальному вигляді напишемо наступним чином

$$\vec{r}_i = \vec{r}_1\left(q_1, q_2, ..., q_l, t\right). \qquad (2)$$

Далі отримаємо рівняння руху такої системи в узагальнених координатах, які допоможуть знайти всі згадані раніше невідомі.

Надамо системі віртуальні переміщення, які у даний момент часу дозволяють зв'язки. У результаті цього радіус-вектори частинок системи одержать віртуальні зміни (варіації) $\delta\vec{r}_i$, які пов'язані із варіаціями узагальнених координат δq_s виразом:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\delta q_s . \qquad (3)$$

Запишемо принцип Д'аламбера-Лагранжа

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\frac{d\vec{V}_i}{dt}\right)\delta\vec{r}_i = 0$$

і підставимо в нього віртуальні переміщення системи (3). У результаті отримаємо

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\frac{d\vec{V}_i}{dt}\right)\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\delta q_s = 0.$$

Після простих перетворень змінимо порядок визначення сум

$$\sum_{s=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} - \sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d\vec{V}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\right)\delta q_s = 0. \qquad (4)$$

Слід звернути увагу студентів на те, що величина в дужках $\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} = Q_s$ є узагальненою силою, що відповідає узагальненій координаті q_s.

Розглянемо очевидний допоміжний вираз

DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-2

$$\frac{d}{dt} m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} = m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} + m_i \vec{V}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s},$$

звідки

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} = \frac{d}{dt} m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} - m_i \vec{V}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}.$$

Підставимо цей вираз у (4):

$$\sum_{s=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} - \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d}{dt} m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} - m_i \vec{V}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \right) \right) \delta q_s = 0$$

або

$$\sum_{s=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{N} Q_s - \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d}{dt} m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} - m_i \vec{V}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \right) \right) \delta q_s = 0. \qquad (5)$$

Виразимо швидкість матеріальних точок, використовуючи її означення та (2)

$$\vec{V}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\vec{V}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \qquad (6)$$

де величина

$$\dot{q}_s = \frac{dq_s}{dt} \qquad (7)$$

є узагальненою швидкістю. Вона має розмірність звичайної швидкості, якщо узагальнена координата – лінійна величина, і – кутової швидкості, якщо q_s – кутова величина.

Використовуючи (6), визначимо похідні $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}$ і $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\right)$, пам'ятаючи, що при розрахунку частинної похідної від деякої функції багатьох змінних за одним із аргументів, інші вважаються постійними. Одержуємо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\right) = \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_s}, \qquad (8)$$

ICV 2018: 77.58
DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-2

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} = \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{q}_s}. \qquad (9)$$

Підставимо ці вирази в (5)

$$\sum_{s=1}^{l}\left(Q_s - \sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{m_i V_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial q_s}\frac{m_i V_i^2}{2}\right)\delta q_s = 0. \qquad (10)$$

Змінимо у цьому виразі послідовність виконання операцій диференціювання і підсумування

$$\sum_{s=1}^{l}\left(Q_s - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i V_i^2}{2} + \frac{\partial}{\partial q_s}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i V_i^2}{2}\right)\delta q_s = 0.$$

і врахуємо, що $\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i V_i^2}{2} = K$ – це кінетична енергія системи матеріальних точок. Тоді

$$\sum_{s=1}^{l}\left(Q_s - \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial K}{\partial q_s}\right)\delta q_s = 0.$$

З огляду на те, що δq_s незалежні варіації узагальнених координат, які можуть задаватись довільним чином, у тому числі й не рівними нулю ($\delta q_s \neq 0$), приходимо до висновку, що ліва частина останнього виразу дорівнює нулю, якщо всі коефіцієнти при δq_s дорівнюють нулю:

$$Q_s - \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial K}{\partial q_s} = 0, \; s = 1,2,..., l$$

або

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial K}{\partial q_s} = Q_s, \; s = 1,2,..., l. \qquad (11)$$

Зауважимо, що система (11) і є системою рівнянь Лагранжа другого роду, яку у подальшому будемо називати просто рівняннями Лагранжа.

На лекції також потрібно відзначити, що, як відомо із теорії диференціальних рівнянь, існує лише один розв’язок рівнянь Лагранжа (11) при заданих початкових умовах. Отже, рівняння Лагранжа однозначно описують рух механічної системи.

Отже, приходимо до висновку, що рівняння Лагранжа представляють сукупну систему $3N-k=l$ звичайних диференціальних рівнянь другого порядку із незалежними функціями $q_1(t)$, $q_2(t)$,…, $q_s(t)$,…, $q_l(t)$. Загальний розв’язок системи рівнянь буде залежати від $2l$ довільних

DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-2

констант інтегрування $C_1, C_2, ..., C_{2l}$. Звідси, інтеграли рівнянь (11) матимуть такий вигляд:

$$q_s = q_s(C_1, C_2, ..., C_{2l}, t), \quad s = 1, 2, ..., l. \qquad (12)$$

Далі пропонуємо студентам визначити постійні інтегрування $(C_1, C_2, ..., C_{2l})$, для цього необхідно знати стан системи у будь-який момент часу, наприклад $t=t_0$. Це означає, що для моменту $t=t_0$ повинні бути задані значення узагальнених координат

$$q_{0s} = q_{0s}(C_1, C_2, ..., C_{2l}, t), \quad s = 1, 2, ..., l,$$

і узагальнених швидкостей

$$\dot{q}_{0s} = \dot{q}_{0s}(C_1, C_2, ..., C_{2l}, t), \quad s = 1, 2, ..., l,$$

тобто будемо мати систему із 2(3*N*-*k*) алгебраїчних рівнянь, із яких можна визначити постійні інтегрування $C_1, C_2, .., C_{2l}$ у вигляді

$$C_i = C_i(q_{01}, q_{02}, ..., q_{0l}, \dot{q}_{01}, \dot{q}_{02}, ..., \dot{q}_{0l}), i = 1, 2, ..., 2l. \qquad (13)$$

Підставляючи тепер знайдені значення C_i у систему рівнянь (12), отримуємо узагальнені координати у вигляді функцій q_s від часу і початкових умов. Рух системи тим самим буде однозначно визначеним в узагальнених координатах рівняннями (12). Якщо потрібно рух визначити у звичайних координатах, то використаємо їх зв’язок з узагальненими координатами (2). Після цього, якщо потрібно визначити сили реакції зв’язків, потрібно підставити (12) у рівняння руху – закон Ньютона і, тим самим, завершуємо розв’язання основної задачі механіки невільних систем.

На лекції потрібно відзначити, що система диференціальних рівнянь руху механічної системи в узагальнених координатах (12) дає досить простий метод розв’язання задач динаміки. Вигляд рівнянь Лагранжа і їх кількість не залежать ні від кількості тіл, що входять у систему, що розглядаються, ні від того, як ці тіла рухаються, а визначається лише числом ступенів вільності. Крім цього, при голономних зв'язках у праві частини рівнянь входять лише активні сили. Отже, ці рівняння дозволяють заздалегідь виключити із розгляду всі невідомі сили реакції зв'язків, а у випадку в’язей із тертям сили тертя можна ввести у систему заданих сил. Наголошуємо, що у подальших лекціях ми покажемо, що рівняння Лагранжа спрощуються коли всі сили, які діють на систему, потенціальні, і тоді узагальнені сили виражаються лише через потенціальну енергію системи.

Далі наводимо рекомендації щодо складання рівнянь Лагранжа другого роду, які випливають безпосередньо із самої форми цих рівнянь та способу введення узагальнених координат:

ICV 2018: 77.58
DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-2

1) зобразити на рисунку всі активні сили, що діють на систему; реакції зв'язків зображати не потрібно; якщо є сили тертя, то їх слід приєднати до активних сил; 2) визначити число ступенів вільності. Для цього потрібно уявно зупинити одне із тіл системи. Якщо всі тіла зупиняться, то система має один ступінь вільності, якщо – ні, то повторити все з іншим тілом, яке ще не зупинилось, і виконувати цю процедуру до тих пір, поки система не зупиниться. Кількість таких спроб дорівнює числу ступенів вільності; 3) вибрати для кожного ступеня вільності узагальнену координату; 4) обчислити кінетичну енергію системи, виразивши її через узагальнені координати та швидкості; 5) визначити частинні похідні від кінетичної енергії, які фігурують у рівняннях Лагранжа; 6) визначити потенціальну енергію системи, якщо сили потенціальні; 7) знайти узагальнені сили системи, які відповідають усім узагальненим координатам; 8) підставити у рівняння (11) похідні від кінетичної енергії та узагальнені сили; 9) інтегруючи записані диференціальні рівняння Лагранжа, отримуємо закон руху системи та (за допомогою початкових умов) визначаємо константи інтегрування. За необхідності можна визначити закон руху у звичайних (декартових координатах) та сили реакції зв’язків, використовуючи уже другий закон Ньютона для кожної матеріальної точки, на яку накладені вязі; 10) дослідити отриманий розв’язок.

Підкреслюємо, що таку послідовність дій (1-10) при розв’язанні задач за допомогою рівнянь Лагранжа часто називають формалізмом Лагранжа.

Для закріплення цієї теми на практичних заняттях розв’язуються приклади, що ілюструють застосування рівнянь Лагранжа у вигляді (11) для розв’язання задач.

Висновки. Підсумовуючи зазначене вище, можемо констатувати, що подана методика дозволяє сформувати в студентів достатньо глибоке й стійке розуміння понять “узагальнені координати”, “узагальнені сили”, “узагальнені швидкості” та дає уявлення про використання рівняння Лагранжа для розв’язання задач, які важко розв’язати, використовуючи лише закони Ньютона. Подальші дослідження будуть пов’язані з вивченням методичних особливостей навчання рівняння Лагранжа на основі інтегрального варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського.

Література

1. Бондаренко А. А., Дубінін О. О., Переяславцев О. М. *Теоретична механіка: Підручник: У 2 ч. Ч.2: Динаміка*. Київ: «Знання», 2004. 590 с.

2. Булгаков В. М., Яременко В. В., Черниш О. М., Березовий М. Г. *Теоретична механіка:підручник.* Київ: ЦУЛ, 2017. 640 с.

3. Іванов Б. О., Максюта М. В. *Конспект лекцій із теоретичної механіки: навчальний посібник*. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012. 207 с.

4. Єжов С. М., Макарець М. В., Романенко О. В. Класична механіка. Київ: Фізичний факультет, 2007. 399 с.

5. Литвинов О. І., Михайлович Я. М., Бойко А. В., Березовий М. Г. *Теоретична механіка Ч. ІІ. Динаміка. Основи аналітичної механіки*. Київ: Агроосвіта, 2013. 576 с.

DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-2

References

1. Bondarenko, A. A., Dubinin, O. O., Perejaslavcev, O. M. (2004) *Teoretychna mekhanika: Pidruchnyk: U 2 ch. Ch.2: Dynamika* [Theoretical mechanics: Textbook: In 2 parts Part 2: Dynamics]. Kyjiv: Znannja [in Ukrainian].
2. Bulghakov, V. M., Jaremenko, V. V., Chernysh, O. M., Berezovyj, M. Gh. *Teoretychna mekhanika:pidruchnyk* [Theoretical mechanics: textbook]. Kyjiv: CUL [in Ukrainian].
3. Ivanov, B. O., Maksjuta, M. V. (2012) *Konspekt lekcij iz teoretychnoji mekhaniky: navchaljnyj posibnyk* [Synopsis of lectures on theoretical mechanics: tutorial]. Kyjiv: Vydavnycho-polighrafichnyj centr «Kyjivsjkyj universytet». [in Ukrainian].
4. Jezhov, S. M., Makarecj, M. V., Romanenko, O. V. (2007) Klasychna mekhanika. Kyjiv: Fizychnyj fakuljtet [in Ukrainian].
5. Lytvynov O. I., Mykhajlovych Ja. M., Bojko A. V. & Berezovyj M. Gh. (2013) *Teoretychna mekhanika Ch. II. Dynamika* [Theoretical mechanics Ch. II. Dynamics. Fundamentals of Analytical Mechanics]. Osnovy analitychnoji mekhaniky / Kyjiv: Aghroosvita [in Ukrainian].

АНОТАЦІЯ

Майбутній фахівець після закінчення навчального закладу вищої освіти повинен вміти застосовувати отримані фундаментальні знання на практиці. До таких відносяться й загальні варіаційні принципи. У педагогічному університеті студенти бакалаврату розглядають варіаційні принципи при вивченні класичної механіки на третьому курсі. Але виявлено, що в деяких студентів у процесі вивчення цього питання, спостерігаються труднощі під час засвоєння окремих понять та самостійного застосування набутих знань для розв'язання завдань. Одним з таких важких для сприйняття майбутніми вчителями питань є тема “Рівняння Лагранжа як наслідок диференціального варіаційного принципу Д'аламбера-Лагранжа”. Констатовано, що в теорії та методиці викладання фізики практично відсутні дослідження, у яких висвітлювалися б методичні аспекти навчання основ аналітичної механіки. Як наслідок, обґрунтування рівняння Лагранжа розглянуто фрагментарно в окремих посібниках для студентів інженерних спеціальностей.

Для дослідження використані такі методи: систематичний науково-методичний аналіз підручників та посібників, статей з проблеми дослідження; спостереження за навчальним процесом, синтез, порівняння та узагальнення теоретичних положень, виявлених у науковій та навчальній літературі; узагальнення власного педагогічного досвіду.

У статті розглянуто один із можливих способів навчання теми “Рівняння Лагранжа як наслідок диференціального варіаційного принципу Д'аламбера-Лагранжа”, відповідно до якого зміст цієї теми слід розкривати після формування понять “узагальнені координати”, “узагальнені сили”, “узагальнені швидкості” та їх одиниці вимірювання. Можна констатувати, що цей метод дозволяє сформувати в студентів достатньо глибоке і стійке розуміння зазначених понять та дає уявлення про використання рівняння Лагранжа для розв'язування задач, використовуючи лише закони Ньютона. Подальші дослідження будуть пов'язані з вивченням методичних особливостей навчання рівняння Лагранжа на основі інтегрального варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського.

***Ключові слова**: вчителі фізики, класична механіка, узагальнені координати, узагальнені сили, узагальнені швидкості, рівняння Лагранжа.*

ICV 2018: 77.58
DOI 10.31494/2412-9208-2019-1-2